ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 30/05/19

(Κάθε άλλη λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή) Οι λύσεις είναι οι εξής:

Θ.1 (i) Ο ζητούμενος πίνακας είναι ο:

Παραγγελία i	v_i	N_i	f_i	F_i
[4500, 5000)	70	70	7%	7%
[5000, 5500)	200	270	20%	27%
[5500, 6000)	250	520	25%	52%
[6000, 6500)	180	700	18%	70%
[6500, 7000)	120	820	12%	82%
[7000, 7500)	100	920	10%	92%
[7500, 8000)	60	980	6%	98%
[8000, 8500)	20	1000	2%	100%

Μέχρι 7000€ βρίσκεται το 82% των παραγγελιών. Μέχρι 8000€ βρίσκεται το 98% των παραγγελιών. Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι 98% - 82% = 16% ή ισοδύναμα στο διάστημα [7000, 7500) βρίσκεται το 10% των παραγγελιών ενώ στο [7500, 8000) το 6% των παραγγελιών οπότε αθροίζουμε τα δυο ποσοστά. Για την γραφική εκτίμηση της κορυφής της κατανομής δες Διάγραμμα 3.3 σελ. 63 βιβλίο (Σημείωση: από την γραφική εκτίμηση και με γεωμετρία Β' λυκείου προκύπτει και ο αντίστοιχος τύπος για ομαδοποιημένα δεδομένα) (2

(ii). Θα υπολογίσουμε την ποσότητα

$$s_k = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\delta}{Q_3 - Q_1}$$

όπου τα Q_1, δ, Q_3 θα υπολογισθούν από τους τύπους για τα ομαδοποιημένα δεδομένα.

$\left[\frac{n}{4}\right] = \left[\frac{1000}{4}\right] = 250$ οπότε από τη στήλη των αθροιστικών συχνοτήτων προκύπτει ότι βρισκόμαστε στην κλάση $i=2$.

$L_i = L_2 = 5000$, $N_{i-1} = N_1 = 70$, $v_i = v_2 = 200$, $c = 500$. Άρα

$$Q_1 = 5000 + \frac{250-70}{200} \cdot 500 = 5000 + \frac{180}{200} \cdot 500 = 5000 + 450 = 5450.$$

Όμοια $\left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{1000}{2}\right] = 500$ οπότε από τη στήλη των αθροιστικών συχνοτήτων προκύπτει ότι εργαζόμαστε στην κλάση $i=3$

Έχουμε ότι

$L_3 = 5500$, $\frac{n}{2} = 500$, $N_2 = 270$,

$v_3 = 250$, $c = 500$. Εφαρμόζοντας

τον τύπο προκύπτει ότι

$$\delta = Q_2 = 5500 + \frac{500-270}{250} \cdot 500 =$$

$$5500 + \frac{230}{250} \cdot 500 = 5500 + 460 = 5960.$$

Τέλος $\left[\frac{3n}{4}\right] = \left[\frac{3000}{4}\right] = 750$ και συνε-

πώς εργαζόμαστε στην κλάση $i = 5$.

Ισχύει ότι $L_5 = 6500$, $\frac{3n}{4} = 750$,

$N_4 = 700$, $v_5 = 120$, $c = 500$. Άρα

$$Q_3 = 6500 + \frac{750-700}{120} \cdot 500 = 6500 + \frac{50}{120} \cdot 500$$

$$\simeq 6500 + 208,33 = 6708,33.$$

Με βάση τα δεδομένα αυτά προκύπτει ότι

$$s_K = \frac{6708,33 + 5450 - 2 \cdot 5960}{6708,33 - 5450} =$$

$$\frac{12158,33 - 11920}{1258,33} = \frac{238,33}{1258,33} \simeq 0,189 > 0$$

Αυτό σημαίνει ότι η κατανομή των παραγγελιών είναι θετικά ασύμμετρη δηλ. ότι εμφανίζει ουρά στην περιοχή των μεγάλων τιμών, κάτι που επαληθεύεται και από το πολύγωνο συχνοτήτων.
Άρα η κατανομή αυτή μπορεί να εμφανίζει έκτροπες τιμές που θα είναι πολύ μεγάλες σε σχέση με τις υπόλοιπες τιμές.

(iii) (δες και λύση Άσκησης **5** κεφ. 3 βιβλίου, σελ. 452 στην 4η έκδοση) Ισχύει ότι

$\bar{x} = 6110$ €, $s = 863,8$ €. Άρα ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{863,8}{6110} \simeq 14,1\%,$$

ενώ το σύνολο των πωλήσεων είναι ίσο με

$$n \cdot \bar{x} = 1000 \cdot 6110 = 6110000 \text{ €}.$$

Επομένως, σε σύγκριση με το πρόσφατο παρελθόν έχουμε μείωση των συνολικών πωλήσεων (ήταν $1300 \cdot 5800 = 7540000$€) αλλά βελτίωση του μέσου ύψους των παραγγελιών και βελτίωση τόσο της απόλυτης όσο και της σχετικής διασποράς τους ό,τι ήταν $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1200}{5800} \simeq 20,7\%$.

Θ.2 (α) (i) Έστω τα ενδεχόμενα A: η (τυχαία επιλεγμένη) γυναίκα δεν εργάζεται και B: η γυναίκα δεν έχει παιδιά. Ζητείται η $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$. Από τα δεδομένα του πίνακα διπλής εισόδου έχουμε ότι $N(\Omega) = 300$ = το σύνολο των γυναικών, $N(A) = 100$, $N(B) = 85$, $N(A\cap B) = 5$. Άρα $P(A\cup B)$

$$= \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)} = \frac{100}{300} + \frac{85}{300} - \frac{5}{300} = \frac{100+85-5}{300} = \frac{180}{300} = \frac{3}{5}.$$

Δεδομένου ότι $N(A\cap B) = 5 \neq 0$ έχουμε ότι $A\cap B \neq \emptyset$ και άρα τα A, B δεν είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Αυτό, ισοδύναμα, προκύπτει και ως εξής:

$$P(A\cap B) = \frac{5}{300} \neq P(A)\cdot P(B) = \frac{100}{300}\cdot\frac{85}{300}.$$

(ii). Έστω τα ενδεχόμενα Γ: η γυναίκα έχει 1 τουλάχιστον παιδί και Δ: η γυναίκα δεν εργάζεται. Ζητείται η

$$P(\Gamma|\Delta) = \frac{P(\Gamma \cap \Delta)}{P(\Delta)}.$$

Παρατηρούμε ότι $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, όπου Γ_i: η γυναίκα έχει ακριβώς i παιδιά, $i = 1, 2, 3$, και Γ_4: η γυναίκα έχει τουλάχιστον 4 παιδιά. Τα Γ_i, $i=1,2,3,4$, είναι ξένα μεταξύ τους και συνεπώς από γνωστή ιδιότητα $\Gamma \cap \Delta = \bigcup_{i=1}^{4} (\Gamma_i \cap \Delta)$ (ένωση ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων).

Άρα $P(\Gamma \cap \Delta) = P\left[\bigcup_{i=1}^{4} (\Gamma_i \cap \Delta)\right] = \sum_{i=1}^{4} P(\Gamma_i \cap \Delta)$ από την προσθετική ιδιότητα.

Από τα δεδομένα του πίνακα έχουμε ότι $N(\Gamma_1 \cap \Delta) = 20$, $N(\Gamma_2 \cap \Delta) = 50$, $N(\Gamma_3 \cap \Delta) = 20$, $N(\Gamma_4 \cap \Delta) = 5$ και άρα $P(\Gamma \cap \Delta) = \frac{20}{300} + \frac{50}{300} + \frac{20}{300} + \frac{5}{300} = \frac{95}{300}$. $N(\Delta) = 100$

$\Rightarrow P(\Delta)=\frac{100}{300}$. Άρα $P(\Gamma|\Delta)=\frac{\frac{95}{300}}{\frac{100}{300}}=\frac{95}{100}$ ή 95%.

Μια άλλη λύση, χαμηλότερης βαθμολογικής αξίας, είναι να πάμε στον πίνακα συνάφειας και να προσδιορίσουμε ότι: Πλήθος μη εργαζόμενων γυναικών = 100, Πλήθος μη εργαζόμενων γυναικών με 1 τουλάχιστον παιδί = Πλήθος μη εργαζόμενων γυναικών με 1 ακριβώς παιδί + πλήθος μη εργαζόμενων γυναικών με 2 ακριβώς παιδιά + πλήθος μη εργαζόμενων γυναικών με 3 ακριβώς παιδιά + πλήθος μη εργαζόμενων γυναικών με 4 και πλέον παιδιά = 20 + 50 + 20 + 5 = 95. Άρα $P=\frac{95}{100}$.

(Β) (i) Δεδομένου ότι η κανονική κατανομή είναι συμμετρική περί του μέσο της και $\mu=165$ ισχύει ότι $P(X>165)=1-P(X\leq 165)=1-0,5=0,5$ ή 50%.

Μια άλλη λύση, χαμηλότερης βαθμολογι-

κής αξίας είναι να χρησιμοποιήσουμε (8
κανονικοποίηση δηλ. $P(X>165) = 1 - P(X \leq 165) = 1 - P\left(\frac{X-165}{6} \leq \frac{165-165}{6}\right)$
$= 1 - P(Z \leq 0) = 1 - \Phi(0) = 1 - 0,5 = 0,5$
(πρέπει να θυμάται κανείς ότι $\Phi(0) = 0,5$ δεδομένου ότι δεν δόθηκαν πίνακες της κανονικής κατανομής)

(ii) Έστω Y η τυχαία μεταβλητή που μετρά το πλήθος των φοιτητών με ύψος > 165 cm ανάμεσα στους 20 τυχαία επιλεγμένους. Τότε $Y \sim b(20, 0,5)$

Ζητείται η $P(Y \geq 10) = \sum_{i=10}^{20} P(Y=i)$

όπου $P(Y=i) = \binom{20}{i} \cdot 0,5^{i} \cdot (1-0,5)^{20-i} = \binom{20}{i} \cdot 0,5^{i} \cdot 0,5^{20-i} = \binom{20}{i} \cdot 0,5^{20}$ με χρήση του τυπολογίου και γνωστής ιδιότητας των δυνάμεων. Άρα $P(Y \geq 10) = \sum_{i=10}^{20} \binom{20}{i} \cdot 0,5^{20} = 0,5^{20} \cdot \sum_{i=10}^{20} \binom{20}{i}$.

Θ.3 (Βλ. και λύση Άσκησης 1 Κεφ. 6 βιβλίου σελ. 461).

(i) Επειδή το p είναι άγνωστο θεωρούμε προσωρινά ότι $p = 0,5$. Επιπλέον $a = 0,05 \Rightarrow \frac{a}{2} = 0,025$. Άρα $n = \frac{z_{0,025}^2 \cdot 0,5 \cdot (1-0,5)}{e^2} = 600$ με εφαρμογή γνωστού τύπου (Βλ. Τυπολόγιο).

(ii) Το ζητούμενο διάστημα εμπιστοσύνης είναι το $(0,2 - 1,96 \cdot 0,0163\ ,\ 0,2 + 1,96 \cdot 0,0163) \simeq (0,2 - 0,0319\ ,\ 0,2 + 0,0319) = (0,1681\ ,\ 0,2319)$. Η πιθανότητα το διάστημα αυτό να περιέχει το πραγματικό πληθυσμιακό ποσοστό είναι εξ ορισμού 95%. Το μέγεθος του σφάλματος είναι περίπου 3,2% (Βλ. Τυπολόγιο).