ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΟΔΗΓΟΥ ΜΕΛΕΤΗΣ 4

Α. ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ - ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ - ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

1 Ισχύει ότι $P(A\cup B) = P(A)+P(B) - P(A\cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - P(A\cap B) = \frac{5}{4} - P(A\cap B)$ (1)

Οπότε θα υπολογίσουμε φράγματα για την ποσότητα $P(A\cap B)$. Παρατηρούμε ότι $A\cap B \subseteq B \Rightarrow P(A\cap B) \leq P(B) = \frac{3}{4}$ (2)

Επιπλέον $P(A\cup B) \leq 1 \Rightarrow \frac{5}{4} - P(A\cap B) \leq 1 \Rightarrow P(A\cap B) \geq \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$ (3). Από (2) και (3) προκύπτει το ζητούμενο.

---

2 (i) $A\cap B = \varnothing \Rightarrow P(A\cup B) = P(A)+P(B) \Rightarrow P(B) = P(A\cup B) - P(A) = 0,8 - 0,7 = 0,1$

(ii) $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$. Άρα $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\cdot P(B) \Rightarrow 0,8 = 0,7 + P(B) - 0,7\cdot P(B) \Rightarrow 0,8 - 0,7 = 0,3\cdot P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$

3 (i). Επειδή A, B ανεξάρτητα ενδεχόμενα ισχύει ότι $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$. Έχουμε ότι $P(A\cap B^c) = P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$ $= P(A) - P(A)\cdot P(B) = P(A)\cdot[1-P(B)] =$ $P(A)\cdot P(B^c)$. Άρα τα A, B^c ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

(ii). $P(A^c\cap B) = P(B-A) = P(B) - P(B\cap A)$ $= P(B) - P(B)\cdot P(A) = P(B)\cdot[1-P(A)]$ $= P(B)\cdot P(A^c)$. Άρα τα A^c, B είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

(iii). $P(A^c\cap B^c) = P[(A\cup B)^c] = 1 - P(A\cup B)$ $= 1 - [P(A) + P(B) - P(A\cap B)] = 1 - P(A)$ $- P(B) + P(A\cap B) = [1-P(A)] - P(B) +$ $P(A)\cdot P(B) = P(A^c) - P(B)\cdot[1-P(A)] =$ $= P(A^c) - P(B)\cdot P(A^c) = P(A^c)\cdot[1-P(B)]$ $= P(A^c)\cdot P(B^c)$. Άρα τα A^c, B^c είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

(σελ. 455 - 456 βιβλίο). (3)

(4) 1. Έστω το ενδεχόμενο A: μια γυναίκα εργάζεται. Τότε $N(A) = 200$ ενώ $N(\Omega) = 300$

Άρα $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{200}{300} = \dfrac{2}{3}$

2. Έστω το ενδεχόμενο B: μια γυναίκα δεν έχει παιδιά. Τότε, από τον πίνακα διπλής εισόδου, έχουμε ότι $N(B) = 85$. Άρα

$P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{85}{300} = \dfrac{5 \cdot 17}{5 \cdot 60} = \dfrac{17}{60}$.

3. Έστω το ενδεχόμενο Γ: μια γυναίκα έχει παιδιά. Τότε $\Gamma = B^c \Rightarrow P(\Gamma) = P(B^c)$ $= 1 - P(B) = 1 - \dfrac{17}{60} = \dfrac{43}{60}$.

Εναλλακτικά

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Γ_i: η γυναίκα έχει i παιδιά, $i = 1, 2, 3$, Γ_4: η γυναίκα έχει ≥ 4 παιδιά. Τα Γ_i είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους και $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i \Rightarrow P(\Gamma) = P\left(\bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(\Gamma_i)$ (1). $N(\Gamma_1) = 95 \Rightarrow P(\Gamma_1) = \dfrac{N(\Gamma_1)}{N(\Omega)}$ $= \dfrac{95}{300}$, $N(\Gamma_2) = 90 \Rightarrow P(\Gamma_2) = \dfrac{90}{300}$, (4

$N(\Gamma_3) = 25 \Rightarrow P(\Gamma_3) = \frac{25}{300}$, $N(\Gamma_4) = 5$ $\Rightarrow P(\Gamma_4) = \frac{5}{300}$. Απο (1) και τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι $P(\Gamma) = \frac{95}{300} + \frac{90}{300} + \frac{25}{300} + \frac{5}{300} = \frac{95+90+25+5}{300} = \frac{215}{300} = \frac{5 \cdot 43}{5 \cdot 60} =$

$\frac{43}{60}$

4. Εστω Δ: μια γυναίκα έχει περισσότερα από 2 παιδιά. Τότε $\Delta = \bigcup_{i=3}^{4} \Gamma_i$ (δες προηγούμενο) και άρα $P(\Delta) = P(\bigcup_{i=3}^{4} \Gamma_i) = P(\Gamma_3) + P(\Gamma_4) = \frac{25}{300} + \frac{5}{300} = \frac{30}{300} = \frac{1}{10}$

5. Εστω Ε: μια γυναίκα δεν εργάζεται. Τότε $E = A^c$ (βλ. 1.) $\Rightarrow P(E) = P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Επίσης απο το 2. $P(B) = \frac{17}{60}$. Ζητάμε την $P(E \cup B) = P(A^c \cup B) = P(A^c) + P(B) - P(A^c \cap B) =$

$= \frac{1}{3} + \frac{17}{60} - P(A^c \cap B)$. Από τον πίνακα διπλής εισόδου έχουμε ότι $N(A^c \cap B) = 5$

$\Rightarrow P(A^c \cap B) = \frac{5}{300} = \frac{5}{5 \cdot 60} = \frac{1}{60}$.

Άρα $P(A^c \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{17}{60} - \frac{1}{60} = \frac{20}{60} + \frac{17}{60} - \frac{1}{60} = \frac{36}{60} = \frac{3 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{3}{5}$

6. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου μια γυναίκα να μην έχει παιδιά ενώ εργάζεται δηλ. την δεσμευμένη πιθανότητα $P(B|A)$ (δες τα 1., 2. σχετικά) Ισχύει ότι $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{80}{300}}{\frac{2}{3}}$

$= \frac{3 \cdot 80}{2 \cdot 300} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

7. Ζητάμε την $P(A \cap \Gamma_2)$ (δες τα 1., 3. για τον συμβολισμό των ενδεχομένων). Από τον πίνακα διπλής εισόδου έχουμε ότι $N(A \cap \Gamma_2) = 40 \Rightarrow$

$P(A \cap \Gamma_2) = \frac{N(A \cap \Gamma_2)}{N(\Omega)} = \frac{40}{300} = \frac{2 \cdot 20}{15 \cdot 20} = \frac{2}{15}$.

5 Έστω το ενδεχόμενο A: επιλέγουμε 1 τουλάχιστον γυναίκα. Ζητάμε την $P(A) = 1 - P(A^c)$ (1). Αρχικά παρατηρούμε ότι $N(\Omega) = \binom{40}{5}$ = όλες οι δυνατές πεντάδες από τους 40 υπαλλήλους (δε μας ενδιαφέρει η σειρά εμφάνισης των ατόμων). Επιπλέον $N(A^c) = \binom{30}{5}$ = όλες οι δυνατές πεντάδες από τους 30 άνδρες υπαλλήλους αφού στο A^c δεν επιλέγεται καμία γυναίκα. Απο (1) και τα προηγούμενα έχουμε ότι

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{30}{5}}{\binom{40}{5}} =$$

$$1 - \frac{\frac{30!}{5!\cdot(30-5)!}}{\frac{40!}{5!\cdot(40-5)!}} = 1 - \frac{\frac{30!}{5!\cdot 25!}}{\frac{40!}{5!\cdot 35!}} =$$

$$= 1 - \frac{30!\cdot 5!\cdot 35!}{40!\cdot 5!\cdot 25!} = 1 - \frac{35!\cdot 30!}{40!\cdot 25!} =$$

$$= 1 - \frac{\cancel{35!}\cdot\cancel{25!}\cdot 26\cdot 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{\cancel{35!}\cdot 36\cdot 37\cdot 38\cdot 39\cdot 40\cdot\cancel{25!}} =$$

$$= 1 - \frac{26\cdot 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{36\cdot 37\cdot 38\cdot 39\cdot 40} = 1 - \frac{5.307.120}{78.960.960}$$

$\simeq 1 - 0,067 = 0,933$ ή $93,3\%$ περίπου

Εναλλακτικά μπορούμε να θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα A_i: επιλέγουμε ακριβώς i γυναίκες, $i = 1,2,3,4,5$. Τότε $A = \bigcup_{i=1}^{5} A_i$ οπότε $P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{5} A_i) = \sum_{i=1}^{5} P(A_i)$ δεδομένου ότι τα A_i είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους. Τα υπόλοιπα αφήνονται για τον αναγνώστη.

---

(6) Ο δ.χ. είναι ο $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \dots, (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow N(\Omega) = 6\cdot 6 = 36$ (δηλ. 6 επιλογές για την πρώτη ρίψη και για καθεμιά από αυτές αντιστοιχούν 6 επιλογές για την δεύτερη ρίψη)

(i) Έστω το ενδεχόμενο A: μια ακριβώς ρίψη είναι 5. Τότε $A = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (6,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6)\}$

$\Rightarrow N(A) = 10$. Ζητάμε την $P(A) =$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{2\cdot 5}{2\cdot 18} = \frac{5}{18}$$

(ii) Έστω το ενδεχόμενο B: Το άθροισμα των ρίψεων είναι > 9. Τότε $B = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow$ $N(B) = 6$. Ζητάμε την $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Όμως $A\cap B = \{(5,6), (6,5)\} \Rightarrow N(A\cap B) = 2 \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Τελικά

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{6}{36}} = \frac{36}{6\cdot 18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

---

7 Έστω τα ενδεχόμενα A: ο υποψήφιος είναι άνδρας, Γ: ο υποψήφιος είναι γυναίκα, Π: ο υποψήφιος προσλήφθηκε. Τότε από τον πίνακα διπλής εισόδου έχουμε ότι

$N(\Pi\cap\Gamma) = 230$, $N(\Gamma) = 330$, $N(A) = 90$,

$N(\Omega) = N(A) + N(\Gamma) = 330 + 90 = 420$.

Άρα $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{90}{420}$, $P(\Gamma) = \frac{330}{420}$,

$P(\Pi \cap \Gamma) = \frac{230}{420}$.

(i) Ζητάμε την $P(\Pi / \Gamma) = \frac{P(\Pi \cap \Gamma)}{P(\Gamma)} =$

$= \frac{\frac{230}{420}}{\frac{330}{420}} = \frac{230}{330} = \frac{23}{33}$

(ii) $P(\Pi | A) = \frac{P(\Pi \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{N(\Pi \cap A)}{N(\Omega)}}{P(A)} =$

$= \frac{\frac{65}{420}}{\frac{90}{420}} = \frac{65}{90} = \frac{65+9}{90+9} = \frac{74}{99}$.

Απο το (i) έχουμε ότι $P(\Pi | \Gamma) = \frac{23}{33} =$

$\frac{3 \cdot 23}{3 \cdot 33} = \frac{69}{99} < \frac{74}{99} = P(\Pi | A)$. Δηλ. η πιθανότητα να προσλήφθηκε κάποιος δεδομένου ότι ήταν άνδρας είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη πιθανότητα πρόσληψης ενώ ήταν γυναίκα και άρα η κατηγορία ευσταθεί.

Β. ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ.

① (i) Έστω X ο αριθμός των επιτυχημένων βολών στις 5. Τότε $X \sim b(5, 0{,}30)$

Άρα $f_X(x) = \binom{5}{x} \cdot 0{,}30^x \cdot (1-0{,}30)^{5-x} =$

$\binom{5}{x} \cdot 0{,}30^x \cdot 0{,}70^{5-x}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(α) $f_X(5) = P(X=5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}30^5 \cdot 0{,}70^0$

$= 0{,}30^5 \simeq 0{,}0024$ ή περίπου $2{,}4\%$

(η ακριβής τιμή είναι $0{,}00243$)

(β) $f_X(0) = P(X=0) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}30^0 \cdot 0{,}70^5$

$= 0{,}70^5 \simeq 0{,}1681$ ή περίπου $16{,}8\%$

(η ακριβής τιμή είναι $0{,}16807$)

(γ) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X=0)$
$+ P(X=1)] = 1 - (0{,}1681 + 0{,}3602) =$
$1 - 0{,}5283 = 0{,}4717$ ή περίπου $47{,}2\%$

όπου χρησιμοποιήσαμε τους πίνακες της διωνυμικής κατανομής.

(ii) Ο αναμενόμενος αριθμός των επιτυχημένων βολών ισούται με τη μέση τιμή της διωνυμικής κατανομής $\mu_X = \nu \cdot p = 5 \cdot 0{,}30 = 1{,}5$.

---

(2) βλ. σελ. 456-457 βιβλίο.

---

(3) Η πιθανότητα ένας υπολογιστής να είναι ελαττωματικός είναι $p = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} = 0{,}10$

Έστω X ο αριθμός των ελαττωματικών υπολογιστών στους 4. Τότε $X \sim b(4, 0{,}10)$.

(i). $P(X=2) = 0{,}0486$ ή περίπου 4,9% με χρήση πινάκων της διωνυμικής κατανομής.

(ii) $P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - (0{,}6561 + 0{,}2916) = 1 - 0{,}9477 = 0{,}0523$ ή περίπου 5,2%.

Σημείωση: Και στα δύο ερωτήματα αντί να χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες της διωνυμικής κατανομής μπορούμε να κάνουμε απευθείας αντικαταστάσεις στη συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής και να κάνουμε υπολογισμούς.

Γ. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

1 (i). $P(X>200) = 1 - P(X \leq 200)$

$= 1 - P\left(\frac{X-200}{16=\sqrt{256}} \leq \frac{200-200}{16} \right) =$

$1 - P(Z \leq 0) = 1 - \Phi(0) = 1 - 0,5 = 0,5$

ή 50%.

(ii) $P(X<216) = P(X \leq 216)$ (δεδομένου ότι η X είναι συνεχής Τ.Μ.)

$= P\left(\frac{X-200}{16} \leq \frac{216-200}{16} \right) = P(Z \leq 1) =$

$\Phi(1) = 0,84134$ ή περίπου 84,1% με χρήση πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

(iii) Έστω τα ενδεχόμενα $A = (184 < X < 216)$ $B = (X > 168)$. Ζητάμε την $P(A|B) =$

$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Όμως $A \cap B = A \Rightarrow P(A|B) =$

$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(184 < X < 216)}{P(X > 168)} = \frac{P(184 < X \leq 216)}{1 - P(X \leq 168)}$

$$= \frac{P(X \leq 216) - P(X \leq 184)}{1 - P(X \leq 168)} =$$

$$\frac{P\left(\frac{X-200}{16} \leq \frac{216-200}{16}\right) - P\left(\frac{X-200}{16} \leq \frac{184-200}{16}\right)}{1 - P\left(\frac{X-200}{16} \leq \frac{168-200}{16}\right)} =$$

$$\frac{P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1)}{1 - P(Z \leq -2)} = \frac{\Phi(1) - \Phi(-1)}{1 - \Phi(-2)}$$

$$= \frac{0{,}84134 - 0{,}15866}{1 - 0{,}02275} = \frac{0{,}68268}{0{,}97725} \simeq 0{,}698$$

57 ή περίπου 69,9%

---

(2) Αρχικά, από τα δεδομένα του πίνακα, υπολογίζουμε τον μέσο και τη διασπορά.
Έχουμε ότι: $\mu_X = \frac{150 \cdot 100 + 250 \cdot 230 + 350 \cdot 380 + 450 \cdot 200 + 550 \cdot 90}{1000}$

$$= \frac{345.000}{1.000} = 345$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{999} \cdot \left(100 \cdot 150^2 + 230 \cdot 250^2 + 380 \cdot 350^2 + 200 \cdot 450^2 + 90 \cdot 550^2\right.$$

$-1000 \cdot 345^2) \simeq 11.886,89 \Rightarrow \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} \simeq$ 109,03. Άρα $X \sim N(345,\ 11.886,89)$.

Ζητάμε την $P(X > 345) = 1 - P(X \leq 345)$

$= 1 - P\left(\frac{X-345}{109,03} \leq \frac{345-345}{109,03}\right) =$

$1 - P(Z \leq 0) = 1 - \Phi(0) = 1 - 0,5 = 0,5$

ή 50%.

---

3 σελ. 458-459 βιβλίο.

---

4 (σελ. 460-461 βιβλίο)

Έστω X ο χρόνος καθυστέρησης των αναχωρήσεων (σε λεπτά). Τότε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Από υπόθεση έχουμε ότι $P(X \leq 25) = 0,841$

$\Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0,841 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{25-\mu}{\sigma}\right)$

$= 0,841 \Rightarrow \Phi\left(\frac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0,841$. Από τους πίνακες της τυποποιημένης κανονικής κατανομής προκύπτει κατά προσέγγιση ότι $\Phi(1) = 0,841$ (η ακριβής τιμή είναι 0,84134). Άρα

$$\frac{25-\mu}{\sigma}=1 \Rightarrow 25-\mu=\sigma \Rightarrow \mu+\sigma=25 \quad (1)$$

Όμοια, $P(X \le 15{,}8)=0{,}20 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{15{,}8-\mu}{\sigma}\right)=0{,}20 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{15{,}8-\mu}{\sigma}\right)=0{,}20$

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{15{,}8-\mu}{\sigma}\right)=0{,}20$. Από τους πίνακες της τυποποιημένης κανονικής κατανομής προκύπτει κατά προσέγγιση ότι $\Phi(-0{,}84)=0{,}20$ (η ακριβής τιμή είναι $0{,}20045$).

Άρα $\frac{15{,}8-\mu}{\sigma}=-0{,}84 \Rightarrow 15{,}8-\mu=-0{,}84\sigma$

$\Rightarrow \mu-0{,}84\sigma=15{,}8 \quad (2)$. Οι (1), (2) αποτελούν ένα 2×2 γραμμικό σύστημα ως προς μ, σ με λύση $(\mu,\sigma)=(20,5)$.