# Η ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

**Ορισμός 1** Αν $X$ συμβολίζει τον αριθμό των επιτυχιών στις $n$ επαναλήψεις ενός διωνυμικού πειράματος (όπου δε μας ενδιαφέρει η σειρά εμφάνισής τους αλλά μόνο το πλήθος τους), τότε λέμε ότι η $X$ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n, p$ και συμβ. $X \sim b(n,p)$ όπου $p$ η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε επανάληψη του πειράματος.

**Πρόταση 1** Έστω ότι $X \sim b(n,p)$. Τότε:

(i) $f_X(k) = P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, $k=0,1,\ldots,n$

(ii) $F_X(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$, $k=0,1,\ldots,n$.

(iii) $E(X) = n \cdot p$

(iv) $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$.

---

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

2

(1) Μια βιομηχανία υποστηρίζει ότι μόνο το 10% ενός προϊόντος μαζικής παραγωγής είναι εκτός προδιαγραφών (δηλ. ελαττωματικό). Επιλέγουμε τυχαία 10 μονάδες προϊόντος. Αν σ' αυτές βρεθούν 2 ή περισσότερες ελαττωματικές τότε απορρίπτουμε τον ισχυρισμό της βιομηχανίας.

(i) Ποια είναι η πιθανότητα να απορρίψουμε τον ισχυρισμό;

(ii) Ποια είναι η πιθανότητα να αποδεχθούμε τον ισχυρισμό αν και στην πραγματικότητα το 20% της παραγωγής είναι ελαττωματικό;

Λύση (i) Έστω $X$ ο αριθμός των ελαττωματικών μονάδων προϊόντος στις 10. Τότε $X \sim b(10,p)$, όπου $p=0,1$ ή 10%. Για να απορρίψουμε τον ισχυρισμό της βιομηχανίας θα πρέπει να βρούμε τουλάχιστον 2 ελαττωματικές μονάδες προϊόντος στις 10. Άρα ζητάμε την $P(1<X\leq 10) = P(X\leq 10) - P(X\leq 1) = 1 - P(X\leq 1) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$. Μπορούμε να κάνουμε απευθείας

τους υπολογισμούς ή να χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες της διωνυμικής κατανομής. Έχουμε ότι $P(X=0)=0,3487$, $P(X=1)=0,3874$ και άρα $P(1<X\leq 10)=1-0,3487-0,3874=0,2639\simeq 0,264$ ή $26,4\%$.

(ii) Έστω πάλι $X$ ο αριθμός των ελαττωματικών μονάδων στις 10. Τότε $X\sim b(10,p)$ όπου $p=0,20$ τώρα. Θα αποδεχθούμε τον ισχυρισμό όταν στις 10 μονάδες προϊόντος βρεθούν 0 ή 1 ελαττωματικές. Άρα $P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=0,1074+0,2684=0,3758\simeq 0,376$ ή $37,6\%$.

---

(2) Πόσα παιδιά πρέπει να έχει μια οικογένεια ώστε με πιθανότητα 95% να έχει τουλάχιστον 1 αγόρι και τουλάχιστον 1 κορίτσι;

Λύση Έστω $n\in\mathbb{N}$ ο αριθμός των παιδιών της οικογένειας και $X$ ο αριθμός των αγοριών. Τότε $X\sim b(n,\frac{1}{2})$. Από υπόθεση $P(1\leq X\leq n-1)=0,95 \Rightarrow 1-P(X=0)-$

$P(X=n)=0,95 \Rightarrow 1-\binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-0}$

$-\binom{n}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-n}=0,95 \Rightarrow$

$1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n=0,95 \Rightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n=0,95 \Rightarrow 1-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=0,95 \Rightarrow$

$\frac{1}{2^{n-1}}=1-0,95=0,05 \Rightarrow 2^{n-1}=\frac{1}{0,05}$

$\Rightarrow \ln 2^{n-1}=\ln\left(\frac{1}{0,05}\right) \Rightarrow (n-1)\cdot\ln 2=$

$\ln 1-\ln(0,05) \Rightarrow (n-1)\cdot 0,69=0-(-3)$

$\Rightarrow n-1=\frac{3}{0,69}\simeq 4 \Rightarrow n\simeq 4+1=5.$

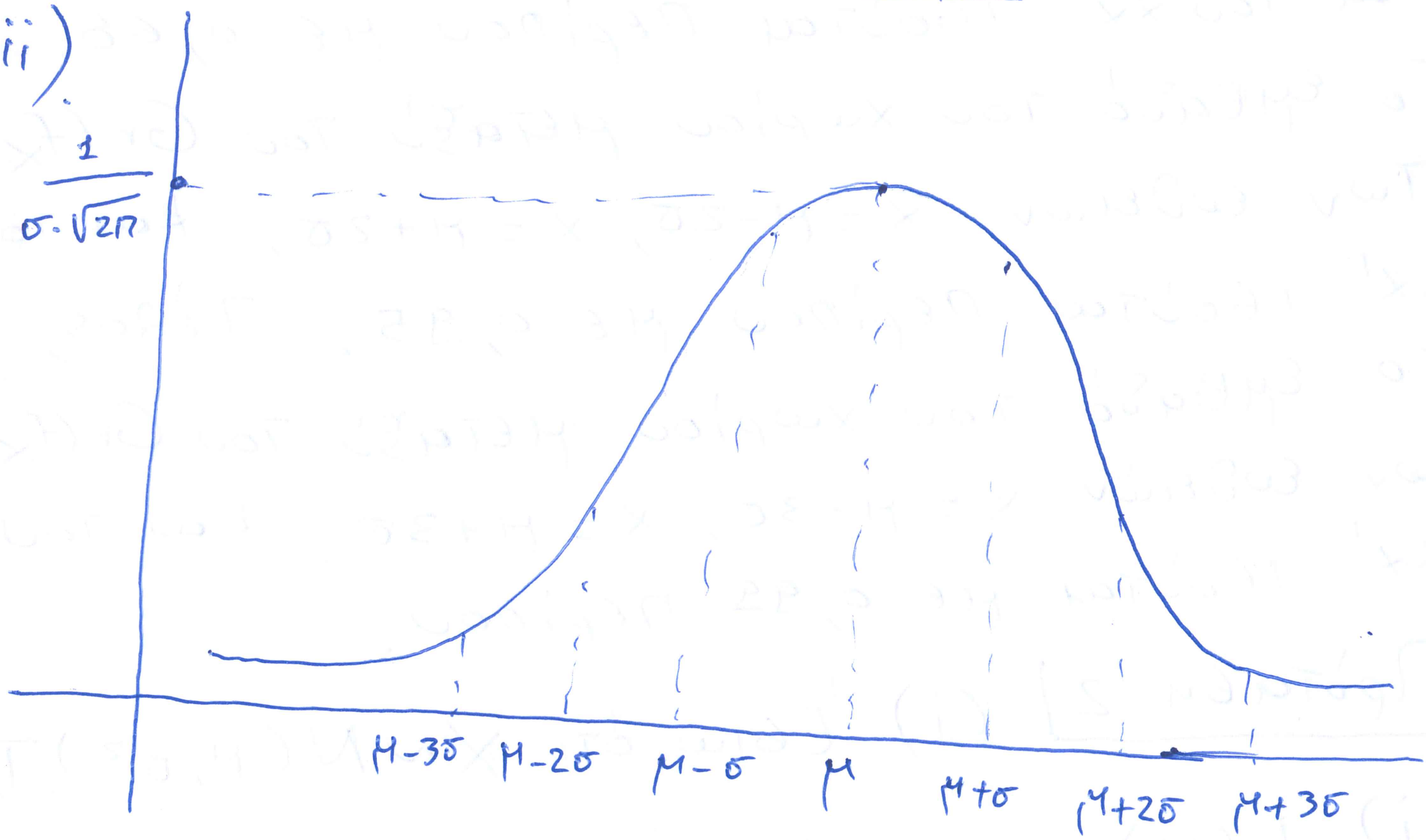
---

## Η ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

**Ορισμός 2** Λέμε ότι η συνεχής τ.μ. $X$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu,\sigma^2$ συμβ. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ αν η σ.π. της $X$ ισούται με $f_X(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

<u>Παρατήρηση 1</u> (i) Η κανονική κατανομή χρησιμοποιείται ως πιθανοτικό πρότυπο για πολλά συνεχή χαρακτηριστικά που τείνουν να παρουσιάζουν συμμετρία γύρω από μία τιμή όπως το βάρος ή το ύψος ατόμων, το μήκος εξαρτημάτων, η θερμοκρασία, η υγρασία, οι βαθμοί συγκέντρωσης και οξύτητας χημικών διαλυμάτων κ.ά. Λέμε τότε ότι το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό ακολουθεί τον <u>κανονικό νόμο</u>.

(ii)




Το γράφημα της $f_X(x)$ συμβ. $Gr(f_X)$ που ονομάζεται και <u>κανονική καμπύλη</u> ή <u>καμπάνα του Gauss</u> έχει τις εξής ιδιότητες:

(6)

(α) Είναι συμμετρική περί την ευθεία $x=\mu$.

(β) Στο σημείο $x_0=\mu$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f_X(x_0) = \dfrac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}$.

(γ) Τα σημεία $\mu-\sigma$, $\mu+\sigma$ είναι σημεία καμπής και ο άξονας $xx'$ οριζόντια ασύμπτωτη.

(δ) Το εμβαδό του χωρίου μεταξύ του $Gr(f_X)$, των ευθειών $x=\mu-\sigma$, $x=\mu+\sigma$, και του $xx'$ ισούται περίπου με 0,68. Το εμβαδό του χωρίου μεταξύ του $Gr(f_X)$, των ευθειών $x=\mu-2\sigma$, $x=\mu+2\sigma$, και του $xx'$ ισούται περίπου με 0,95. Τέλος, το εμβαδό του χωρίου μεταξύ του $Gr(f_X)$, των ευθειών $x=\mu-3\sigma$, $x=\mu+3\sigma$, και του $xx'$ ισούται με 0,99 περίπου.

<u>Πρόταση 2</u>. Έστω ότι $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. Τότε:

(i) $E(X)=\mu$, $V(X)=\sigma^2$

(ii) Η τ.μ. $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$. Η $N(0,1)$ ονομάζεται <u>τυποποιημένη κανονική κατανομή</u>.

Η σ.π. της $N(0,1)$ είναι η $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$, $z \in \mathbb{R}$ και η σ.κ. αυτής είναι η $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $z \in \mathbb{R}$. Η $F_Z(z)$ συμβ. και με $\underline{\Phi(z)}$ και ισχύει ότι $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) = 1 - P(Z \leq z) = P(Z > z)$ $\forall z \in \mathbb{R}$. Οι τιμές της $\Phi(z)$ δίνονται από πίνακες.

(iii) Για τη $N(0,1)$ το $Q_1$ αντιστοιχεί σε $z = -0{,}67$, το $Q_2$ αντιστοιχεί σε $z = 0$ και το $Q_3$ αντιστοιχεί σε $z = 0{,}67$.

---

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1 Το ύψος των ανδρών ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\mu = 1{,}70\,m$ και $\sigma = 0{,}05\,m$. Να υπολογισθεί η πιθανότητα επιλέγοντας τυχαία έναν άνδρα αυτός να είναι ψηλότερος από $\underline{1{,}80\,m}$.

Λύση $P(X > 1{,}80) = P\left(\frac{X - 1{,}70}{0{,}05} > \frac{1{,}80 - 1{,}70}{0{,}05}\right)$

$= P\left(Z > \frac{0,10}{0,05}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2)$

$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0,97725 = 0,02275 \simeq$

$0,023$ ή $2,3\%$.

---

(2). Ένας πληθυσμός είναι κανονικά κατανεμημένος με $\mu = 50$, $\sigma = 10$. Να βρεθούν τα $Q_1, Q_2, Q_3$, IR, QD.

Λύση

Έστω ότι $x = Q_1$. Τότε $Z = \frac{Q_1 - \mu}{\sigma}$

$= -0,67 \Rightarrow \frac{Q_1 - 50}{10} = -0,67 \Rightarrow Q_1 - 50$

$= -6,7 \Rightarrow Q_1 = 50 - 6,7 = 43,3$

Έστω ότι $x = Q_2$. Τότε αφού η κατανομή είναι κανονική $50 = \mu = Q_2$.

Έστω ότι $x = Q_3$. Τότε $\frac{Q_3 - \mu}{\sigma} = 0,67 \Rightarrow$

$\frac{Q_3 - 50}{10} = 0,67 \Rightarrow Q_3 - 50 = 6,7 \Rightarrow Q_3 = 50 + 6,7$

$= 56,7$. Άρα $IR = Q_3 - Q_1 = 56,7 - 43,3$

$= 13,4 \Rightarrow QD = \frac{IR}{2} = \frac{13,4}{2} = 6,7$

---