ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ - ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Ορ. 1 Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου Β δεδομένου ότι έχει πραγματοποιηθεί ένα άλλο ενδεχόμενο Α ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα του Β, συμβ. $P(B|A)$ και ισχύει ότι

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}} \quad (1), \quad P(A) \neq 0.$$

Παρδ. 1 Ρίχνουμε ένα ζάρι 2 φορές. Αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των ενδείξεων είναι 5, να υπολογισθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου η μία από τις ρίψεις να είναι 3.

Λύση Έστω Α το ενδεχόμενο το άθροισμα των ενδείξεων να είναι 5 και Β το ενδεχόμενο η μια από τις δύο ρίψεις να είναι 3. Ζητάμε την $P(B|A)$

(2

Απο (1) έχουμε ότι $P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$

Ο δ.χ. είναι ο $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), \ldots, (2,6), \ldots, (6,1), (6,2), (6,3), \ldots, (6,6)\}$ οπότε $N(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$. Το $A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$ οπότε $N(A) = 4$. Το $B\cap A = \{(2,3), (3,2)\}$ οπότε $N(B\cap A) = 2$.

Άρα $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$,

$P(B\cap A) = \frac{N(B\cap A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Άρα $P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ ή 50%.

Ορ.2 Δύο ενδεχόμενα A, B ονομάζονται <u>στοχαστικά</u> ή <u>στατιστικά ανεξάρτητα</u> ή απλά ανεξάρτητα αν $\boxed{P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)}$ (2)

Παρατήρηση | (i) Ο τύπος (2) προέρχεται από τον τύπο (1) του προηγούμενου ορισμού. Πράγματι αν τα A, B είναι ανεξάρτητα αυτό σημαίνει ότι η πραγματοποίηση ενός από τα δύο δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του άλλου. Άρα

$P(B|A) = P(B) \Rightarrow P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A)$

(ii) Ο τύπος (2) ονομάζεται και πολλαπλασιαστικός νόμος ή πολλαπλασιαστική ιδιότητα.

Παράδ. 2 | Ρίχνουμε ένα ζάρι 2 φορές και έστω A το ενδεχόμενο να έρθει 1 στην πρώτη ρίψη και B το ενδεχόμενο να έρθει 6 στη δεύτερη ρίψη. Να εξετασθεί η ανεξαρτησία των A, B.

Λύση | $N(\underline{\Omega}) = 36$. $A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\} \Rightarrow N(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{N(A)}{N(\underline{\Omega})} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. $B = \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6)\} \Rightarrow N(B) = 6 \Rightarrow$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$$A \cap B = \{(1,6)\} \Rightarrow N(A \cap B) = 1 \Rightarrow$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$$

και άρα τα A, B είναι ανεξάρτητα.

<u>Ορ. 3</u> (i) Έστω $A \neq \emptyset$, σύνολο με n $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ διακεκριμένα στοιχεία και $k \in \mathbb{N}$ ώστε $0 \leq k \leq n$. <u>Συνδυασμός των n στοιχείων του A ανά k</u> ονομάζεται κάθε υποσύνολο του **A** με k διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία όπου δε μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία τα παίρνουμε. Κάθε τέτοιο σύνολο συμβολίζεται με $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$

(ii) Το πλήθος των συνδυασμών των n ανά k συμβ. $\binom{n}{k}$ ή C^n_k και ισχύει ο τύπος

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}} \quad (3),$$ όπου $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

$0 \leq k \leq n$.

$0! = 1! = 1$, $n! = (n-1)! \cdot n$

Αν $k > n$ τότε $\binom{n}{k} = 0$.

Προβλ.3 (Εφαρμογή του ορισμού) Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω για τα οποία ισχύει:
$P(A)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{1}{9}$, $P(A|B)=\frac{1}{4}$.
Να υπολογισθούν οι πιθανότητες:
(i) $P(A\cap B)$ (ii) $P(A\cup B)$ (iii) $P(B|A^c)$

Λύση (i) Ισχύει ότι $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{36}$.

(ii) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow$
$P(A\cup B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{36}=\frac{24}{36}+\frac{4}{36}-\frac{1}{36}=$
$\frac{27}{36}=\frac{3\cdot 9}{4\cdot 9}=\frac{3}{4}$

(iii) $P(B|A^c)=\frac{P(B\cap A^c)}{P(A^c)}=\frac{P(B-A)}{1-P(A)}=$
$\frac{P(B)-P(B\cap A)}{1-P(A)}=\frac{\frac{1}{9}-\frac{1}{36}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{4}{36}-\frac{1}{36}}{\frac{1}{3}}$
$=\frac{\frac{3}{36}}{\frac{12}{36}}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

Προβλ. 4) Μια τετραμελής επιτροπή θα σχηματισθεί από ένα σύνολο 5 φοιτητών και 5 φοιτητριών. Αν όλοι/ες έχουν την ίδια πιθανότητα να επιλεγούν, ποιά είναι η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 3 φοιτητές στην επιτροπή;
(Σημείωση: δε μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής).

Λύση) Έστω το ενδεχόμενο A: υπάρχουν τουλάχιστον 3 φοιτητές στην επιτροπή.
Τότε $A = A_1 \cup A_2$, όπου A_1: υπάρχουν ακριβώς 3 φοιτητές στην επιτροπή, A_2: υπάρχουν ακριβώς 4 φοιτητές στην επιτροπή.
Άρα $P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ δεδομένου ότι $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Το σύνολο των φοιτητών/τριών είναι $5+5=10$. Επομένως υπάρχουν $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{\cancel{6!} \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{\cancel{6!} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$ διαφορετικές τετραμελείς επιτροπές. Άρα $N(\Omega) = 210$.

Για το A_1: υπάρχουν $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} =$

$= \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 1\cdot 2} = 10$ τρόποι να επιλεχθούν οι 3 φοιτητές από τους 5. Για καθένα από τους τρόπους αυτούς υπάρχουν

$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!\cdot(5-1)!} = \frac{5!}{4!\cdot 1} = \frac{4!\cdot 5}{4!} = 5$

τρόποι να επιλεχθεί μια φοιτήτρια από τις 5. Άρα $N(A_1) = 10\cdot 5 = 50$ $\Rightarrow$

$P(A_1) = \frac{N(A_1)}{N(\Omega)} = \frac{50}{210} \simeq 0{,}24$ ή 24%.

<u>Για το A_2</u>: Η επιτροπή δε θα περιλαμβάνει φοιτήτρια, οπότε υπάρχουν $\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\cdot(5-4)!} =$

$= \frac{5!}{4!} = \frac{\cancel{4!}\cdot 5}{\cancel{4!}} = 5$ τρόποι επιλογής των 4 φοιτητών από τους 5. Άρα $N(A_2) = 5$

$\Rightarrow P(A_2) = \frac{N(A_2)}{N(\Omega)} = \frac{5}{210} \simeq 0{,}02$ ή 2%.

Άρα $P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}24 + 0{,}02 = 0{,}26$ ή 26%.