ΟΔΗΓΟΣ ΜΕΛΕΤΗΣ 4

(Οι παράγραφοι και οι σελίδες αντιστοιχούν στην τελευταία 4η έκδοση του βιβλίου του μαθήματος)

ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ 4-5

1) Να αναπτύξουμε τις βασικές έννοιες των πιθανοτήτων και να εξηγήσουμε την ερμηνεία τους με παραδείγματα από την επιχειρηματική δραστηριότητα.

2) Να περιγράψουμε τα είδη των τυχαίων μεταβλητών και να δείξουμε πώς αντιμετωπίζουμε επιχειρηματικά προβλήματα με τη βοήθεια των κατανομών.

3) Να περιγράψουμε και να μελετήσουμε, μέσα από παραδείγματα, την διωνυμική κατανομή.

4) Να περιγράψουμε την κανονική κατανομή και να δείξουμε με πραγματικά παραδείγματα την χρησιμότητά της.

ΘΕΩΡΙΑ

Σελ. 78-96 (έως την κατανομή Poisson), σελ. 104-109 (+τον πίνακα της σελ. 110) , διαφάνειες του βιβλίου (eclass), σημειώσεις του διδάσκοντα (eclass).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΛΥΘΗΚΑΝ

Όποια λυμένη άσκηση περιέχεται στις παραπάνω σελίδες του βιβλίου, τα λυμένα παραδείγματα στις διαφάνειες του βιβλίου (eclass), τις λυμένες ασκήσεις στις χειρόγραφες σημειώσεις του διδάσκοντα (eclass).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. (i) Τι ονομάζουμε πείραμα τύχης ή στοχαστικό πείραμα; Ποιός κλάδος των μαθηματικών ασχολείται με τη μελέτη των πειραμάτων τύχης;

(ii) Ποιά είναι τα δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις ενός πειράματος τύχης και τι ονομάζουμε δειγματικό χώρο αυτού;

(iii) Τι ονομάζουμε ευνοϊκές περιπτώσεις ενός ενδεχομένου και πότε λέμε ότι ένα ενδεχόμενο πραγματοποιείται ή συμβαίνει;

(iv) Δώστε τον ορισμό του βέβαιου και του αδύνατου ενδεχομένου.

(v) Πότε δύο ενδεχόμενα ονομάζονται ασυμβίβαστα ή αμοιβαία αποκλειόμενα; Πότε δύο ενδεχόμενα ονομάζονται ανεξάρτητα; Μπορούν δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα να είναι και ανεξάρτητα;

2. (i) Αναφέρετε τις κυριότερες πράξεις με ενδεχόμενα και δώστε την ερμηνεία τους. Αναπαραστήσετε σχηματικά με διαγράμματα Venn.

(ii) Αναφέρετε τους κυριότερους κανόνες λογισμού ενδεχομένων. Αναπαραστήσετε σχηματικά με διαγράμματα Venn.

3. (i) Δώστε τους τρείς κυριότερους ορισμούς της έννοιας της πιθανότητας (κλασσικός-εμπειρικός-αξιωματικός). Πότε συμπίπτει ο κλασσικός ορισμός με τον αξιωματικό;

(ii) Ποιός είναι ο γεωμετρικός ορισμός της πιθανότητας και πότε χρησιμοποιείται;

(iii) Ποιοί είναι οι βασικότεροι κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων; Αναπαραστήσετε σχηματικά με διαγράμματα Venn όπου είναι αναγκαίο.

4. (i) Δώστε τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας.

(ii) Δώστε τον ορισμό της στατιστικής ή στοχαστικής ανεξαρτησίας δύο ενδεχομένων και εξηγήστε πώς προκύπτει αυτός από τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας. Τι ονομάζουμε πολλαπλασιαστικό νόμο;

(iii) Τι ονομάζουμε συνδυασμό των n στοιχείων ενός συνόλου ανά κ; Ποιό είναι το πλήθος των συνδυασμών των n ανά κ;

5. (i) Τι ονομάζουμε τυχαία μεταβλητή και ποιά είναι τα βασικότερα είδη τυχαίων μεταβλητών;

(ii) Δώστε τους ορισμούς της διακριτής και της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής.

6. (i) Τι ονομάζεται συνάρτηση κατανομής ή αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής;

(ii) Τι ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής και τι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής; Ποιές βασικές ιδιότητες ικανοποιούν αμφότερες;

(iii) Πώς συνδέεται η συνάρτηση κατανομής με τη συνάρτηση πιθανότητας στη διακριτή και τη συνεχή περίπτωση αντίστοιχα;

(iv) Ποιές είναι οι βασικότερες παράμετροι της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής διακριτής ή συνεχούς;

7. (i) Ποιές είναι οι βασικές παραδοχές του διωνυμικού πειράματος ή διωνυμικού μοντέλου; (βλ. τα α) έως δ) στις σελ. 92-93 του βιβλίου).

(ii) Δώστε τη συνάρτηση κατανομής και τη συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους n,p.

(iii) Δώστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους n,p.

8. (i) Ορίστε την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ, σ^2.

(ii) Ποιά είναι η συνάρτηση πιθανότητας και ποιά η συνάρτηση κατανομής της $N(\mu,\sigma^2)$;

(iii) Ποιά είναι η μέση τιμή και ποιά η διασπορά της $N(\mu,\sigma^2)$;

(iv) Ποιά είναι η τυποποιημένη κανονική κατανομή; Ποιά είναι η συνάρτηση πιθανότητας και ποιά η συνάρτηση κατανομής της N(0,1); Ποιά είναι η μέση τιμή και ποιά η διασπορά της N(0,1); Πώς μετασχηματίζεται η $N(\mu,\sigma^2)$ σε N(0,1);

(v) Ποιές είναι οι κυριότερες αναλυτικές ιδιότητες της καμπύλης Gauss;

(vi) Σε ποιές z-τιμές της N(0,1) αντιστοιχούν τα τρία τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3 της $N(\mu,\sigma^2)$;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ-ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ-ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ-ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤΑ & ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

1. Έστω ότι για δύο ενδεχόμενα Α, Β ισχύει ότι $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{3}{4}$. Να δείξετε ότι $\frac{1}{4}\le P(A\cup B)\le\frac{3}{4}$.

2. Αν για τα ενδεχόμενα Α,Β ισχύει ότι $P(A)=0,7$, $P(A\cup B)=0,8$, να υπολογισθεί η $P(B)$ στις εξής περιπτώσεις: (i) Α, Β ασυμβίβαστα (ii) Α,Β ανεξάρτητα.

3. ‘Εστω ότι τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ανεξάρτητα. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα ζεύγη ενδεχομένων είναι επίσης ανεξάρτητα: (i) Α, B^c (ii) A^c, B (iii) A^c, B^c.

4. Άσκηση 1 σελ. 101 βιβλίο.

5. Από τους 40 υπαλλήλους μιας εταιρίας 10 είναι γυναίκες. Επιλέγουμε τυχαία 5 υπαλλήλους. Ποιά είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε τουλάχιστον 1 γυναίκα;

6. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να υπολογισθεί η πιθανότητα μία ακριβώς από τις ρίψεις να είναι 5 όταν: (i) δεν έχουμε άλλη πληροφορία (ii) το άθροισμα των ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 9.

7. Μία εταιρία προκήρυξε διαγωνισμό για την πρόσληψη προσωπικού. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τον αριθμό των υποψηφίων ανάλογα με το φύλο και ανάλογα με το αν προσλήφθηκαν ή όχι:

ΦΥΛΟ	ΠΡΟΣΛΗΨΗ	
	ΝΑΙ	ΟΧΙ
ΑΝΔΡΑΣ	65	25
ΓΥΝΑΙΚΑ	230	100

Επιλέγουμε τυχαία έναν υποψήφιο.

(i) Να υπολογισθεί η πιθανότητα ο υποψήφιος να προσλήφθηκε δεδομένου ότι είναι γυναίκα.

(ii) Η εταιρία κατηγορήθηκε ότι ευνόησε τις προσλήψεις των ανδρών υποψηφίων. Ευσταθεί η κατηγορία αυτή;

Β. ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

1. Η πιθανότητα ένας σκοπευτής να πετύχει τον στόχο, σε κάθε βολή, είναι 30%. Ο σκοπευτής ρίχνει 5 βολές.

(i) Να υπολογισθούν οι πιθανότητες:

(α) και οι 5 βολές να είναι επιτυχημένες.

(β) και οι 5 βολές να είναι αποτυχημένες.

(γ) τουλάχιστον 2 βολές να είναι επιτυχημένες.

(ii) Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός των επιτυχημένων βολών;

2. Άσκηση 2 σελ. 101 βιβλίο.

3. Σε ένα κατάστημα ηλεκτρονικών ειδών πωλούνται 60 Η/Υ από τους οποίους οι 6 είναι ελαττωματικοί. Ένας πελάτης αγοράζει στην τύχη 4 υπολογιστές. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες:

(i) 2 ακριβώς από αυτούς να είναι ελαττωματικοί.

(ii) 2 τουλάχιστον από αυτούς να είναι ελαττωματικοί.

Γ. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

1. Έστω ότι $X \sim N(200, 256)$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες:

(i) $P(X > 200)$ (ii) $P(X < 216)$ (iii) $P(184 < X < 216 \mid X > 168)$

2. Ο παρακάτω πίνακας δίνει την κατανομή συχνοτήτων ενός δείγματος 1.000 βιομηχανικών επιχειρήσεων ως προς την αξία των πωλήσεών τους το προηγούμενο έτος:

Αξία πωλήσεων Χ (σε χιλ. ευρώ)	Αριθμός επιχειρήσεων
[100,200)	100
[200,300)	230
[300,400)	380
[400,500)	200
[500,600)	90
ΣΥΝΟΛΟ	1000

Μετά από έλεγχο καλής προσαρμογής διαπιστώθηκε ότι τα δεδομένα αυτά ακολουθούν τον κανονικό νόμο. Επιλέγουμε τυχαία μια επιχείρηση. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως αυτή έχει ετήσια αξία πωλήσεων μεγαλύτερη από 345.000 ευρώ.

3. Άσκηση 1 σελ. 123 βιβλίο.

4. Άσκηση 3 σελ. 123 βιβλίο.