



**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΣΤΑ
ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ**

Ιωάννης Βρόντος

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**

Δεκέμβριος 2006

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

- Brooks C. (2004). Introductory Econometrics for Finance. Cambridge University Press.
- Zivot, E. and Wang, J. (2002). Modeling Financial Time Series with S-PLUS, Springer-Verlag.
- Tsay, R.S. (2002). Analysis of Financial Time Series. Wiley Series in Probability and Statistics.

Μοντέλα Δεσμευμένης Ετεροσκεδαστικότητας

Μοντέλα

- Bollerslev, T., Chou, R.Y. and Kroner, K.F. (1992). ARCH modeling in finance - A review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, 52, 5-59.
- Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. *Econometrica*, 50, 987-1008.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- Nelson, D.B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*, 59, 347-370.

Εκτίμηση Μοντέλων

- Fiorentini, G., Calzolari, G. and Panattoni, L. (1996). Analytic Derivatives and the computation of GARCH Estimates. *Journal of Applied Econometrics*, 11, 399-417.

Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά

Hedge Funds Performance

- Edwards, F.R. and Caglayan, M.O. (2001). Hedge fund performance and manager skill. *Journal of Futures Markets*, 21, 11, 1002-1028.
- Agarwal, V. and Naik, N.Y. (2004). Risks and portfolio decisions involving hedge funds. *Review of Financial Studies*, 17, 1, 63-98.
- Vrontos, S.D., Vrontos, I.D. and Giamouridis, D. (2008). Hedge Funds pricing and model uncertainty, to appear at *Journal of Banking and Finance*, 32, 741-753.

Portfolio Construction

- Giamouridis, D. and Vrontos, I.D. (2007). Hedge fund portfolio construction: A comparison of static and dynamic approaches, *Journal of Banking and Finance*, 31, 199-217.

Value at Risk

- Engle, R.F. (2001). GARCH 101: The use of ARCH/GARCH models in Applied Econometrics, *Journal of Economic Perspectives*, 15, 4, 157-168.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός του μαθήματος είναι η παρουσίαση, ανάπτυξη και εφαρμογή στατιστικών - οικονομικών υποδειγμάτων σε χρηματοοικονομικά δεδομένα. Τα δεδομένα αυτά εμφανίζουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και μεταβλητότητα, και για τον λόγο αυτό η ανάπτυξη ειδικών μεθόδων είναι απαραίτητη για την λήψη ορθολογικών αποφάσεων σε χρηματοοικονομικές εφαρμογές.

Η στατιστική ανάλυση χρηματοοικονομικών δεδομένων ασχολείται με την εκτίμηση και αξιολόγηση υποδειγμάτων (μονομεταβλητών και πολυμεταβλητών), την διερεύνηση των σχέσεων και αλληλεξαρτήσεων που υπάρχουν μεταξύ των μεταβλητών που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε, και αποβλέπει στη διενέργεια προβλέψεων. Θα ασχοληθούμε με υποδείγματα που αφορούν τόσο την μοντελοποίηση των αναμενόμενων αποδόσεων, όσο και την μοντελοποίηση της δεσμευμένης διακύμανσης των αποδόσεων. Θα χρησιμοποιήσουμε το υπόδειγμα της πολλαπλής παλινδρόμησης για να μελετήσουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των αποδόσεων των χρηματοοικονομικών στοιχείων (assets) με κάποιους εξωγενείς παράγοντες, καθώς και τα παραγοντικά μοντέλα (factor models), τα οποία αποδίδουν τις αποδόσεις των χρηματοοικονομικών στοιχείων συναρτήσει λίγων βασικών παραγόντων κινδύνου, οι οποίοι περιέχουν το μεγαλύτερο μέρος της πληροφορίας των δεδομένων.

Ένα μεγάλο μέρος της σύγχρονης χρηματοοικονομικής θεωρίας στηρίζεται στην έννοια του κινδύνου των χρηματοοικονομικών στοιχείων, ο οποίος εκφράζεται μέσω της διακύμανσης. Η μοντελοποίηση της διακύμανσης των χρηματοοικονομικών στοιχείων είναι ιδιαίτερα σημαντική αφού επηρεάζει τις αποφάσεις που λαμβάνονται σε χρηματοοικονομικές εφαρμογές, όπως η επιλογή του βέλτιστου χαρτοφυλακίου, η διαχείριση του κινδύνου, η τιμολόγηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων και αλλού. Τα Αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity - ARCH) προτάθηκαν από τον Engle (1982) και χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση της διακύμανσης (δεσμευμένης) των χρηματοοικονομικών στοιχείων.

Θα δοθεί επίσης έμφαση στην ανάπτυξη πολυμεταβλητών υποδειγμάτων που αφορούν την μοντελοποίηση των αναμενόμενων αποδόσεων και του πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης των χρηματοοικονομικών στοιχείων. Η διάδοση και εφαρμογή των υποδειγμάτων αυτών οφείλεται στο γεγονός ότι ‘συλλαμβάνουν’ πολλά από τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών, όπως το ‘volatility clustering’ φαινόμενο, αλλά και στο γεγονός ότι είναι εύκολα στην κατανόηση και την εκτίμησή τους. Θα δοθεί έμφαση τόσο στη θεωρία, όσο και στην ανάλυση και εφαρμογή των οικονομικών υποδειγμάτων σε χρηματοοικονομικά δεδομένα. Η χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών και κατάλληλων πακέτων (π.χ. Matlab) είναι απαραίτητη.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στασιμότητα

Ορισμός. ‘**Αυστηρώς στάσιμη διαδικασία**’ (**‘Strictly stationary process’**) Μια στοχαστική διαδικασία (π.χ. χρονολογική σειρά) είναι αυστηρώς στάσιμη αν οι από κοινού κατανομές των $(X_i, X_{i+1}, \dots, X_{i+k})'$ και $(X_{i+m}, X_{i+1+m}, \dots, X_{i+k+m})'$ είναι ίδιες για όλα τα i, k, m .

Με άλλα λόγια, η αυστηρώς στάσιμη διαδικασία απαιτεί ότι η από κοινού κατανομή είναι αμετάβλητη – παραμένει η ίδια σε αλλαγές του χρόνου (invariant under time shift). Αυτή η συνθήκη είναι πάρα πολύ αυστηρή και είναι πολύ δύσκολο να επαληθευθεί σε εμπειρικές εφαρμογές.

Ορισμός. ‘**Ασθενώς στάσιμη διαδικασία**’ (**‘Weakly stationary process’**) Μια στοχαστική διαδικασία είναι ασθενώς στάσιμη, αν ο μέσος και η διακύμανση είναι σταθερά στο χρόνο και η συνδιακύμανση μεταξύ δύο χρονικών περιόδων εξαρτάται μόνο από την απόσταση (lag) του χρόνου, και όχι από τη χρονική στιγμή που υπολογίζεται η συνδιακύμανση.

Έστω Y_1, Y_2, \dots, Y_T χρονολογική σειρά. Ο ορισμός της ασθενούς στάσιμης διαδικασίας δηλώνει ότι ο μέσος της σειράς είναι $E(Y_t) = \mu$ σταθερός για κάθε t , η διακύμανση είναι $V(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2$ σταθερή για κάθε t , και ότι η συνδιακύμανση (αυτοσυνδιακύμανση - autocovariance) είναι $\gamma_k = \text{Cov}(Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)]$ εξαρτάται μόνο από το k . Η διακύμανση της σειράς μπορεί να γραφεί και ως $\gamma_0 = E[(Y_t - \mu)(Y_t - \mu)] = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2$.

Ο ορισμός της ασθενούς στάσιμης διαδικασίας υπονοεί ότι στο διάγραμμα της σειράς σε σχέση με το χρόνο (time series plot) οι T τιμές της σειράς κυμαίνονται με σταθερή διακύμανση γύρω από ένα σταθερό μέσο.

Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

Θεωρείστε μία ασθενώς στάσιμη σειρά Y_t . Η έννοια της αυτοσυσχέτισης χρησιμοποιείται όταν μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την γραμμική εξάρτηση μεταξύ της Y_t και των προηγούμενων τιμών Y_{t-k} . Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μας δείχνει πόσο μεγάλη

συσχέτιση (αλληλεπίδραση) υπάρχει μεταξύ γειτονικών σημείων (που απέχουν k χρονικές στιγμές) στη χρονολογική σειρά Y_t .

$$\rho_k = \frac{E[(Y_t - \mu_y)(Y_{t+k} - \mu_y)]}{\sqrt{E(Y_t - \mu_y)^2 E(Y_{t+k} - \mu_y)^2}} = \frac{\text{Cov}(Y_t, Y_{t+k})}{\sigma_{y_t} \sigma_{y_{t+k}}} = \frac{\text{Συνδιακυμανση}}{\text{Διακυμανση}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}.$$

Ιδιότητες: $\rho_k = \rho_{-k}$, $-1 < \rho_k < 1$, $\rho_0 = 1$.

Παράδειγμα

Έστω $Y_t = \varepsilon_t$, όπου ε_t είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέσο 0, δηλαδή $E(\varepsilon_t) = 0$.

Τότε:

$$\rho_k = \frac{E[(Y_t - \mu_y)(Y_{t+k} - \mu_y)]}{\sqrt{E(Y_t - \mu_y)^2 E(Y_{t+k} - \mu_y)^2}} = \frac{E[Y_t Y_{t+k}]}{\sqrt{E(Y_t)^2 E(Y_{t+k})^2}}$$

$$k = 0: \rho_0 = \frac{E[Y_t Y_{t+k}]}{\sqrt{E(Y_t)^2 E(Y_{t+k})^2}} = \frac{E(Y_t)^2}{E(Y_t)^2} = 1 \quad \underline{\rho_0 = 1}$$

$$k > 0: \rho_k \stackrel{\text{ανεξαρτ.}}{=} \frac{E(Y_t)E(Y_{t+k})}{\sqrt{E(Y_t - \mu_y)^2 E(Y_{t+k} - \mu_y)^2}} = \frac{0}{\sqrt{E(Y_t - \mu_y)^2 E(Y_{t+k} - \mu_y)^2}} = 0 \quad \rho_k = 0, k > 0$$

Δεν έχει νόημα να χρησιμοποιήσουμε κάποιο υπόδειγμα για να προβλέψουμε την παραπάνω σειρά.

Για ένα δείγμα y_1, y_2, \dots, y_T μπορούμε να υπολογίζουμε τη δειγματική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}.$$

Έλεγχοι Υποθέσεων

Έλεγχος αυτοσυσχέτισης για ένα συγκεκριμένο k (Bartlett test)

$$\begin{cases} H_0: \rho_k = 0 \\ H_1: \rho_k \neq 0 \end{cases} \text{ για συγκεκριμένο } k, k > 0.$$

Αν T είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων, y_t είναι μία i.i.d. (independent and identical

distributed) διαδικασία με $E(Y_t^2) < \infty$, τότε: $\hat{\rho}_k \overset{\text{προσεγγ.}}{\sim} N\left(0, \frac{1}{T}\right) \Rightarrow \frac{\hat{\rho}_k - 0}{\sqrt{1/T}} \sim N(0, 1)$.

Έλεγχος (από κοινού) για πολλές αυτοσυσχετίσεις (Portmanteau test)

$$\begin{cases} H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0 \\ H_1: \rho_i \neq 0, \text{ για κάποιο } i \text{ (τουλάχιστον ένα)} \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις ελέγχου που έχουν προταθεί για τον από κοινού έλεγχο πολλών αυτοσυσχετίσεων δίνονται από τους

$$\text{Box-Pierce: } Q = T \cdot \sum_{k=1}^m \hat{\rho}_k^2 \sim X_m^2$$

και

$$\text{Ljung-Box: } LB = T(T+2) \cdot \sum_{k=1}^m \left(\frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k} \right) \sim X_m^2$$

(προτιμότερη για μικρά δείγματα).

Στην πράξη, όταν προσαρμόζουμε στα δεδομένα κάποιο υπόδειγμα (ARMA - ARIMA) ελέγχουμε αν τα κατάλοιπα $\hat{\epsilon}_t$ είναι ασυσχέτιστα. Οι παραπάνω έλεγχοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σε αυτήν την περίπτωση.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, το διάγραμμα των αυτοσυσχετίσεων έναντι των υστερήσεων k μιας σειράς, ή ο έλεγχος Bartlett, μπορεί να μας αποκαλύψουν υψηλές αυτοσυσχετίσεις της χρονοσειράς για πολύ μεγάλες υστερήσεις. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά επηρεάζεται από το «μακρινό» παρελθόν της, η σειρά δεν μπορεί να θεωρηθεί στάσιμη και χρησιμοποιούνται ειδικές τεχνικές για τη μοντελοποίησή της. Λίγες χρονολογικές σειρές είναι στάσιμες. Κάποιες σειρές γίνονται στάσιμες αν πάρουμε διαφορές μία ή περισσότερες φορές (αυτές οι διαδικασίες λέγονται homogeneous non-stationary processes).

Στασιμότητα – Ερμηνεία

Θεωρούμε το υπόδειγμα : $Y_t = \mu + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$, όπου $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d.}$ με μέσο μηδέν και σταθερή διακύμανση σ^2 .

$$\text{Έστω } t = 1: Y_1 = \mu + \rho Y_0 + \varepsilon_1.$$

$$t = 2: Y_2 = \mu + \rho Y_1 + \varepsilon_2 = \mu + \rho(\mu + \rho Y_0 + \varepsilon_1) + \varepsilon_2 = \mu + \rho\mu + \rho^2 Y_0 + \rho\varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

$$\begin{aligned} t = 3: Y_3 &= \mu + \rho Y_2 + \varepsilon_3 = \\ &= \mu + \rho(\mu + \rho\mu + \rho^2 Y_0 + \rho\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_3 = \\ &= \mu + \rho\mu + \rho^2\mu + \rho^3 Y_0 + \rho^2\varepsilon_1 + \rho\varepsilon_2 + \varepsilon_3. \end{aligned}$$

$$\text{Γενικά: } Y_t = \rho^t Y_0 + \mu \sum_{s=0}^{t-1} \rho^s + \sum_{s=1}^t \rho^{t-s} \varepsilon_s$$

Τα ε_t είναι οι διαταραχές (shocks) πάνω στη σειρά Y_t . Το ρ θα μας δείξει αν οι διαταραχές είναι μόνιμες ή όχι. Έστω $t=1$. Η τυχαία διαταραχή (shock) είναι ε_1 . Ποια θα είναι η επίδρασή του στη σειρά Y_1, Y_2, \dots, Y_T ;

Η επίδραση δίνεται από την $\frac{dY_t}{d\varepsilon_1} = \rho^{t-1}$. Πιο αναλυτικά:

$$\text{για } t = 1: \frac{dY_1}{d\varepsilon_1} = \rho^{1-1} = \rho^0 = 1$$

$$\text{για } t = 2: \frac{dY_2}{d\varepsilon_1} = \rho^{2-1} = \rho^1 = \rho$$

$$\text{για } t = 3: \frac{dY_3}{d\varepsilon_1} = \rho^{3-1} = \rho^2$$

... ..

$$\text{για } t = 10: \frac{dY_t}{d\varepsilon_1} = \rho^9 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Άρα, αν $|\rho| < 1$, το $\frac{dY_t}{d\varepsilon_1}$ ασυμπτωτικά γίνεται μηδέν, οπότε το shock - διαταραχή - δεν είναι

μόνιμο: $\frac{dY_t}{d\varepsilon_1} \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Δηλαδή, όταν $|\rho| < 1$, το υπόδειγμα είναι στάσιμο, η

διαταραχή είναι προσωρινή.

Αν $\rho = 1$, τότε, το shock - διαταραχή - είναι μόνιμο, το υπόδειγμα είναι μη στάσιμο:

$Y_t = \mu + Y_{t-1} + \varepsilon_t$ και ονομάζεται Τυχαίος Περίπατος με προσαύξηση – Random Walk with drift (με σταθερό μ). Αν κάποιο τυχαίο γεγονός επηρεάσει τη σειρά, η επιρροή παραμένει μόνιμη. Τότε:

$$Y_1 = \mu + Y_0 + \varepsilon_1$$

$$Y_2 = \mu + Y_1 + \varepsilon_2 = \mu + \mu + Y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$Y_3 = \mu + Y_2 + \varepsilon_3 = \mu + \mu + \mu + Y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

... ..

$$Y_t = Y_0 + \mu t + \sum_{s=1}^t \varepsilon_s .$$

Από την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να συμπεράνουμε τα εξής:

- Τα shocks είναι μόνιμα $\frac{dY_1}{d\varepsilon_1} = 1, \frac{dY_2}{d\varepsilon_1} = 1, \frac{dY_3}{d\varepsilon_1} = 1, \dots, \frac{dY_t}{d\varepsilon_1} = 1$.
- Η σειρά $Y_t = Y_0 + \mu t + \sum_{s=1}^t \varepsilon_s$ έχει γραμμική τάση.
- Η σειρά δεν είναι στάσιμη. Συγκεκριμένα (αν υποθέσουμε ότι $Y_0 = 0$):

$$E(Y_t) = E(Y_0 + \mu t + \sum_{s=1}^t \varepsilon_s) = \mu t + \sum_{s=1}^t \underbrace{E(\varepsilon_s)}_0 = \mu t : \text{εξαρτάται από το } t$$

$$V(Y_t) = V(Y_0 + \mu t + \sum_{s=1}^t \varepsilon_s) = V\left(\sum_{s=1}^t \varepsilon_s\right) \stackrel{\text{w.N.}}{=} \sum_{s=1}^t V(\varepsilon_s) = t\sigma^2 : \text{εξαρτάται από το } t$$

Να υπολογίσετε το autocovariance σε χρονική υστέρηση ένα, ως άσκηση.

Επομένως, ο πιο κατάλληλος έλεγχος για την ύπαρξη στασιμότητας είναι ο έλεγχος της υπόθεσης $\rho = 1$, έναντι της εναλλακτικής $|\rho| < 1$.

Σειρές για τις οποίες ισχύει ότι $\rho = 1$, ονομάζονται σειρές με μοναδιαία ρίζα ή ολοκληρωμένες τάξης 1 – integrated of order 1. Μπορούν να μετατραπούν σε στάσιμες, με κατάλληλες διαφορές: $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$. (Ενδεχομένως κάποιες σειρές να χρειαστεί να τις διαφορίσουμε περισσότερες από μία φορά).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο :

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗΣ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

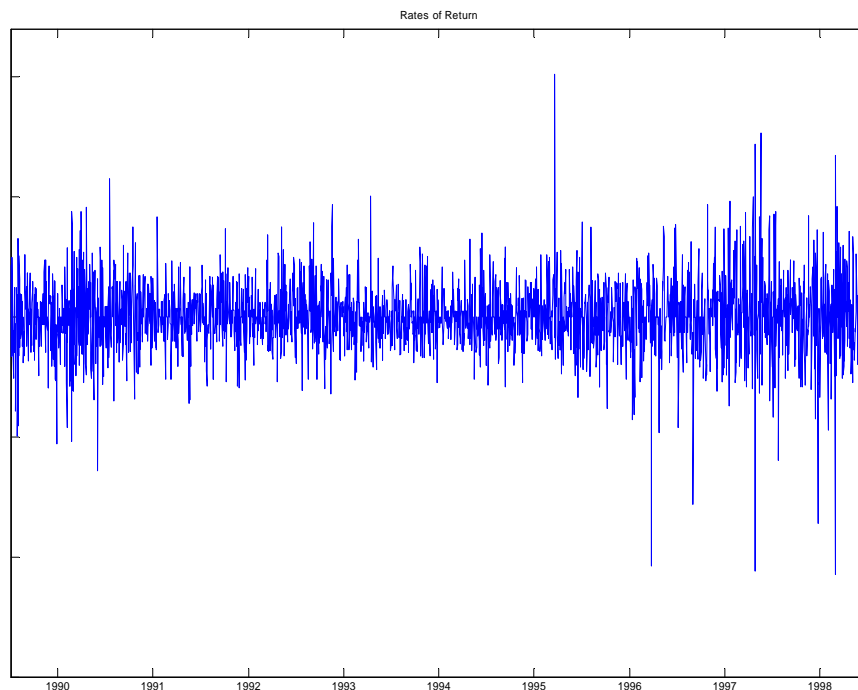
2.1. Χαρακτηριστικά Χρηματοοικονομικών Στοιχείων

Το αντικείμενο μελέτης αφορά δεδομένα όπως τιμές μετοχών και χρηματιστηριακών δεικτών, αποδόσεις μετοχών και χρηματιστηριακών δεικτών, επιτόκια (interest rates), συναλλαγματικές ισοτιμίες (exchange rates). Οι αποδόσεις (rate of return) ορίζονται από τις διαφορές των λογαρίθμων:

$$y_{t+1} = \ln(P_{t+1}) - \ln(P_t) = \ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) \quad \text{ή} \quad y_{t+1} = \left(\frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}\right).$$

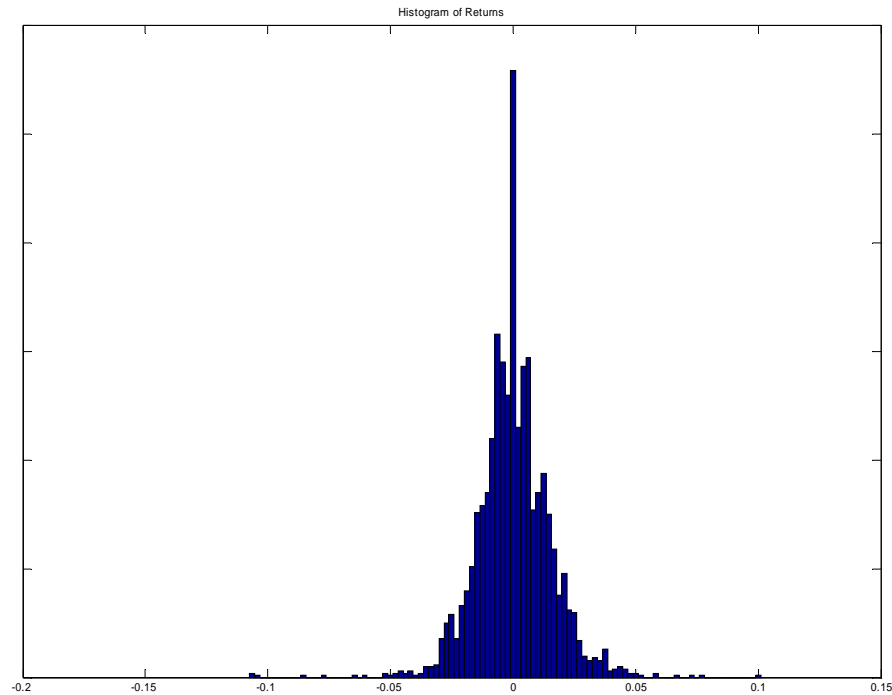
Volatility clustering phenomenon

Η γραφική απεικόνιση των αποδόσεων χρηματοοικονομικών δεδομένων έχει αποκαλύψει ότι μεγάλες μεταβολές τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες μεταβολές, ενώ μικρές μεταβολές τείνουν να ακολουθούνται από μικρές μεταβολές, έτσι ώστε παρουσιάζονται συγκεκριμένες «ομάδες-cluster», εντός των οποίων, η διακύμανση παραμένει υψηλή ή χαμηλή.



Fat Tails

Η κατανομή των αποδόσεων, συχνά εμφανίζεται να είναι λεπτόκυρτη, να έχει δηλαδή πιο παχιές ουρές από την κανονική κατανομή. Πρακτικά, τα δεδομένα εμφανίζονται να έχουν συντελεστή κύρτωσης μεγαλύτερο από 3, που αντιστοιχεί στην κανονική κατανομή (βλέπε Πίνακα 1). Για το λόγο αυτό, μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατανομές όπως η t-Student και η generalized error distribution.



Non-trading days or ‘Holiday effect’

Η πληροφορία η οποία συγκεντρώνεται κατά τη διάρκεια των ημερών όπου οι αγορές είναι κλειστές αντανακλάται ή απελευθερώνεται στις τιμές όταν οι αγορές ανοίξουν.

Leverage Effect

Έχει παρατηρηθεί ότι οι μεταβολές στις διακυμάνσεις των μετοχών είναι αρνητικά συσχετισμένες με μεταβολές στις τιμές την προηγούμενη χρονική περίοδο. Δηλαδή, όταν μειώνονται οι τιμές των μετοχών, τείνει να αυξάνεται η μεταβλητότητα (διακύμανση), ενώ όταν ανεβαίνουν, τείνει να μειώνεται η διακύμανση.

Co-movements in volatilities

Έχει παρατηρηθεί ότι υπάρχει ομοιογένεια στις αλλαγές στην μεταβλητότητα μεταξύ των αγορών. Το γεγονός αυτό υπονοεί ότι υπάρχει ένα σύνολο κοινών παραγόντων που μπορούν να τις ερμηνεύσουν.

Table 1: Summary statistics for the rates of return of 8 stocks.

Stocks	Rates of return y_t				$ y_t $	y_t^2
	Mean	St.dev.	Kurtosis	LB(50)	LB(50)	LB(50)
ATT	0.000374	0.01523	5.462	60.650	636.265	301.920
AXP	0.000514	0.01976	3.101	70.564	1107.453	1035.969
C	0.001000	0.02165	4.118	63.102	599.633	484.489
GE	0.000785	0.01355	2.536	82.068	928.415	877.401
JPM	0.000371	0.01650	3.279	80.431	1935.176	1893.695
PG	0.000702	0.01455	2.390	74.112	731.037	708.877
RAL	0.000443	0.01477	6.017	99.135	527.327	289.006
WMT	0.000844	0.01785	2.034	69.490	541.026	498.996

2.2. Δεσμευμένη και μη δεσμευμένη μέση τιμή και διακύμανση

Στη συνέχεια παρουσιάζετε ένα παράδειγμα υπολογισμού της δεσμευμένης και μη δεσμευμένης μέσης τιμής και διακύμανσης, προκειμένου να γίνουν αντιληπτές οι έννοιες αυτές. Στον υπολογισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής και διακύμανσης το σύνολο της πληροφορίας ως τη χρονική στιγμή $t-1$ συμβολίζεται με Φ_{t-1} .

$$\text{Έστω το AR(1) υπόδειγμα: } Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ όπου } \varepsilon_t \text{ i.i.d. } (0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (2.1)$$

- Unconditional mean – Μη δεσμευμένος μέσος: $E(Y_t) = 0$

Έστω ότι η σειρά είναι στάσιμη και ότι ισχύει $E(Y_t) = E(Y_{t-1}) = \mu$. Τότε, από τη σχέση (2.1) έχουμε:

$$E(Y_t) = E(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t) \Rightarrow E(Y_t) = \phi E(Y_{t-1}) + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_0 \Rightarrow E(Y_t) = \phi E(Y_{t-1}) \Rightarrow \mu = \phi \mu \Rightarrow$$

$$\mu(1-\phi)=0 \Rightarrow \mu = 0$$

- Conditional mean – Δεσμευμένος μέσος: $E(Y_t | \Phi_{t-1}) = \phi Y_{t-1}$

$$\text{Είναι: } E(Y_t | \Phi_{t-1}) = E(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t | \Phi_{t-1}) = \phi E(Y_{t-1} | \Phi_{t-1}) + \underbrace{E(\varepsilon_t | \Phi_{t-1})}_0 = \phi Y_{t-1}$$

- Unconditional variance – Μη δεσμευμένη διακύμανση: $V(Y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}$

Εστω επίσης ότι ισχύει $V(Y_t) = V(Y_{t-1}) = v$. Τότε, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$V(Y_t) = V(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t) \Rightarrow V(Y_t) = \phi^2 V(Y_{t-1}) + V(\varepsilon_t) \Rightarrow v = \phi^2 v + \sigma_\varepsilon^2 \Rightarrow v = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}$$

- Conditional variance – Δεσμευμένη διακύμανση: $V(Y_t | \Phi_{t-1}) = \sigma_\varepsilon^2$

Είναι: $V(Y_t | \Phi_{t-1}) = V(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t | \Phi_{t-1}) \stackrel{\text{ανεξαρτ.}}{=} \phi^2 \underbrace{V(Y_{t-1} | \Phi_{t-1})}_0 + V(\varepsilon_t | \Phi_{t-1}) = \sigma_\varepsilon^2$ (διότι το

$Y_{t-1} | \Phi_{t-1}$ είναι σταθερό, όχι τυχαία μεταβλητή).

Στα υποδείγματα ετεροσκεδαστικότητας που θα παρουσιάσουμε παρακάτω μοντελοποιούμε την δεσμευμένη διακύμανση στο χρόνο t . Οι λόγοι για τους οποίους χρησιμοποιούμε υποδείγματα μεταβαλλόμενης δεσμευμένης διακύμανσης είναι

- μελετάμε την διακύμανση – τυπική απόκλιση (volatility) για να κατανοήσουμε τον κίνδυνο (ρίσκο) μιας σειράς
- κατασκευάζουμε πιο ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης (time varying)
- επιτυγχάνονται επαρκής (efficient) εκτιμήσεις, όταν ‘συλλαμβάνεται η ετεροσκεδαστικότητα’.

2.3. Υποδείγματα Μεταβαλλόμενης Δεσμευμένης Διακύμανσης

2.3.1. Υποδείγματα ARCH

Ο όρος ARCH προέρχονται από τις λέξεις *AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*, το οποίο μπορεί να αποδοθεί ως *Υπόδειγμα Αυτοπαλίνδρομης Υπόσυνθήκης (Δεσμευμένης) Ετεροσκεδαστικότητας*. Το υπόδειγμα ARCH παρουσιάστηκε στη βιβλιογραφία από τον Engle (1982) με σκοπό την μοντελοποίηση της δεσμευμένης διακύμανσης. Στην πιο απλή του μορφή [ARCH(1)] το υπόδειγμα μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$Y_t = \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

όπου $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0$. Οι περιορισμοί αυτοί εξασφαλίζουν θετική διακύμανση για κάθε χρονική στιγμή t . Εναλλακτικά η κατανομή των ε_t μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t$$

$$z_t \sim N(0,1)$$

και επομένως $\varepsilon_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$. Επίσης, οι συνθήκες στασιμότητας ορίζουν ότι $\alpha_1 < 1$, και η στάσιμη διακύμανση δίνεται από την σχέση

$$\sigma_\varepsilon^2 = E(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}.$$

Παρατηρώντας τη μορφή της εξίσωσης που περιγράφει την υπό-συνθήκη διακύμανση, παρατηρούμε ότι η διακύμανση στο χρόνο t εξαρτάται από το μέγεθος (magnitude) του τυχαίου σφάλματος ε_t υψωμένου στο τετράγωνο στο χρόνο $t-1$. Άρα η δεσμευμένη διακύμανση είναι συνάρτηση του μεγέθους του τυχαίου σφάλματος την προηγούμενη χρονική περίοδο, ανεξαρτήτως από το πρόσημό τους. Έτσι αν μια μεταβλητή ακολουθεί μία ARCH διαδικασία μεγάλα σφάλματα θα τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλα σφάλματα και μικρά σφάλματα από μικρά σφάλματα (volatility clustering phenomenon).

Ο Engle (1982) παρουσιάζει τις συνθήκες για την ύπαρξη των ροπών του ARCH υποδείγματος, κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας για την κατανομή των τυχαίων σφαλμάτων ε_t . Η συνθήκη για να είναι πεπερασμένη (finite) η διακύμανση είναι $\alpha_1 < 1$, ενώ για να ορίζεται η τέταρτη ροπή χρειάζεται επίσης $3\alpha_1^2 < 1$. Οι ροπές αυτές δίνονται, αντίστοιχα, από

$$E[\varepsilon_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \quad \text{και} \quad E[\varepsilon_t^4] = \frac{3\alpha_0^2}{(1 - \alpha_1)^2} \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}.$$

Επομένως, η κύρτωση της μη δεσμευμένης κατανομής (unconditional distribution) των ε_t είναι

$$\kappa = \frac{E[\varepsilon_t^4]}{(E[\varepsilon_t^2])^2} = 3 \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}.$$

Όπως παρατηρούμε, η κύρτωση είναι πάντα μεγαλύτερη του 3, δηλαδή μεγαλύτερη από την τιμή της κύρτωσης της κανονικής κατανομής. Επομένως, η κατανομή των ε_t έχει πιο παχιές ουρές από την κανονική κατανομή και το ARCH υπόδειγμα συλλαμβάνει την ιδιότητα των ‘παχιών ουρών’ των χρηματοοικονομικών δεδομένων.

Το ARCH(1) υπόδειγμα μπορεί να γραφεί σαν ένα Non-Gaussian AR(1) υπόδειγμα στα τετράγωνα των ε_t . Δηλαδή στη μορφή:

$$\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 + (\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + v_t$$

όπου $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$. Η αναμενόμενη τιμή του τυχαίου σφάλματος στην περίπτωση αυτή είναι μηδέν.

$$E(v_t | \Phi_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 | \Phi_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 | \Phi_{t-1}) - E(\sigma_t^2 | \Phi_{t-1}) = \sigma_t^2 - \sigma_t^2 = 0$$

$$\text{(Διότι } V(\varepsilon_t | \Phi_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 | \Phi_{t-1}) - \underbrace{[E(\varepsilon_t | \Phi_{t-1})]^2}_0 \Rightarrow E(\varepsilon_t^2 | \Phi_{t-1}) = \sigma_t^2 \text{).}$$

Είναι ένα non-Gaussian AR υπόδειγμα γιατί τα τετράγωνα των ε_t ακολουθούν την χ^2 και όχι την κανονική κατανομή όπως ακολουθούν τα ε_t .

Το υπόδειγμα ARCH(p) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$Y_t = \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

όπου $\alpha_0 > 0$ και $\alpha_i \geq 0$ για $i = 1 \dots p$ έτσι ώστε η υπό-συνθήκη διακύμανση να είναι θετική. Το υπόδειγμα ARCH χαρακτηρίζει την υπό-συνθήκη ή δεσμευμένη κατανομή του τυχαίου σφάλματος ε_t , η οποία είναι δεσμευμένη στην πληροφόρηση που έχουμε μέχρι τη χρονική στιγμή $t-1$, $\Phi_{t-1} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{t-1})$ όπου τα Y_{t-i} είναι οι πραγματοποιήσιμες τιμές (realized values) της μεταβλητής Y_t στις προηγούμενες χρονικές περιόδους.

Το ARCH(p) υπόδειγμα μπορεί να γραφεί σαν ένα Non-Gaussian AR(p) υπόδειγμα στα τετράγωνα των ε_t . Δηλαδή στη μορφή:

$$\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 + (\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + v_t$$

όπου $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$. Η αναμενόμενη τιμή του τυχαίου σφάλματος και στην περίπτωση αυτή είναι μηδέν.

$$E(v_t | \Phi_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 | \Phi_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 | \Phi_{t-1}) - E(\sigma_t^2 | \Phi_{t-1}) = \sigma_t^2 - \sigma_t^2 = 0.$$

ARCH (p) Υπόδειγμα Παλινδρόμησης

Στην γενική του μορφή το ARCH(p) υπόδειγμα μπορεί να περιέχει και επεξηγηματικές μεταβλητές στην εξίσωση του μέσου.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \dots + \beta_m x_{m,t} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

ή ισοδύναμα

$$Y_t | \Phi_{t-1} \sim N(X_t \beta, \sigma_t^2)$$

όπου X_t είναι ένα διάνυσμα $[1 \times (m+1)]$, $X_t = (1 \quad x_{1,t} \quad x_{2,t} \quad \dots \quad x_{m,t})$ και β είναι ένα διάνυσμα $[(m+1) \times 1]$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)'$.

2.3.2 Υποδείγματα GARCH

Το υπόδειγμα GARCH αποτελεί επέκταση του ARCH υποδείγματος, όπως ακριβώς το ARMA αποτελεί επέκταση του AR. Ο Bollerslev (1986) γενίκευσε τα ARCH υποδείγματα έτσι ώστε να αποκτήσουν μια πιο ‘parsimonious’ μορφή που θα διευκόλυνε την εμπειρική εφαρμογή τους. Ο Bollerslev πρότεινε το **Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH) model** που είναι μια γενικευμένη μορφή της αυτοπαλίνδρομης υπό-συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας η οποία ορίζεται ως εξής (περιέχει και επεξηγηματικές μεταβλητές στην εξίσωση του μέσου)

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \dots + \beta_m x_{m,t} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^2$$

ή ισοδύναμα

$$Y_t | \Phi_{t-1} \sim N(X_t \beta, \sigma_t^2)$$

όπου X_t είναι ένα διάνυσμα $[1 \times (m+1)]$, $X_t = (1 \quad x_{1,t} \quad x_{2,t} \quad \dots \quad x_{m,t})$ και β είναι ένα διάνυσμα $[(m+1) \times 1]$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)'$, $\alpha_0 > 0$ και $\alpha_i \geq 0$, $i = 1 \dots p$, $b_j \geq 0$, $j = 1 \dots q$. Το παραπάνω υπόδειγμα ονομάζεται **GARCH(p,q)**. Αν $q = 0$ τότε έχουμε ένα ARCH(p) υπόδειγμα ενώ αν $p = q = 0$ τότε οι αποδόσεις είναι i.i.d. και αποτελούν ‘white noise’.

Ένα από τα μειονεκτήματα των υποδειγμάτων ARCH στην εμπειρική εφαρμογή τους είναι ότι απαιτούνται αρκετοί ARCH όροι και έτσι η εκτίμηση των υποδειγμάτων γίνεται δύσκολη αν λάβουμε υπόψη τους περιορισμούς που απαιτούνται για να είναι η υπό-συνθήκη διακύμανση θετική. Στα υποδείγματα ARCH η δεσμευμένη διακύμανση ορίζεται σαν ένας γραμμικός συνδυασμός προηγούμενων σφαλμάτων, ε_{t-i} . Στα υποδείγματα GARCH η δεσμευμένη διακύμανση ορίζεται σαν ένας γραμμικός συνδυασμός προηγούμενων σφαλμάτων ε_{t-i} και προηγούμενων διακυμάνσεων σ_{t-j}^2 . Αυτή η κατηγορία μοντέλων είναι

πιο ευέλικτη ως προς την δομή της (απαιτούνται λιγότερες υστερήσεις) και συλλαμβάνει το φαινόμενο του ‘volatility clustering’. Στις εμπειρικές εφαρμογές των ARCH μοντέλων απαιτείται ένας σχετικά μεγάλος αριθμός υστερήσεων στην εξίσωση της δεσμευμένης διακύμανσης και επομένως πολλές παράμετροι προς εκτίμηση. Αντίθετα τα GARCH μοντέλα, επειδή ακριβώς συμπεριλαμβάνουν και προηγούμενες δεσμευμένες διακυμάνσεις στην εξίσωση της δεσμευμένης διακύμανσης, επιτυγχάνουν μια πιο ‘parsimonious representation’.

Το GARCH υπόδειγμα μπορεί να γραφεί σαν ένα Non-Gaussian ARMA υπόδειγμα στα τετράγωνα των ε_t . Συγκεκριμένα, το GARCH(1,1) υπόδειγμα μπορεί να γραφεί σαν ένα Non-Gaussian ARMA(1,1) υπόδειγμα στα τετράγωνα των ε_t . Δηλαδή στη μορφή:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^2 &= \sigma_t^2 + (\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2 + v_t \\ [\text{αφού } v_t &= \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2, \text{ και επομένως } \sigma_t^2 = \varepsilon_t^2 - v_t] \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 (\varepsilon_{t-1}^2 - v_{t-1}) + v_t = \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \varepsilon_{t-1}^2 - b_1 v_{t-1} + v_t = \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + b_1) \varepsilon_{t-1}^2 - b_1 v_{t-1} + v_t \end{aligned}$$

το οποίο είναι ένα ARMA(1,1) στα τετράγωνα των ε_t , όπου $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$. Η αναμενόμενη τιμή του τυχαίου σφάλματος και στην περίπτωση αυτή είναι μηδέν.

$$E(v_t | \Phi_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 | \Phi_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 | \Phi_{t-1}) - E(\sigma_t^2 | \Phi_{t-1}) = \sigma_t^2 - \sigma_t^2 = 0.$$

Ένα GARCH(p,q) μπορεί να γραφτεί ως ένα ARMA(m,p) ως εξής:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + b_i) \varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^p b_j v_{t-j} + v_t$$

όπου $m = \max(p, q)$. Όπως στα ARMA(p,q) υποδείγματα η τάξη (order) δηλαδή το μέγεθος του p και του q καθορίζεται από τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (ACF) και τη συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης (Partial ACF), αντίστοιχα μπορούμε να καθορίσουμε την τάξη ενός GARCH υπόδειγματος από τα ACF και PACF των τετραγώνων των ε_t . Συνήθως, όμως, κατά την εμπειρική εφαρμογή των υποδειγμάτων GARCH δεν τίθεται το πρόβλημα της ταυτοποίησης των p και q γιατί η GARCH(1,1) διαδικασία χρησιμοποιείται στις περισσότερες των περιπτώσεων.

Οι μη δεσμευμένες ροπές της διαδικασίας GARCH δίνουν τα χαρακτηριστικά του μοντέλου και προκύπτουν χρησιμοποιώντας το Νόμο των διαδοχικών μέσων τιμών [Law of Iterated Expectations]. Ο μη δεσμευμένος μέσος της στοχαστικής διαδικασίας ε_t που ακολουθεί ένα GARCH (p, q) υπόδειγμα με δεσμευμένη διακύμανση σ_t^2 δίνεται από

$E(\varepsilon_t) = E[E(\varepsilon_t | \Phi_{t-1})]$. Το GARCH υπόδειγμα ορίζει ότι $E(\varepsilon_t | \Phi_{t-1}) = 0$, οπότε η διαδικασία GARCH έχει μέσο μηδέν, $E(\varepsilon_t) = 0$. Η μη δεσμευμένη διακύμανση του GARCH (p, q) υποδείγματος δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\sigma_\varepsilon^2 = E(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q b_j},$$

και η ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της διακύμανσης είναι $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q b_j < 1$ (βλέπε, για λεπτομέρειες, Bollerslev, 1986). Αν και η δεσμευμένη διακύμανση των ε_t μεταβάλλεται στο χρόνο, η μη δεσμευμένη διακύμανση των ε_t παραμένει σταθερή. Σε πολλές εφαρμογές χρηματοοικονομικών δεδομένων η εκτίμηση του $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q b_j$ είναι πολύ κοντά στη μονάδα. Αυτό δίνει ενδείξεις για το Integrated GARCH (IGARCH) υπόδειγμα των (Engle και Bollerslev, 1986).

Ο Bollerslev (1986) παρουσιάζει τις συνθήκες για την ύπαρξη των ροπών του GARCH (1,1) υποδείγματος, κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας για την κατανομή των τυχαίων σφαλμάτων ε_t . Η συνθήκη για να είναι πεπερασμένη (finite) η διακύμανση είναι $\alpha_1 + b_1 < 1$, ενώ για να ορίζεται η τέταρτη ροπή χρειάζεται επίσης να ισχύει ότι $3\alpha_1^2 + 2\alpha_1 b_1 + b_1^2 < 1$. Τότε η δεύτερη και η τέταρτη ροπή υπάρχουν και δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$E[\varepsilon_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - b_1} \quad \text{και} \quad E[\varepsilon_t^4] = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1 + b_1)}{(1 - \alpha_1 - b_1)(1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1 b_1 - b_1^2)}.$$

Επομένως, η κύρτωση της μη δεσμευμένης κατανομής (unconditional distribution) των ε_t είναι

$$\kappa = \frac{E[\varepsilon_t^4]}{(E[\varepsilon_t^2])^2} = 3 + \frac{6\alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1 b_1 - b_1^2}.$$

Όπως παρατηρούμε, η κύρτωση είναι πάντα μεγαλύτερη του 3, δηλαδή μεγαλύτερη από την τιμή της κύρτωσης της κανονικής κατανομής. Επομένως, η κατανομή των ε_t έχει πιο παχιές ουρές από την κανονική κατανομή και το GARCH υπόδειγμα συλλαμβάνει την ιδιότητα των ‘παχιών ουρών’ των χρηματοοικονομικών δεδομένων.

Ένα ελκυστικό χαρακτηριστικό των ARCH και GARCH υποδειγμάτων είναι ότι, παρά την υπόθεση της δεσμευμένης κανονικής κατανομής των σφαλμάτων, η μη δεσμευμένη κατανομή δεν είναι κανονική και έχει πιο παχιές ουρές από την κανονική κατανομή. Ωστόσο,

εμπειρικές έρευνες έδειξαν ότι η μη δεσμευμένη κατανομή των εκτιμημένων ARCH και GARCH υποδειγμάτων δεν ήταν ιδιαίτερα λεπτόκυρτη ώστε να προσαρμόσει με ακρίβεια την κατανομή των χρηματοοικονομικών αποδόσεων. Για το λόγο αυτό ο Bollerslev (1987) χρησιμοποίησε την Student-t κατανομή, η οποία έχει πιο παχιές ουρές από την κανονική κατανομή, και όταν οι βαθμοί ελευθερίας τείνουν στο άπειρο προσεγγίζει την κανονική κατανομή.

2.3.3 Υποδείγματα EGARCH

Τα υποδείγματα ARCH και GARCH συλλαμβάνουν το ‘volatility clustering’ φαινόμενο και γι’ αυτό εφαρμόζονται με επιτυχία σε εμπειρικές εφαρμογές. Ωστόσο παρουσιάζουν μερικά βασικά μειονεκτήματα λόγω της συναρτησιακής τους μορφής. Συγκεκριμένα, τα υποδείγματα ARCH και GARCH υποθέτουν ότι οι μελλοντικές τιμές του σ_t^2 εξαρτώνται μόνο από το μέγεθος του ε_t , και όχι από το πρόσημό του (θετικό ή αρνητικό). Δηλαδή, η δεσμευμένη διακύμανση σ_t^2 παρουσιάζεται (θεωρείται) συμμετρική ως προς τις προηγούμενες χρονικές διαταραχές ε_{t-i} . Όμως, μια τέτοια συναρτησιακή μορφή ενδέχεται να είναι ακατάλληλη, καθώς δεν μπορεί να συλλάβει το ‘leverage effect’, την αρνητική δηλαδή σχέση ανάμεσα στις αποδόσεις των χρηματοοικονομικών στοιχείων και τις μελλοντικές διακυμάνσεις τους. Με άλλα λόγια, η διακύμανση τείνει να αυξάνει όταν παρατηρούνται αρνητικές αποδόσεις (άσχημα νέα, bad news) και τείνει να μειώνεται όταν παρατηρούνται θετικές αποδόσεις (καλά νέα, good news). Άλλοι περιορισμοί αυτών των υποδειγμάτων, έχουν να κάνουν α) με την ερμηνεία των μόνιμων διαταραχών (shock) στη διακύμανση, και τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι του υποδείγματος, ώστε να είναι στάσιμο και β) με τις συνθήκες στις παραμέτρους του υποδείγματος (μη αρνητικές τιμές) ώστε να είναι καλά ορισμένη η δεσμευμένη διακύμανση σ_t^2 σε κάθε χρονική στιγμή t . Οι συνθήκες αυτές μπορεί να προκαλέσουν δυσκολίες κατά την διαδικασία εκτίμησης του υποδείγματος.

Ο Nelson (1991) πρότεινε το Exponential GARCH (EGARCH) υπόδειγμα, το οποίο ξεπερνά τους παραπάνω περιορισμούς, και χρησιμοποιεί την Generalized Error Distribution (Box και Tiao, 1973), η οποία μπορεί να συλλάβει την ιδιότητα των παχιών ουρών που εμφανίζουν τα χρηματοοικονομικά δεδομένα. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Generalized Error Distribution με μέσο 0 και διακύμανση 1, δίνεται από:

$$f(z_t) = \frac{\nu \exp \left[-\frac{1}{2} \left| \frac{z_t}{\lambda} \right|^\nu \right]}{\lambda 2^{(1+\nu/2)} \Gamma \left(\frac{1}{\nu} \right)}, \quad -\infty < z_t < +\infty, \quad \nu > 0$$

$$\lambda = \left[\frac{2^{(-2/\nu)} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)} \right]^{1/2},$$

όπου $\Gamma(\cdot)$ είναι η συνάρτηση γάμμα, και ν είναι μία παράμετρος που δείχνει πόσο παχιές είναι οι ουρές της κατανομής. Αν $\nu = 2$ προκύπτει η κανονική κατανομή, ενώ αν $\nu < 2$ και $\nu > 2$, η κατανομή του z_t έχει αντίστοιχα πιο παχιές και πιο λεπτές ουρές από την κανονική κατανομή. Το EGARCH(p,q) υπόδειγμα έχει την ακόλουθη συναρτησιακή μορφή (περιέχει και επεξηγηματικές μεταβλητές στην εξίσωση του μέσου)

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \dots + \beta_m x_{m,t} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q b_j \ln(\sigma_{t-j}^2) + \sum_{k=1}^p [\theta_k z_{t-k} + \gamma_k (|z_{t-k}| - E|z_{t-k}|)],$$

όπου τα z_t είναι i.i.d. και ακολουθούν την GED με μέσο 0 και διακύμανση 1, σ_t^2 είναι η δεσμευμένη διακύμανση της διαδικασίας ε_t στο χρόνο t , ενώ $\sigma_t = z_t = 0$ για $t < 0$. Κάτω από την υπόθεση της GED για το z_t , ισχύει ότι

$$E|z_{t-k}| = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\nu}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)\right]^{1/2}}.$$

Αν οι συντελεστές b_j , $j = 1, \dots, q$ είναι ίσοι με το μηδέν, τότε, το υπόδειγμα λέγεται Exponential ARCH (EARCH), καθώς η εξίσωση για τη δεσμευμένη διακύμανση περιλαμβάνει μόνο προηγούμενες τιμές των τυποποιημένων παρατηρήσεων.

Η μοντελοποίηση του λογαρίθμου της δεσμευμένης διακύμανσης επιλύει τους περιορισμούς των GARCH υποδειγμάτων. Το EGARCH υπόδειγμα συλλαμβάνει το ‘leverage effect’. Η ασύμμετρη σχέση μεταξύ των αποδόσεων των χρηματοοικονομικών στοιχείων και της μελλοντικής διακύμανσης ‘λαμβάνεται’ με τη χρήση μίας συνάρτησης, η οποία εξαρτάται τόσο από το μέγεθος, όσο και από το πρόσημο του z_t . Η συνάρτηση αυτή είναι γραμμικός συνδυασμός των z_{t-k} και $|z_{t-k}|$, και δίνεται από τη σχέση:

$$g(z_{t-k}) = \theta_k z_{t-k} + \gamma_k (|z_{t-k}| - E|z_{t-k}|).$$

Έστω για παράδειγμα, ότι $\theta_k = 0$ και $\gamma_k > 0$. Τότε, το σφάλμα (innovation) στο λογάριθμο της διακύμανσης, $\ln(\sigma_t^2)$, είναι θετικό (αρνητικό) όταν η απόλυτη τιμή του z_{t-k} είναι

μεγαλύτερη (μικρότερη) από την αναμενόμενη τιμή του, δηλαδή όταν η ποσότητα $|z_{t-k}| - E|z_{t-k}|$ είναι θετική (αρνητική). Ο όρος αυτός αντιπροσωπεύει την επίδραση του μεγέθους (magnitude). Ας υποθέσουμε ότι $\theta_k < 0$ και $\gamma_k = 0$. Τότε, το σφάλμα (innovation) στη δεσμευμένη διακύμανση είναι θετικό (αρνητικό) όταν οι τυποποιημένες αποδόσεις z_{t-k} είναι αρνητικές (θετικές). Ο όρος $\theta_k z_{t-k}$ αντιπροσωπεύει την επιρροή του προσήμου. Η μοντελοποίηση του λογαρίθμου της διακύμανσης στο EGARCH υπόδειγμα επιτρέπει στη δεσμευμένη διακύμανση να είναι θετική σε κάθε χρονική στιγμή, και επομένως, δεν απαιτούνται περιορισμοί στις παραμέτρους του υποδείγματος.

2.3.4 Επεκτάσεις των ARCH και GARCH Υποδειγμάτων

Στη διεθνή βιβλιογραφία, έχει προταθεί ένας μεγάλος αριθμός εναλλακτικών υποδειγμάτων και συναρτησιακών τύπων για τη δεσμευμένη διακύμανση. Ο Engle (1982) χρησιμοποίησε ένα γραμμικό υπόδειγμα των τετραγώνων των σφαλμάτων στη δεσμευμένη διακύμανση (ARCH), ωστόσο αναφέρει ότι είναι πιθανό άλλες εναλλακτικές μορφές δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας να είναι κατάλληλες σε συγκεκριμένες εμπειρικές εφαρμογές, και πρότεινε τις ακόλουθες

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \quad \text{και} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 |\varepsilon_{t-1}|.$$

Ο Taylor (1986) πρότεινε το ακόλουθο υπόδειγμα για τη δεσμευμένη τυπική απόκλιση

$$\sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i |\varepsilon_{t-i}|.$$

Ο Geweke (1986) και ο Pantula (1986) πρότειναν το log-ARCH υπόδειγμα

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \ln(\varepsilon_{t-i}^2),$$

στο οποίο η δεσμευμένη διακύμανση είναι θετική για όλες τις τιμές των α_i , $i = 1, \dots, p$, αλλά παρουσιάζεται πρόβλημα όταν η τιμή των ε_{t-i} είναι μηδέν.

Οι Higgins και Bera (1992) πρότειναν μία γενική κλάση υποδειγμάτων, η οποία ονομάζεται nonlinear ARCH (NARCH) και έχει την ακόλουθη μορφή

$$\sigma_t^2 = \left[\varphi_0 (\sigma^2)^\delta + \varphi_1 (\varepsilon_{t-1}^2)^\delta + \dots + \varphi_p (\varepsilon_{t-p}^2)^\delta \right]^{1/\delta},$$

όπου $\sigma^2 > 0$, $\varphi_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, p$, $\delta > 0$, και για τα φ_i ισχύει ότι $\sum_{i=0}^p \varphi_i = 1$. Η

δεσμευμένη διακύμανση έχει 3 παραμέτρους, αλλά ο περιορισμός $\sum_{i=0}^p \varphi_i = 1$ μειώνει τις

παραμέτρους κατά μία. Το υπόδειγμα περιλαμβάνει το ARCH ως ειδική περίπτωση όταν $\delta = 1$, και το log-ARCH ως μία οριακή περίπτωση.

Οι Glosten, Jagannathan και Runkle (1993) χρησιμοποίησαν την ακόλουθη παραμετροποίηση

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + b_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-1}^2 I(\varepsilon_{t-1} > 0),$$

όπου I είναι η δείκτρια συνάρτηση, και η επιρροή του ε_{t-1}^2 στη δεσμευμένη διακύμανση σ_t^2 είναι διαφορετική όταν το ε_{t-1} είναι θετικό, και διαφορετική όταν είναι αρνητικό. Έτσι, το υπόδειγμα μπορεί να συλλάβει το ‘leverage effect’.

Ο Zakoian (1994) χρησιμοποίησε μια διαφορετική προσέγγιση προτείνοντας το Threshold GARCH(p,q) υπόδειγμα, το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i^+ \varepsilon_{t-i}^+ - \alpha_i^- \varepsilon_{t-i}^- + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j},$$

όπου $\varepsilon_t^+ = \max(\varepsilon_t, 0)$ και $\varepsilon_t^- = \min(\varepsilon_t, 0)$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i^+ \geq 0$, $\alpha_i^- \geq 0$, $i = 1, \dots, p$, και $b_j \geq 0$, $j = 1, \dots, q$. Η παραμετροποίηση λέγεται threshold GARCH, επειδή ο συντελεστής του ε_{t-i} αλλάζει όταν το ε_{t-i} περνάει το κατώφλι (threshold) του μηδενός. Για $\alpha_i^+ = \alpha_i^- = \alpha_i$, για όλα τα $i = 1, \dots, p$, η δεσμευμένη τυπική απόκλιση δίνεται από

$$\sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i |\varepsilon_{t-i}| + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}.$$

2.3.5 Εκτίμηση των Υποδειγμάτων GARCH

Οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας για το GARCH υπόδειγμα βρίσκονται χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο των Berndt, Hall, Hall και Hausmann (1974). Οι Fiorentini, Calzolari, και Panattoni (1996) χρησιμοποίησαν αναλυτικές πρώτες και δεύτερες παραγώγους του λογαρίθμου της πιθανοφάνειας για να εκτιμήσουν τις παραμέτρους του GARCH υποδείγματος και συγκρίναν διαφορετικούς αλγορίθμους για την μεγιστοποίηση της πιθανοφάνειας. Η ευρεία αποδοχή και εφαρμογή των GARCH υποδειγμάτων οφείλεται στην ικανότητά τους να συλλαμβάνουν πολλά χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών δεδομένων. Παρακάτω, παρουσιάζεται αναλυτικά ο υπολογισμός της πιθανοφάνειας ενός GARCH(1,1) υποδείγματος κάτω από την υπόθεση της δεσμευμένης κανονικής κατανομής των ε_t . Η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας βασίζεται στην ιδέα της εύρεσης εκείνων των τιμών (εκτιμήσεων) των παραμέτρων του υποδείγματος για τις οποίες μεγιστοποιείται η πιθανότητα εμφάνισης των τιμών του χρησιμοποιούμενου δείγματος.

Έστω δείγμα Y_t , $t=1, \dots, T$ μεγέθους T , και έστω ότι το υπόδειγμα, του οποίου τις παραμέτρους θέλουμε να εκτιμήσουμε, δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} Y_t &= \varepsilon_t \\ \varepsilon_t | \Phi_{t-1} &\sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2. \end{aligned}$$

Έστω $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, b_1)$ το διάνυσμα των παραμέτρων. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για μια χρονική στιγμή t , για κάποιο ε_t δίνεται από

$$f(\varepsilon_t | \Phi_{t-1}, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}\right\}.$$

Επομένως, η από κοινού κατανομή των Y_1, Y_2, \dots, Y_T υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} f(Y_1, Y_2, \dots, Y_T | \theta) &= f(Y_T | Y_1, Y_2, \dots, Y_{T-1}, \theta) f(Y_1, Y_2, \dots, Y_{T-1} | \theta) \\ &= f(Y_T | Y_1, Y_2, \dots, Y_{T-1}, \theta) f(Y_{T-1} | Y_1, \dots, Y_{T-2}, \theta) f(Y_1, \dots, Y_{T-2} | \theta) \\ &= \dots \\ &= f(Y_T | Y_1, Y_2, \dots, Y_{T-1}, \theta) f(Y_{T-1} | Y_1, \dots, Y_{T-2}, \theta) \dots f(Y_1 | \theta) \\ &= \prod_{t=1}^T f(Y_t | \Phi_{t-1}, \theta) \\ &= \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}\right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{T}{2}} \prod_{t=1}^T (\sigma_t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}\right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{T}{2}} \prod_{t=1}^T (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2}\right\} \end{aligned}$$

Η μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι ισοδύναμη με την μεγιστοποίηση του λογαρίθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας (log-likelihood). Η log-likelihood function δίνεται από

$$\ln f(Y_1, Y_2, \dots, Y_T | \theta) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2}$$

Για υπολογίσουμε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων μεγιστοποιούμε την log-likelihood ως προς θ χρησιμοποιώντας τους περιορισμούς που ορίζουν οι συνθήκες στασιμότητας αλλά και τους περιορισμούς για να είναι καλά ορισμένη η διακύμανση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο :
ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ (FACTOR MODELS)

3.1 Εισαγωγή

Τα πολυμεταβλητά πολυπαραγοντικά (multivariate multifactor models) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προβλέψουν τις αποδόσεις των χρηματοοικονομικών στοιχείων και να εκτιμήσουν τη μεταβλητότητα και την συμμεταβολή των αποδόσεών τους. Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε κάποια βασικά πολυπαραγοντικά υποδείγματα και θα τα χρησιμοποιήσουμε για να προβλέψουμε την αναμενόμενη απόδοσή τους και τον δεσμευμένο πίνακα διακύμανσης συνδιακύμανσης. Τα στοιχεία αυτά είναι καθοριστικά στην κατασκευή χαρτοφυλακίων (asset allocation) και στη διαχείριση του κινδύνου (Risk management) των χρηματοοικονομικών δεδομένων.

Τα πολυπαραγοντικά μοντέλα διαχωρίζουν τις αποδόσεις των χρηματοοικονομικών στοιχείων σε κοινούς παράγοντες (common factors) και ειδικούς παράγοντες (specific factors). Υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες μοντέλων:

- 1) Μακροοικονομικά πολυπαραγοντικά μοντέλα: χρησιμοποιούν παρατηρήσιμες οικονομικές χρονολογικές σειρές, όπως είναι τα επιτόκια και ο πληθωρισμός.
- 2) Κύρια πολυπαραγοντικά μοντέλα: χρησιμοποιούν παρατηρήσιμα χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών στοιχείων (firm or asset specific attributes, firm size, dividend yield, industry classification).
- 3) Στατιστικά πολυπαραγοντικά μοντέλα: χρησιμοποιούν μη-παρατηρήσιμους ή λανθάνοντες παράγοντες (unobservable or latent factors).
 - Παραγοντική ανάλυση – Factor analysis
 - Ανάλυση κυρίων συνιστωσών – Principal component analysis

3.2 Το Γενικό Πολυμεταβλητό Πολυπαραγοντικό Υπόδειγμα

Οι τρεις βασικές κατηγορίες των πολυπαραγοντικών υποδειγμάτων μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$\begin{aligned}
 R_{it} &= \alpha_i + \beta_{1i}f_{1t} + \beta_{2i}f_{2t} + \dots + \beta_{ki}f_{kt} + \varepsilon_{it} \\
 &= \alpha_i + \underset{(1 \times k)(k \times 1)}{B_i' f_t} + \varepsilon_{it}
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

όπου $B_i' = (\beta_{1i}, \beta_{2i}, \dots, \beta_{ki})_{1 \times k}$ και $f_t = \begin{pmatrix} f_{1,t} \\ f_{2,t} \\ \vdots \\ f_{k,t} \end{pmatrix}_{k \times 1}$.

Στο πολυπαραγοντικό υπόδειγμα θεωρούμε ότι οι f_t είναι $I(0)$ στάσιμες σειρές, για τις οποίες ισχύει ότι

$$E(f_t) = \mu_f,$$

$$\text{Cov}(f_t) = E \left[\begin{matrix} (f_t - \mu_t) \\ k \times 1 \end{matrix} \begin{matrix} (f_t - \mu_t)' \\ 1 \times k \end{matrix} \right] = \Omega_f$$

και τα σφάλματα των χρηματοοικονομικών στοιχείων είναι ασυσχέτιστα με τους παράγοντες f_t , δηλαδή ισχύει ότι

$$\text{Cov}(f_k, \varepsilon_{it}) = 0 \text{ για όλα τα } k, i, t$$

$$\text{Ισχύει επίσης } \text{Cov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{js}) = \begin{cases} \sigma_j^2, & \text{για } i=j, t=s \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Το πολυπαραγοντικό υπόδειγμα (3.1) μπορεί να γραφεί σαν ένα Cross-sectional regression model

$$R_t = \alpha + Bf_t + \varepsilon_t$$

$\begin{matrix} N \times 1 & N \times 1 & (N \times k)(k \times 1) & N \times 1 \end{matrix}$

με πίνακα διακύμανσης συνδιακύμανσης

$$\text{Cov}(R_t) = \Omega = B\Omega_f B' + D$$

Το πολυπαραγοντικό υπόδειγμα (3.1) μπορεί επίσης να γραφεί σαν ένα Time series regression model στη μορφή

$$R_i = \mathbf{1}_T \alpha_i + F B_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N$$

$\begin{matrix} T \times 1 & (T \times 1)(1 \times 1) & (T \times k)(k \times 1) & T \times 1 \end{matrix}$

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_i') = \sigma_i^2 \mathbf{1}_T$$

$\begin{matrix} (T \times 1)(1 \times T) \end{matrix}$

όπου $\mathbf{1}_T$ είναι ένα διάνυσμα στήλη με μονάδες.

3.3 Μακροοικονομικά Πολυπαραγοντικά Υποδείγματα

Στα μακροοικονομικά πολυπαραγοντικά υποδείγματα οι παράγοντες f_t είναι παρατηρούμενες μακροοικονομικές μεταβλητές, ασυσχέτιστες με τα σφάλματα του υποδείγματος. Τα πιο βασικά Μακροοικονομικά παραγοντικά μοντέλα είναι

- 1) Sharpe (1970) – Single factor model
- 2) Chen, Roll and Ross (1986) – Multifactor model

Προβλήματα:

Η εκτίμηση των β' .

Οι διακυμάνσεις των καταλοίπων, σ_i^2 .

Οι συνδιακυμάνσεις των παραγόντων, Ω_f .

3.3.1 Sharpe's model (Single index model)

Το παραγοντικό υπόδειγμα του Sharpe δίνεται από την σχέση

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i \cdot \underbrace{R_{Mt}}_{\text{market return}} + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T$$

όπου $f_{1t} = R_{Mt}$, $\beta_{ki} = 0$, $i = 1, \dots, N$, $k = 2, \dots, K$.

Ο πίνακας διακύμανσης συνδιακύμανσης δίνεται από την σχέση

$$\Omega_{N \times N} = \sigma_M^2 \cdot \underset{(N \times 1)(1 \times N)}{BB'} + D$$

όπου $\sigma_M^2 = \text{Var}(R_{Mt})$, $B = (\beta_1, \dots, \beta_N)'$ $= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(\sigma_i^2)$, $\sigma_i^2 = \text{Var}(\varepsilon_i)$

Τα β_i και σ_i^2 εκτιμώνται με παλινδρόμηση χρονολογικών σειρών

$$\hat{\sigma}_M^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{Mt} - \bar{R}_M)^2$$

$$\bar{R}_M = \frac{\sum_{t=1}^T R_{Mt}}{T}$$

$$R_{it} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i R_{Mt} + \hat{\varepsilon}_{it} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\varepsilon}_{it} = R_{it} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i R_{Mt}$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\hat{\varepsilon}_i' \hat{\varepsilon}_i}{T-2}$$

$$\hat{\Omega} = \hat{\sigma}_M^2 \hat{B} \hat{B}' + \hat{D}$$

Πολυμεταβλητή Παλινδρόμηση (Multivariate regression)

$$R_T = X \cdot \Gamma' + E_T$$

$T \times N$ $(T \times 2)(2 \times N)$ $T \times N$

όπου $X = (1 : R_M)_{T \times 2}$, $\Gamma' = (\alpha : B)_{2 \times N}$.

Ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\Gamma}' = (X'X)^{-1} X'R_T$$

και η εκτίμηση του πίνακα διακύμανσης συνδιακύμανσης από

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T-2} \hat{E}'_T \hat{E}_T$$

όπου $\hat{E}_T = R_T - X\hat{\Gamma}'$ είναι ο πίνακας των καταλοίπων.

Ο πίνακας διακύμανσης συνδιακύμανσης του single factor model είναι στατικός (σταθερός στο χρόνο). Αυτή η υπόθεση δεν μπορεί να θεωρηθεί καλή. Μπορούμε με πολλούς τρόπους να κάνουμε τον πίνακα χρονικά μεταβαλλόμενο (time varying) (Για παράδειγμα θα μπορούσε να γραφεί ως: $\Omega = \sigma_M^2 BB' + D$, όπου τα B είναι σταθερά, και τα $\sigma_{i,t}^2$, $\sigma_{M,t}^2$, μεταβάλλονται σύμφωνα με ένα GARCH υπόδειγμα).

3.3.1 Chen, Roll and Ross (1986) model (General Multifactor model)

Το Γενικό πολυμεταβλητό πολυπαραγοντικό υπόδειγμα χρησιμοποιεί k παρατηρούμενες μακροοικονομικές μεταβλητές ως παράγοντες f_t , οι οποίοι συνήθως τυποποιούνται έτσι ώστε να έχουν μέσο μηδέν και τυπική απόκλιση ένα. Ο πίνακας διακύμανσης συνδιακύμανσης δίνεται από τη σχέση:

$$\Omega = B\Omega_f B' + D$$

όπου $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)'$, $\Omega_f = E[(f_t - \mu_f)(f_t - \mu_f)']$.

Επειδή οι παράγοντες παρατηρούνται (observable) οι πίνακες B και D μπορούν να εκτιμηθούν χρησιμοποιώντας time series regression

$$R_i = \hat{\alpha}_i 1 + F\hat{B}_i + \hat{\epsilon}_i \Rightarrow \hat{\epsilon}_i = R_i - \hat{\alpha}_i - F\hat{B}_i$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\hat{\epsilon}_i' \hat{\epsilon}_i}{T-k-1}$$

Ο πίνακας διακύμανσης συνδιακύμανσης των παραγόντων μπορεί να εκτιμηθεί ως

$$\hat{\Omega}_f = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (f_t - \bar{f})(f_t - \bar{f})'$$

όπου $\bar{f} = \frac{\sum_{t=1}^T f_t}{T}$. Ενώ ο εκτιμώμενος πίνακας διακύμανσης συνδιακύμανσης του υποδείγματος δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{\Omega} = \hat{B}\hat{\Omega}_f\hat{B}' + \hat{D}.$$

3.4 Εφαρμογή σε κατασκευή χαρτοφυλακίου: Global minimum variance portfolio

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο P, που αποτελείται από N χρηματοοικονομικά στοιχεία, ώστε η απόδοση του χαρτοφυλακίου να είναι ίση με:

$$R_p = \sum_{i=1}^N w_i R_i = w'R, \quad i = 1, \dots, N, \quad \text{όπου } R = (R_1, \dots, R_N)' \text{ είναι το διάνυσμα των}$$

αποδόσεων των χρηματοοικονομικών στοιχείων και $w' = (w_1, \dots, w_N)$ είναι το διάνυσμα των σταθμίσεων βάσει των οποίων συμμετέχει το κάθε στοιχείο στο χαρτοφυλάκιο. Αν

$\Omega = \text{Cov}(R)$, τότε, η διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι: $\sigma_{P,w}^2 = w'\Omega w$. Θέλουμε να

ελαχιστοποιήσουμε τη διακύμανση αυτή, λαμβάνοντας υπ' όψη τον περιορισμό που ισχύει

για τις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου: $\sum_{i=1}^N w_i = w'1 = 1$, όπου 1 είναι ένα διάνυσμα στήλη με

μονάδες. Η λύση, οι βέλτιστες δηλαδή σταθμίσεις, δίνονται από τη σχέση: $w = \frac{\Omega^{-1}1}{1'\Omega^{-1}1}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο :

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΩΝ-ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΩΝ

Η επέκταση των μονομεταβλητών υποδειγμάτων σε πολυμεταβλητά, και η εκτίμηση των χρονικά μεταβαλλόμενων συνδιακυμάνσεων μεταξύ των αποδόσεων των δεδομένων είναι σημαντική σε διάφορους τομείς της χρηματοοικονομικής ανάλυσης, όπως την αποτίμηση των χρηματοοικονομικών στοιχείων (asset pricing), την κατασκευή χαρτοφυλακίου (portfolio allocation), την διαχείριση κινδύνου (risk management). Δύο βασικά προβλήματα που παρουσιάζονται στα πολυμεταβλητά υποδείγματα είναι ο μεγάλος αριθμός των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν, και η δυσκολία στην εκτίμηση, λόγω του περιορισμού ότι ο πίνακας διακύμανσης - συνδιακύμανσης πρέπει να είναι θετικά ορισμένος.

Θεωρούμε ότι έχουμε δεδομένα της μορφής

$$y_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

όπου κάθε $y_t = (y_{1,t}, \dots, y_{N,t})$ είναι ένα $N \times 1$ διάνυσμα. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση του μέσου και η δεσμευμένη κατανομή των τυχαίων σφαλμάτων (δεδομένου την πληροφορία μέχρι τη χρονική στιγμή $t-1$, δίνονται από τις σχέσεις:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t | \Phi_{t-1} \sim N_N(0, \Sigma_t),$$

όπου μ είναι ένα $N \times 1$ διάνυσμα με σταθερές, ε_t είναι ένα $N \times 1$ διάνυσμα με τυχαία σφάλματα, Φ_{t-1} είναι το σύνολο πληροφορίας ως τη χρονική στιγμή $t-1$, Σ_t είναι ο $N \times N$ πίνακας διακύμανσης - συνδιακύμανσης με στοιχεία $\sigma_{i,t}^2$ και $\sigma_{ij,t}$, $i = 1, \dots, N$, $j = i+1, \dots, N$, όπου $\sigma_{i,t}^2$ είναι η διακύμανση της i μεταβλητής τη χρονική στιγμή t , και $\sigma_{ij,t}$ είναι η συνδιακύμανση μεταξύ της i και της j μεταβλητής τη χρονική στιγμή t . Διαφορετικά πολυμεταβλητά μοντέλα μεταβαλλόμενης διακύμανσης επιβάλλουν διαφορετικούς περιορισμούς στην ερμηνεία του τρόπου κατά τον οποίο τα προηγούμενα σφάλματα επιδρούν στις δεσμευμένες διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις.

4.1. Πολυμεταβλητό ARCH Υπόδειγμα (Multivariate ARCH model)

Οι Kraft και Engle (1982) πρότειναν το πολυμεταβλητό ARCH(p) υπόδειγμα, το οποίο επιτρέπει στα στοιχεία του δεσμευμένου πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης, να αλλάζει στο χρόνο. Το υπόδειγμα μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$vech(\Sigma_t) = C + \sum_{i=1}^p A_i vech(\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1}), \quad (4.1)$$

όπου Σ_t είναι $N \times N$ πίνακας διακύμανσης, $vech(\cdot)$ είναι ο τελεστής που εισαγάγει σε πίνακα στήλη τα διαγώνια και τα κάτω τριγωνικά στοιχεία ενός συμμετρικού πίνακα, C είναι ένα $\frac{N(N+1)}{2} \times 1$ διάνυσμα, και A_i , $i = 1, \dots, p$ είναι $\frac{N(N+1)}{2} \times \frac{N(N+1)}{2}$ πίνακες. Ο

συνολικός αριθμός παραμέτρων, είναι $\frac{N(N+1)}{2} + p \left(\frac{N(N+1)}{2} \right)^2$. Η σχέση (4.1),

ονομάζεται ‘vech αναπαράσταση’ ενός πολυμεταβλητού ARCH υποδείγματος. Για $N = 2$ (χρονολογικές σειρές) και $p = 1$ (ARCH όροι), η εξίσωση γράφεται ως:

$$vech(\Sigma_t) = C + A_1 vech(\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1})$$

ή

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 \\ \sigma_{21,t} \\ \sigma_{2,t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1} \varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Ο πίνακας διακύμανσης Σ_t πρέπει να είναι θετικά ορισμένος σε κάθε χρονική στιγμή, για οποιοδήποτε ε_{t-1} , κάτι που θέτει περιορισμούς στα στοιχεία του πίνακα C και τις γραμμές και τις στήλες του A_1 . Οι αναγκαίες συνθήκες ώστε να είναι ο Σ_t θετικά ορισμένος, είναι:

$$\begin{aligned} c_{11} &> 0, \quad c_{22} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{21}^2 > 0, \\ \alpha_{11} &\geq 0, \quad \alpha_{13} \geq 0, \quad \alpha_{11}\alpha_{13} - \frac{1}{4}\alpha_{12}^2 \geq 0, \\ \alpha_{31} &\geq 0, \quad \alpha_{33} \geq 0, \quad \alpha_{31}\alpha_{33} - \frac{1}{4}\alpha_{32}^2 \geq 0, \\ \alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{22}^2 &\geq 0, \quad \alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{21}^2 \geq 0, \quad \alpha_{13}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(βλέπε, για λεπτομέρειες, Kraft και Engle, 1982).

Για πολυμεταβλητά συστήματα με μεγαλύτερες διαστάσεις, αντίστοιχοι περιορισμοί επιβάλλονται στις γραμμές και τις στήλες του πίνακα A_1 . Στη σχέση (4.2), κάθε $\sigma_{i,t}^2$ και $\sigma_{ij,t}$, εξαρτάται μόνο από τα τετράγωνα των προηγούμενων καταλοίπων και τα cross-products όλων των μεταβλητών στο σύστημα. Μια απλή υπόθεση θα είναι να θεωρήσουμε ότι οι διακυμάνσεις εξαρτώνται μόνο από τα προηγούμενα τετραγωνισμένα κατάλοιπα των μεταβλητών στις οποίες αναφέρονται, και οι συνδιακυμάνσεις από τα προηγούμενα cross-products. Στην περίπτωση αυτή, οι πίνακες A_i , $i = 1, \dots, p$ στην (4.1) είναι διαγώνιοι και ο

αριθμός των παραμέτρων γίνεται $(p+1)\frac{N(N+1)}{2}$. Για $N=2$ και $p=1$, η εξίσωση γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 \\ \sigma_{21,t} \\ \sigma_{2,t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix}. \quad (4.3).$$

Για να είναι ο Σ_t θετικά ορισμένος στην (4.3) θα πρέπει:

$$\begin{aligned} c_{21} > 0, \quad c_{22} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{21}^2 > 0 \\ \alpha_{11} \geq 0, \quad \alpha_{22} \geq 0, \quad \alpha_{33} \geq 0, \quad \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

4.2. Πολυμεταβλητό GARCH Υπόδειγμα (Multivariate GARCH model)

Οι Bollerslev, Engle Wooldridge (1982) εισήγαγαν το πολυμεταβλητό GARCH(p,q) υπόδειγμα. Το υπόδειγμα μπορεί να γραφεί κατά τη ‘vech αναπαράσταση’ ως:

$$vech(\Sigma_t) = C + \sum_{i=1}^p A_i vech(\varepsilon_{t-i}\varepsilon'_{t-i}) + \sum_{j=1}^q B_j vech(\Sigma_{t-j}), \quad (4.4)$$

όπου ο Σ_t είναι $N \times N$ πίνακας διακύμανσης, $vech(\cdot)$ είναι ο τελεστής που εισαγάγει σε διάνυσμα στήλη τα κάτω τριγωνικά στοιχεία ενός συμμετρικού πίνακα, C είναι ένα $\frac{N(N+1)}{2} \times 1$ διάνυσμα, A_i , $i = 1, \dots, p$ και B_j , $j = 1, \dots, q$, είναι $\frac{N(N+1)}{2} \times \frac{N(N+1)}{2}$

πίνακες. Ο συνολικός αριθμός παραμέτρων είναι $\frac{N(N+1)}{2} + (p+q)\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2$. Για

$N=2$ και $p=q=1$, η εξίσωση γράφεται (4.4) ως:

$$vech(\Sigma_t) = C + A_1 vech(\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}) + B_1 vech(\Sigma_{t-1}) \quad (4.5)$$

ή

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 \\ \sigma_{21,t} \\ \sigma_{2,t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,t-1}^2 \\ \sigma_{21,t-1} \\ \sigma_{2,t-1}^2 \end{bmatrix}$$

Το υπόδειγμα (4.4) επιτρέπει στα στοιχεία του πίνακα δεσμευμένης διακύμανσης, να εξαρτώνται από προηγούμενες τιμές των τετραγώνων και των cross-products όλων των μεταβλητών στο σύστημα, αλλά και από προηγούμενες τιμές των στοιχείων του πίνακα δεσμευμένης διακύμανσης. Το υπόδειγμα είναι πολύ γενικό και έχει ένα μεγάλο αριθμό

παραμέτρων. Μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση ότι οι διακυμάνσεις εξαρτώνται μόνο από τα δικά τους προηγούμενα τετραγωνισμένα κατάλοιπα και τις προηγούμενες διακυμάνσεις, και ότι οι συνδιακυμάνσεις εξαρτώνται μόνο από τα προηγούμενα cross-products και τις προηγούμενες συνδιακυμάνσεις. Στην προκειμένη περίπτωση, οι πίνακες A_i , $i = 1, \dots, p$ και B_j , $j = 1, \dots, q$, στην εξίσωση (4.4), είναι διαγώνιοι και ο αριθμός των παραμέτρων γίνεται $(p+q+1)\frac{N(N+1)}{2}$. Για $N = 2$ και $p = q = 1$, η εξίσωση γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 \\ \sigma_{21,t} \\ \sigma_{2,t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,t-1}^2 \\ \sigma_{21,t-1} \\ \sigma_{2,t-1}^2 \end{bmatrix}.$$

Ο μη-δεσμευμένος πίνακας διακύμανσης στο υπόδειγμα αυτό δίνεται από:

$$E[\text{vech}(\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1})] = [I - A_1 - B_1]^{-1} C.$$

Ο πίνακας διακύμανσης Σ_t πρέπει να είναι θετικά ορισμένος. Στην πλήρη, αλλά και στη διαγώνια αναπαράσταση του υπόδειγματος, ο περιορισμός δεν είναι εύκολο να ελεγχθεί, και είναι δύσκολο να επιβληθεί κατά τη διαδικασία εκτίμησης.

4.3. Πολυμεταβλητό BEKK Υπόδειγμα

Οι Engle και Kroner (1995) πρότειναν μια νέα πολυμεταβλητή GARCH παραμετροποίηση, γνωστή ως ‘BEKK αναπαράσταση’, η οποία χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\Sigma_t = C_0^* C_0^* + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^p A_{ik}^* \varepsilon_{t-i} \varepsilon'_{t-i} A_{ik}^* + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q B_{ik}^* \Sigma_{t-i} B_{ik}^*, \quad (4.6)$$

όπου Σ_t είναι ο $N \times N$ πίνακας διακύμανσης, οι C_0^* , A_{ik}^* και B_{ik}^* , είναι $N \times N$ πίνακες παραμέτρων, με τον C_0^* τριγωνικό, ενώ η γενικότητα της διαδικασίας εξασφαλίζεται από το K . Το απλό GARCH(1,1) υπόδειγμα, με $K = 1$, γράφεται ως:

$$\Sigma_t = C_0^* C_0^* + A_{11}^* \varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1} A_{11}^* + B_{11}^* \Sigma_{t-1} B_{11}^*, \quad (4.7)$$

Στη διμεταβλητή περίπτωση, το υπόδειγμα γράφεται:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 & \sigma_{12,t} \\ \sigma_{21,t} & \sigma_{2,t}^2 \end{bmatrix} &= C_0^{*'} C_0^* + \begin{bmatrix} \alpha_{11}^* & \alpha_{12}^* \\ \alpha_{21}^* & \alpha_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1} \varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11}^* & \alpha_{12}^* \\ \alpha_{21}^* & \alpha_{22}^* \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \beta_{11}^* & \beta_{12}^* \\ \beta_{21}^* & \beta_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,t-1}^2 & \sigma_{12,t-1} \\ \sigma_{21,t-1} & \sigma_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11}^* & \beta_{12}^* \\ \beta_{21}^* & \beta_{22}^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Το BEKK υπόδειγμα παρέχει λύση για το ότι ο πίνακας διακύμανσης πρέπει να είναι θετικά ορισμένος. Λόγω του ότι ο δεύτερος και ο τρίτος όρος στο δεξί μέρος των εξισώσεων (4.7) και (4.8) εκφράζονται ως τετραγωνικές μορφές, ο πίνακας διακύμανσης είναι θετικά ορισμένος εάν ο $C_0^{*'} C_0^*$ είναι θετικά ορισμένος. Ο αριθμός των προς εκτίμηση παραμέτρων είναι $\frac{N(N+1)}{2} + 2N^2$. Ο μη-δεσμευμένος πίνακας διακύμανσης σε μια ‘BEKK αναπαράσταση’ δίνεται από:

$$E[\text{vec}(\varepsilon_t \varepsilon_t')] = \left[I - (A_{11}^* \otimes A_{11}^*)' - (B_{11}^* \otimes B_{11}^*)' \right]^{-1} \text{vec}(C_0^{*'} C_0^*),$$

όπου $\text{vec}(\cdot)$ είναι ο τελεστής που εισαγάγει σε διάνυσμα στήλη τις στήλες ενός πίνακα., και \otimes συμβολίζει το Kronecker product μεταξύ δύο πινάκων.

- Ορισμός

Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας και B ένας $p \times q$ πίνακας. Ο $mp \times nq$ πίνακας που

ορίζεται ως $\begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$, ονομάζεται Kronecker product των A και B και

συμβολίζεται ως $A \otimes B$.

4.4. Πολυμεταβλητό GARCH Υπόδειγμα με σταθερές δεσμευμένες συσχετίσεις (Constant Conditional Correlations - CCC)

Το υπόδειγμα προτάθηκε από τον Bollerslev (1990) και υποθέτει μεταβαλλόμενες χρονικά διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις, αλλά σταθερές δεσμευμένες συσχετίσεις. Ο δεσμευμένος πίνακας διακύμανσης Σ_t εκφράζεται ως:

$$\Sigma_t = D_t R D_t,$$

όπου R είναι ένας $N \times N$ πίνακας συσχετίσεων, σταθερός χρονικά, με στοιχεία ρ_{ij} , $i = 1, \dots, N$, $j = i+1, \dots, N$, $i \neq j$, και D_t είναι ο $N \times N$ πίνακας με στοιχεία τις δεσμευμένες τυπικές αποκλίσεις $\sigma_{i,t}$, $i = 1, \dots, N$. Οι διακυμάνσεις $\sigma_{i,t}^2$ θεωρείται ότι ακολουθούν μονομεταβλητά GARCH(p,q) μοντέλα:

$$\sigma_{i,t}^2 = \alpha_{0i} + \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} \varepsilon_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} \sigma_{i,t-j}^2, \quad i = 1, \dots, N$$

Ο πίνακας διακύμανσης Σ_t είναι θετικά ορισμένος για κάθε t , αν και μόνο αν ο σταθερός δεσμευμένος πίνακας συσχετίσεων είναι θετικά ορισμένος και οι δεσμευμένες διακυμάνσεις είναι καλά ορισμένες. Οι συγκεκριμένοι περιορισμοί μπορούν εύκολα να ικανοποιηθούν, σε σχέση με άλλες παραμετροποιήσεις του πίνακα διακύμανσης. Ο αριθμός των παραμέτρων είναι ίσος με $\frac{N(N-1)}{2} + N(1+p+q)$, οι οποίες αποτελούνται από τα ρ_{ij} ,

α_{0i} , α_{ij} και β_{ij} . Για $N = 2$ και $p = q = 1$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sigma_{i,t}^2 &= \alpha_{0i} + \alpha_{i1} \varepsilon_{i,t-1}^2 + \beta_{i1} \sigma_{i,t-1}^2, \quad i = 1, 2 \\ \sigma_{12,t} &= \rho_{12} (\sigma_{1,t}^2 \sigma_{2,t}^2)^{1/2}, \quad -1 \leq \rho_{12} \leq 1. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή, για να είναι ο Σ_t θετικά ορισμένος, θα πρέπει $\alpha_{0i} > 0$, $\alpha_{i1} \geq 0$, $\beta_{i1} \geq 0$, $i = 1, 2$ και $-1 < \rho_{12} < 1$. Για να είναι πεπερασμένη η διακύμανση και να υπάρχει στασιμότητα, θα πρέπει επίσης $\alpha_{i1} + \beta_{i1} < 1$ για $i = 1, 2$.

Η υπόθεση σταθερών δεσμευμένων συσχετίσεων είναι εύλογη σε ορισμένες εμπειρικές μελέτες. Όμως, παραμένει περιοριστική, καθώς η μεταβολή των δεσμευμένων συσχετίσεων των χρηματοοικονομικών αποδόσεων με το χρόνο, αποτελεί ένα φαινόμενο το οποίο παρατηρείται συχνά στα χρηματοοικονομικά δεδομένα. Για παράδειγμα, οι συσχετίσεις μεταξύ χρηματαγορών τείνουν να αυξάνονται σε περιόδους μεγάλης μεταβλητότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο :
ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

5.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ : HEDGE FUNDS

5.1.1 Εισαγωγή

Κατά την τελευταία δεκαετία παρουσιάζεται έντονο ενδιαφέρον για τα hedge funds. Πρόκειται για εναλλακτικές μορφές επένδυσης οι οποίες έχουν κάποια μοναδικά (σε σχέση με τις παραδοσιακές μορφές επένδυσης, όπως είναι τα αμοιβαία κεφάλαια) χαρακτηριστικά:

- i) Έχουν ευελιξία σε σχέση με τον τύπο των χρηματοοικονομικών στοιχείων και τον τύπο των θέσεων που λαμβάνουν – μπορούν να τοποθετούνται σε διεθνείς και εγχώριες αγορές, καθώς επίσης σε παράγωγα προϊόντα, και επιτρέπονται short και long θέσεις.
- ii) Δεν δημοσιεύουν - παρουσιάζουν τις κινήσεις τους και τις ενέργειές τους.
- iii) Διευθύνονται από ειδικά εκπαιδευμένους και εξειδικευμένους hedge fund managers οι οποίοι ακολουθούν δυναμικές, πολύπλοκες στρατηγικές επένδυσης και σαν αποτέλεσμα τα χαρτοφυλάκια που κατασκευάζουν επηρεάζονται από πολλούς παράγοντες κινδύνου. Παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στα χρηματοοικονομικά να προσδιορίσει κανείς τους παράγοντες που επηρεάζουν τις αποδόσεις των hedge funds καθώς και την ικανότητα (skill) του manager και την επίδοση - απόδοση στο χρόνο (performance) του εκάστοτε hedge fund. Η ικανότητα του manager και η απόδοση του χαρτοφυλακίου προσδιορίζονται από την σταθερά ('alpha') της παλινδρόμησης των αποδόσεων του hedge fund (Y) με κάποιους παράγοντες κινδύνου (risk factors, X) που τις επηρεάζουν. Οι παράγοντες αυτοί μπορεί να είναι οι παράγοντες των Fama and French (1993) – παράγοντες μεγέθους και αξίας (size and value factors), οι παράγοντες του Carhart (1997), παράγοντες που σχετίζονται με την αγορά ομολόγων, μη γραμμικοί παράγοντες που σχετίζονται με παράγωγα προϊόντα (Glosten and Jagannathan, 1994, Agarwal and Naik, 2004) και άλλοι.

Αν και στη βιβλιογραφία έχουν αναγνωριστεί κάποιοι παράγοντες κινδύνου που επηρεάζουν τις αποδόσεις των hedge funds, παραμένει σε μεγάλο βαθμό αναπάντητο το ερώτημα για το ποιοι παράγοντες επιδρούν στις αποδόσεις και πώς αυτοί θα προσδιοριστούν 'καλύτερα' με βάση τα χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών δεδομένων. Μια απλή μέθοδος που χρησιμοποιείται από τους αναλυτές (Agarwal and Naik, 2004, Fung and Hsieh, 2000, 2001, Liang, 1999) είναι η μέθοδος της βηματικής παλινδρόμησης (stepwise regression). Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται ευρέως λόγω της ταχύτητας και της απλότητας της, παρόλο που παρουσιάζει σημαντικά μειονεκτήματα όπως η έλλειψη στατιστικής συμπερασματολογίας και η έλλειψη μοντελοποίησης βασικών χαρακτηριστικών των χρηματοοικονομικών δεδομένων όπως ετεροσκεδαστικότητα, παχιές ουρές, ασυμμετρία και άλλα.

Άλλες μεθοδολογίες που χρησιμοποιούνται για την επιλογή του καταλληλότερου υποδείγματος (model selection) ή των μεταβλητών-παραγόντων (variable selection) που επηρεάζουν τις αποδόσεις των hedge funds είναι οι μέθοδοι που προτάθηκαν από τον Akaike (1973) και τον Schwarz (1978) γνωστότερες ως κριτήρια AIC (Akaike's Information Criterion) και BIC (Bayesian Information Criterion). Οι μεθοδολογίες αυτές λαμβάνουν υπόψη τους τα χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών δεδομένων (σε αντίθεση με τη μέθοδο της βηματικής παλινδρόμησης), αλλά έχουν ένα σοβαρό μειονέκτημα: είναι υπολογιστικά χρονοβόρες, γιατί πρέπει να εκτιμηθούν όλα τα δυνατά υποδείγματα και οι αντίστοιχες συναρτήσεις πιθανοφάνειας για να υπολογιστεί το AIC και το BIC για κάθε υπόδειγμα. Τα κριτήρια AIC και BIC υπολογίζονται, αντίστοιχα, με βάση τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \text{AIC}_m &= -2 \cdot \log \text{lik}_m + 2\theta_m \\ \text{BIC}_m &= -2 \cdot \log \text{lik}_m + \theta_m \cdot \log T \end{aligned}$$

όπου $\log \text{lik}_m$ είναι ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας, θ_m είναι το πλήθος των παραμέτρων του υποδείγματος και T είναι το πλήθος των παρατηρήσεων. Καλύτερο υπόδειγμα θεωρείται εκείνο που δίνει τη μικρότερη τιμή AIC ή BIC.

Στη βιβλιογραφία έχουν παρατηρηθεί (βλέπε Vrontos, Vrontos and Giamouridis, 2007) προβλήματα σχετικά με τις πιο πάνω μεθοδολογίες, γιατί δεν λαμβάνουν υπόψη την αβεβαιότητα που υπάρχει στην επιλογή των παραγόντων κινδύνου (model uncertainty). Προκειμένου να ληφθεί υπόψη η αβεβαιότητα αυτή, μια μεθοδολογία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι η Μπεϋζιανή, η οποία εκτιμά την εκ των υστέρων κατανομή των υποδειγμάτων (Bayesian model selection strategy).

5.1.2 Εφαρμογή

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο της βηματικής παλινδρόμησης για να προσδιορίσουμε ποιοι παράγοντες κινδύνου (risk factors) επηρεάζουν τις αποδόσεις ενός δείκτη hedge funds. Συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε μηνιαία δεδομένα του δείκτη Credit Suisse/ Tremond Hedge Fund Index (CSFBComp_new) ο οποίος είναι αντιπροσωπευτικός της αγοράς των hedge funds και καλύπτει την περίοδο από τον Ιανουάριο 1994 ως τον Δεκέμβριο 2005. Οι παράγοντες που χρησιμοποιούμε ως επεξηγηματικές μεταβλητές (risk factors) είναι παράγοντες που προτείνονται στη βιβλιογραφία (Agarwal and Naik, 2004, Vrontos, Vrontos and Giamouridis, 2007) και αποτελούνται από τις 14 ακόλουθες μεταβλητές, που αφορούν αποδόσεις

- the Russel 3000 equity index (RUS)
- the Russel 3000 equity index lagged once (RUS(-1))
- the Morgan Stanley Capital International (MSCI) world excluding the USA index (MXUS)

- the MSCI emerging markets index (MEM)
- the Salomon Brothers world government and corporate bond index (SBGC)
- the Salomon Brothers world government bond index (SBWG)
- the Lehman high yield index (LHY)
- the Goldman Sachs commodity index (GSCI)
- the Federal Reserve Bank competitiveness weighted dollar-index (FRBI)
- Fama and French's (1993) 'size' (SMB) and 'book-to-market' (HML)
- Carhart's (1997) 'momentum' factors (MOM)
- the difference between the yield on the BAA-rated corporate bonds and the 10-year Treasury bonds (DEFSPR)
- and the change in equity implied volatility index VIX.

Αυτά τα δεδομένα καλύπτουν επίσης την περίοδο από τον Ιανουάριο 1994 ως τον Δεκέμβριο 2005.

Ακολουθεί αναλυτικά το πρόγραμμα σε γλώσσα MATLAB που προσδιορίζει τους πιο σημαντικούς παράγοντες κινδύνου την απόδοση του δείκτη:

```
%Load Data
load CSFBCompEx_new.txt
data=CSFBCompEx_new;

load datafanalyse_new.txt
datafactors=datafanalyse_new;
[T,plithosmet]=size(data)
[T,plithosfactors]=size(datafactors)
%=====

%calculate summary statistics
[mean(data) std(data) median(data) kurtosis(data) skewness(data)]

%BEST STEP MODEL
[B,SE,PVAL,INMODEL,STATS,NEXTSTEP,HISTORY]=stepwisefit(datafactors,data, 'display', 'off');
stepmodelhelp=zeros(1,plithosfactors);
for i=1:plithosfactors
    if (INMODEL(i)==1)
        stepmodelhelp(i)=i;
    end
end
stepmodelhelp(stepmodelhelp==0)=[ ];
stepmodel=zeros(1,plithosfactors);
stepmodel(1:size(stepmodelhelp,2))=stepmodelhelp
```

Σύμφωνα με τη μέθοδο της βηματικής παλινδρόμησης, οι μεταβλητές RUS (1), MEM (4), SMB (5), MOM (7), SBGC (8), SBWG (9), DEFSPR (12), VIX (14) είναι οι πιο κατάλληλες για να εξηγήσουν τις αποδόσεις του δείκτη Credit Suisse/ Tremond Hedge Fund.