Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα

Ενότητα: Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις

Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής

1. Σκοποί ενότητας

Παρουσιάζονται στοιχεία της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων που είναι απαραίτητες για τον χρηματοοικονομικό και λογιστικό αναλυτή.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Διαφορικές Εξισώσεις, Λύση γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές , Επίλυση εξισώσεων πρώτης τάξης, Επίλυση εξισώσεων δεύτερης τάξης, Ειδικές Διαφορικές Εξισώσεις, Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις (Exact Differential Equation), Διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές.

3. Διαφορικές Εξισώσεις

Ορισμός: Μια συναρτησιακή εξίσωση (functional equation) είναι μια εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι συνάρτηση. Η λύση μιας συναρτησιακής εξίσωσης είναι μια συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση ταυτοτικά.

Ορισμός: Μια συναρτησιακή εξίσωση της μορφής:

$$f\left(\frac{d^{\nu}y}{dx^{\nu}},\frac{d^{\nu-1}y}{dx^{\nu-1}},\ldots,\frac{d^{2}y}{dx^{2}},\frac{dy}{dx},y(x),x\right) \quad (1),$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής ονομάζεται συνήθης διαφορική εξίσωση (ordinary differential equation).

Παρατήρηση: Καθώς οι διαφορικές εξισώσεις συνήθως περιγράφουν τις μεταβολές ενός δυναμικού συστήματος, συχνά η άγνωστη συνάρτηση y είναι συνάρτηση του χρόνου t.

Παρατήρηση: Η τάξη (order) της διαφορικής εξίσωσης είναι η τάξη της υψηλότερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση. Άρα η (1) είναι διαφορική εξίσωση ν - τάξης.

Παρατήρηση: Αν η y είναι συνάρτηση δύο ή περισσότερων μεταβλητών και στην εξίσωση υπεισέρχονται μερικές παράγωγοι, τότε η εξίσωση ονομάζεται μερική (partial) διαφορική εξίσωση.

Ορισμός: Όταν η μεταβλητή x εμφανίζεται απ’ ευθείας ως ανεξάρτητη μεταβλητή, όπως στην (1), η διαφορική εξίσωση ονομάζεται μη – αυτόνομη (non – autonomous).

Ορισμός: Όταν η μεταβλητή x υπεισέρχεται στην διαφορική εξίσωση μόνο μέσω της $y(x)$, όπως η:
$f\left(\frac{d^{\nu}y}{dx^{\nu}},\frac{d^{\nu-1}y}{dx^{\nu-1}},\ldots,\frac{d^{2}y}{dx^{2}},\frac{dy}{dx},y(x)\right)$, τότε η διαφορική εξίσωση ονομάζεται αυτόνομη (autonomous).

Ορισμός: Μια διαφορική εξίσωση ονομάζεται γραμμική, όταν είναι γραμμική ως προς την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ και τις παραγώγους της.

Παρατήρηση: Η γενική γραμμική διαφορική εξίσωση ν-οστής τάξης, με σταθερούς συντελεστές γράφεται ως:
$\frac{d^{\nu}y(x)}{dx^{\nu}}+\ldots+a_{\nu-1}\frac{dy(x)}{dx}$ αν $y(x)=g(x)$ ή $\frac{d^{\nu}y(t)}{dt^{\nu}}+\ldots+a_{\nu-1}\frac{dy(t)}{dt}$ αν $y(t)=g(t)$.

Παρατήρηση: Όταν οι συντελεστές $a_i,\ i=0,\ldots,\nu$ είναι συναρτήσεις της μεταβλητής (x ή t), τότε έχουμε διαφορική εξίσωση με μεταβλητούς συντελεστές.

Παρατήρηση: Αν $g(x)$ ή $g(t)=0$ ($g(x)$ ή $g(t)\neq 0$) η διαφορική εξίσωση ονομάζεται ομογενής (μη – ομογενής).

Παράδειγμα: Μια ομογενής συνήθης γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης είναι η:
$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=0 \Leftrightarrow \dot{y}+ay=0$ όπου $\dot{y}=\frac{dy(t)}{dt}$.
Η λύση της είναι $y(t)=Ae^{-at}$ για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό A.

Από τις άπειρες λύσεις της εξίσωσης (μια για κάθε A) μπορεί να προσδιοριστεί μία αν υπάρχει και κάποια πλευρική ή αρχική συνθήκη.
π.χ. αν για $t = t_0$ η συνάρτηση είναι $y(t_0) = y_0$, τότε η $y(t) = y_0 e^{-a(t-t_0)}$ θα ήταν η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη.

Η γενική λύση $y(t) = Ae^{-at}$ είναι μια οικογένεια συναρτήσεων ενώ η ορισμένη λύση $y(t) = y_0 e^{-a(t-t_0)}$ είναι η μία συνάρτηση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(t_0) = y_0$.

3.1 Λύση γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές

Θεώρημα 1: Αν $y_1(t)$ είναι μια λύση της εξίσωσης:

$$\frac{d^v y_1(t)}{dt^v} + \ldots + a_{v-1}\frac{dy_1(t)}{dt} + a_v y_1(t) = 0 \quad (2),$$

τότε και η $Ay_1(t)$, όπου A σταθερά, είναι λύση της εξίσωσης αυτής.

Θεώρημα 2: Αν $y_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (2), τότε η $A_1 y_1(t) + A_2 y_2(t)$, όπου $A_1,\ A_2$ είναι σταθερές, είναι λύση της (2). Η ιδιότητα ισχύει για οποιοδήποτε αριθμό $k < v$ λύσεων.

Θεώρημα 3: Αν $f(t, A_1, \ldots, A_v)$ είναι μια γενική λύση της (2) και $\bar{y}(t)$ μια ειδική λύση που ικανοποιεί την $g(t)$, τότε η $y(t) = \bar{y}(t) + f(t, A_1, \ldots, A_v)$ είναι η γενική λύση της

$$\frac{d^v y(t)}{dt^v} + \ldots + a_{v-1}\frac{dy(t)}{dt} + a_v y(t) = g(t).$$

Παρατήρηση: Με βάση το τελευταίο θεώρημα, η μέθοδος για τη λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{d^v y(t)}{dt^v} + \ldots + a_{v-1}\frac{dy(t)}{dt} + a_v y(t) = g(t),$$

περιλαμβάνει τρία στάδια:

1. Τίθεται $g(t) = 0$ και προσδιορίζεται η λύση της ομογενούς εξίσωσης.
2. Προσδιορίζεται μια ειδική λύση $\bar{y}(t)$ για τη μη ομογενή εξίσωση.
3. Η λύση προκύπτει από το άθροισμα των (α) και (β).

3.2 Εξισώσεις πρώτης τάξης: Επίλυση

Στη γενική της μορφή: $\dot{y}(t) + ay(t) = g(t)$, $a \neq 0$, η λύση προσδιορίζεται με βάση τα παρακάτω βήματα:

1. Τίθεται $g(t) = 0$ και

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{dy(t)}{dt} = -ay(t) \Leftrightarrow \frac{dy(t)}{y(t)} = -adt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy(t)}{y(t)} = -\int a dt \Leftrightarrow \ln|y(t)| + c_1 = -at + c_2 \Leftrightarrow$$

(ολοκληρώνοντας κατά μέλη λαμβάνουμε:) $\Leftrightarrow \int \frac{dy(t)}{y(t)} = -\int a dt \Leftrightarrow \ln|y(t)| + c_1 = -at + c_2 \Leftrightarrow$

(αν $y(t) > 0$) $\Leftrightarrow \ln y(t) = -at + c \Leftrightarrow y(t) = e^{(-at+c)} = e^c e^{-at} = Ae^{-at}$.

2. Προσδιορίζεται η ειδική λύση της $g(t)$.

   Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

   2.1. $g(t) = b$ (Σταθερά).

   Δοκιμάζουμε ως λύση την απροσδιόριστη σταθερά $\overline{y}(t) = k$. Αντικαθιστώντας έχουμε $\dot{\overline{y}}(t) + a\overline{y}(t) = b \Leftrightarrow 0 + a\overline{y}(t) = b \Leftrightarrow \overline{y}(t) = \frac{b}{a}$.

   2.2. $g(t) = \Gamma e^{\gamma t}$ (εκθετική).

   Δοκιμάζουμε ως λύση των $\overline{y}(t) = Ce^{\gamma t}$ όπου C απροσδιόριστη σταθερά. Έχουμε: $\dot{\overline{y}}(t) + a\overline{y}(t) = \Gamma e^{\gamma t} \Leftrightarrow \gamma Ce^{\gamma t} + aCe^{\gamma t} = \Gamma e^{\gamma t} \Leftrightarrow \Leftrightarrow (a+\gamma)Ce^{\gamma t} = \Gamma e^{\gamma t} \Rightarrow C = \frac{\Gamma}{a+\gamma}$ και άρα $\overline{y}(t) = \frac{\Gamma}{a+\gamma} e^{\gamma t}$.

   2.3. $g(t) = \delta_0 + \delta_1 t$ (πολυώνυμο 1ου βαθμού).

   Δοκιμάζουμε ως λύση τη $\overline{y}(t) = d_0 + d_1 t$ όπου $d_0,\ d_1$ απροσδιόριστες σταθερές. Έχουμε $\dot{\overline{y}}(t) + a\overline{y}(t) = \delta_0 + \delta_1 t \Leftrightarrow d_1 + ad_0 + ad_1 t = \delta_0 + \delta_1 t \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} d_1 + ad_0 = \delta_0 \\ ad_1 = \delta_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = \frac{\delta_1}{a} \\ d_0 = \frac{-\delta_1 + a\delta_0}{a^2} \end{cases}$ και άρα $\overline{y}(t) = \frac{-\delta_1 + a\delta_0}{a^2} + \frac{\delta_1}{a} t$.

3. Συνδυάζοντας τα (1) και (2) έχουμε:

   3.1. Συνδυάζοντας τα (1) και (2.1) έχουμε τη γενική λύση της $\dot{y}(t) + ay(t) = b$, η οποία είναι $y(t) = Ae^{-at} + \frac{b}{a}$.

   3.2. Συνδυάζοντας τα (1) και (2.2) έχουμε τη γενική λύση της $\dot{y}(t) + ay(t) = \Gamma e^{\gamma t}$, η οποία είναι $y(t) = Ae^{-at} + \frac{\Gamma}{a+\gamma} e^{\gamma t}$.

   3.3. Συνδυάζοντας τα (1) και (2.3), η γενική λύση της $\dot{y}(t) + ay(t) = \delta_0 + \delta_1 t$ είναι η $y(t) = Ae^{-at} + \frac{\delta_1}{a} t + \frac{-\delta_1 + a\delta_0}{a^2}$.

3.3 Εξισώσεις δεύτερης τάξης: Επίλυση

Στη γενική της μορφή: $\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_2y(t)=g(t)$.

1. Τίθεται $g(t)=0$ και η ομογενής εξίσωση έχει μορφή $\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_2y(t)=0$.
   Δοκιμάζουμε λύση της μορφής $e^{\lambda t}$. Αντικαθιστώντας, $\lambda^2 e^{\lambda t}+a_1\lambda e^{\lambda t}+a_2e^{\lambda t}=0 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow e^{\lambda t}\left(\lambda^2+a_1\lambda+a_2\right)=0$, που για να ικανοποιείται πρέπει $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$. Αυτή ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση, με χαρακτηριστικές ρίζες $\lambda_{1,2}=\dfrac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_2}}{2}$.
   1.1. Αν $a_1^2-4a_2>0$: Δύο πραγματικές, διαφορετικές ρίζες, και η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι η $y(t)=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}$.
   1.2. Αν $a_1^2-4a_2=0$: Μία, διπλή πραγματική λύση και η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι η $y(t)=(A_1+A_2t)e^{-\frac{a_1}{2}t}$.
   1.3. Αν $a_1^2-4a_2<0$: Δύο συζυγείς μιγαδικές λύσεις, (δεν θα μας απασχολήσει).
2. Για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης, ας δούμε μόνο την περίπτωση $g(t)=b$ (σταθερά).
   Δοκιμάζουμε ως λύση την απροσδιόριστη σταθερά $k=\overline{y}(t)$. Αντικαθιστώντας έχουμε
   $0+a_1\cdot 0+a_2\cdot k=b \Leftrightarrow k=\dfrac{b}{a_2}$ και άρα $\overline{y}(t)=\dfrac{b}{a_2}$.
3. Συνδυάζοντας τα (α) και (β), η γενική λύση της $\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_2y(t)=b$ είναι η
   $y(t)=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}+\dfrac{b}{a_2}$ αν $a_1^2-4a_2>0$ ή η $y(t)=(A_1+A_2t)e^{-\frac{a_1}{2}}+\dfrac{b}{a_2}$ αν $a_1^2-4a_2=0$.

Παράδειγμα 1: $\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)-6y(t)=-12,\ \ y(0)=2,\ \ \dot{y}(0)=5$.

Το ομογενές μέρος έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2+\lambda-6=0$ με ρίζες $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=-3$. Συνεπώς: $y(t)=A_1e^{2t}+A_2e^{-3t}$.

Η ειδική λύση είναι $\overline{y}(t)=\dfrac{-12}{-6}=2$, άρα $y(t)=A_1e^{2t}+A_2e^{-3t}+2$.

Από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει $\begin{cases}A_1+A_2+2=2\\ 2A_1-3A_2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A_1=-1\\ A_2=1\end{cases}$, άρα $y(t)=-e^{2t}+e^{-3t}+2$.

Παράδειγμα 2: $\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+y(t)=0,\ y(0)=3,\ \dot{y}(0)=2$.

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι μόνο η λύση του ομογενούς της μέρους.
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2+2\lambda+1=0$ με ρίζες $\lambda_1=\lambda_2=-1$.
Η γενική λύση είναι $y(t)=(A_1+A_2t)e^{-1\cdot t}$.

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε $\begin{cases}A_1=3\\ -A_1+A_2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A_1=3\\ A_2=5\end{cases}$, οπότε η λύση είναι $y(t)=(3+5t)e^{-t}$.

4. Ειδικές Διαφορικές Εξισώσεις

Πολλά οικονομικά προβλήματα δεν είναι γραμμικά, συνεπώς οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές δεν είναι κατάλληλες.

Από την άλλη, οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις με μη σταθερούς συντελεστές δεν είναι συχνά δυνατόν να επιλυθούν σε όρους γνωστών συναρτήσεων. Ας δούμε την επίλυση ορισμένων διαφορικών εξισώσεων που δεν είναι γραμμικές ή δεν έχουν σταθερότητα συντελεστών.

4.1 Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις (Exact Differential Equation)

Όσες γράφονται ως: $P(t,y)dt + Q(t,y)dy = 0$ (1)

Η λύση είναι της μορφής $z(t,y) = A$, όπου A σταθερά.

Για τη λύση $z(t,y)$ θα ισχύει $\frac{\partial z}{\partial t} = P(t,y)$ (2α),. $\frac{\partial z}{\partial y} = Q(t,y)$ (2β).

Αν η $z(t,y)$ είναι συνεχής, από το θεώρημα του Young: $\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t}$ και άρα $\frac{\partial P(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(t,y)}{\partial t}$ (3).

Η συνθήκη αυτή είναι αναγκαία και ικανή προκειμένου μια διαφορική εξίσωση να χαρακτηριστεί ως ακριβής.

Η λύση προκύπτει ως εξής:

Ολοκληρώνουμε την (2α):

$\int \frac{\partial z}{\partial t} dt = \int P(t,y)dt + g(y)$ (όπου $g(y)$ η σταθερά της ολοκλήρωσης (συνάρτηση της y))

$\Leftrightarrow z(t,y) = \int P(t,y)dt + g(y)$ (4).

Αντικαθιστώ την (4) στην (2β):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Q(y,t) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(t,y)dt\right) + \frac{dg(y)}{dy} = Q(y,t) \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow \frac{dg(y)}{dy} = Q(y,t) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(t,y)dt\right) \Leftrightarrow$$

(ολοκληρώνουμε τα δύο μέρη) $\Leftrightarrow g(y) = \int Q(y,t)dy - \iint P(t,y)dtdy$ (5).

Η λύση προκύπτει αντικαθιστώντας την (5) στην (4).

Παράδειγμα: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $e^y dt + (te^y + 2y)dy = 0$.

Λύση: Έχουμε $P(t,y) = e^y$, $Q(t,y) = te^y + 2y$.

$$\frac{\partial P(t,y)}{\partial y} = e^y = \frac{\partial Q(t,y)}{\partial t} = e^y.$$

Άρα ικανοποιείται η συνθήκη (3) και η διαφορική εξίσωση είναι ακριβής.

Η λύση δίνεται από:

$z(t,y)=\int P(t,y)dt+g(y)=\int P(t,y)dt+\int Q(y,t)dy-\iint P(t,y)dtdy=\int e^y dt+\int (te^y+2y)dy-\iint e^y dtdy=$
$te^y+te^y+y^2-\int te^y dy=te^y+te^y+y^2-te^y=te^y+y^2$.

Άρα η λύση είναι $z(t,y)=te^y+y^2=A$.

Παρατήρηση: Αν η συνθήκη (3) δεν ικανοποιείται, η διαφορική εξίσωση δεν είναι ακριβής. Μπορεί όμως να μετατραπεί σε ακριβή αν πολλαπλασιαστεί με ένα παράγοντα ολοκλήρωσης $\mu(y,t)$ έτσι ώστε η εξίσωση $\mu(y,t)\big(P(t,y)dt+Q(t,y)dy\big)=0$ να είναι ακριβής.

Σε αυτή την περίπτωση, η (3) γίνεται $\frac{\partial}{\partial y}\big[\mu(y,t)P(t,y)\big]=\frac{\partial}{\partial t}\big[\mu(y,t)Q(t,y)\big]\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial\mu(y,t)}{\partial y}P(t,y)+\mu(y,t)\frac{\partial P(t,y)}{\partial y}=\frac{\partial\mu(y,t)}{\partial t}Q(t,y)+\mu(y,t)\frac{\partial Q(t,y)}{\partial t}.$$

Πρόκειται για μια μερική διαφορική εξίσωση. Ο προσδιορισμός της $\mu(y,t)$ μπορεί να γίνει αν προσδιοριστεί μια οποιαδήποτε ειδική λύση της. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μ είναι ανεξάρτητη του y και η παραπάνω σχέση γίνεται $\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}=\dfrac{\frac{\partial P(t,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(t,y)}{\partial t}}{Q(t,y)}=h(t)$, αφού το αριστερό μέλος είναι συνάρτηση μόνο του t. Άρα $\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}=\frac{d\ln(t)}{dt}=h(t)$ και ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη προκύπτει $\ln(\mu)=\int h(t)dt\Leftrightarrow\mu(t)=e^{\int h(t)dt}$.

Παράδειγμα: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $ydt+(t^2y-t)dy=0$.

Λύση: Έχουμε $P(t,y)=y$, $Q(t,y)=t^2y-t$.

$\frac{\partial P(t,y)}{\partial y}=1$, $\frac{\partial Q(t,y)}{\partial t}=2ty-1$ και άρα η εξίσωση δεν είναι ακριβής.

Για τον προσδιορισμό του παράγοντα ολοκλήρωσης έχουμε

$h(t)=\dfrac{\frac{\partial P(t,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(t,y)}{\partial t}}{Q(t,y)}=\dfrac{1-2ty+1}{t^2y-t}=\dfrac{-2(ty-1)}{t(ty-1)}=-\dfrac{2}{t}$ και άρα ο παράγοντας ολοκλήρωσης είναι

$\mu(t)=e^{\int -\frac{2}{t}dt}=e^{-2\ln(t)}=t^{-2}$, οπότε η εξίσωση $t^{-2}ydt+t^{-2}(t^2y-t)dy=0$ είναι ακριβής.

Αυτή λύνεται ως εξής:

Έχουμε $P(t,y)=t^{-2}y$, $Q(t,y)=y-t^{-1}$

$z(t,y)=\int P(t,y)dt+\int Q(y,t)dy-\iint P(t,y)dtdy==\int t^{-2}ydt+\int (y-t^{-1})dy-\iint t^{-2}ydtdy=$

$=-t^{-1}y+\frac{1}{2}y^2-t^{-1}y-\int(-t^{-1}y)dy=-2t^{-1}y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}t^{-1}y^2=\frac{-2y}{t}+\frac{y^2}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)$

Συνεπώς, η λύση της είναι $z(t,y)=\frac{-2y}{t}+\frac{y^2}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)=A$.

4.2 Διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές

Όσες γράφονται ως $P(t)dt + Q(y)dy = A$.

Η λύση είναι $\int P(t)dt + \int Q(y)dy = A$.

Χωριζόμενες μεταβλητές υπάρχουν και στην περίπτωση όπου οι P, Q μπορούν να γραφτούν ως τα γινόμενα:

$$P(t,y) = T(t)Y_1(y)$$
$$Q(t,y) = T_1(t)Y(y)$$

Διαιρώντας $T_1(t)Y_1(y)$ έχουμε:

$$\frac{T(t)}{T_1(t)}dt + \frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy = 0.$$

Παράδειγμα: Να λυθεί η $(1+t)dy - (1+y)dt = 0$.

Λύση: Διαιρώντας με $(1+t)(1+y)$ έχουμε $\frac{1}{1+y}dy - \frac{1}{1+t}dt = 0$ που είναι εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών με $P(t) = \frac{1}{1+t}$ και $Q(y) = \frac{1}{1+y}$.

Άρα η λύση είναι $\int P(t)dt + \int Q(y)dy = A \Leftrightarrow \int \frac{1}{1+t}dt + \int \frac{1}{1+y}dy = A \Leftrightarrow \ln|1+t| + \ln|1+y| = A$.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.