Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα

Ενότητα: Πραγματικές Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών (μέρος 1)

Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής

1. Σκοποί ενότητας

Παρουσιάζονται θέματα Διαφορικού Λογισμού και συγκεκριμένα οι πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών (μέρος 1) που είναι απαραίτητα για τον χρηματοοικονομικό και λογιστικό αναλυτή.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Συνάρτησης δύο Πραγματικών Μεταβλητών , Γραφική Απεικόνιση μιας Συνάρτησης Δύο Μεταβλητών, Γραφική παράσταση, Ισοσταθμικές καμπύλες, Όριο – Συνέχεια, Μερικές Παράγωγοι, Γεωμετρική Ερμηνεία Μερικών Παραγώγων, Μερικές Παράγωγοι υψηλότερης τάξης, Ολικό Διαφορικό, Κανόνας Αλυσιδωτής Παραγώγισης, Παραγώγιση Πεπλεγμένης Συνάρτησης, Εφαρμογές των Μερικών Παραγώγων, Γραμμική Προσέγγιση της $f(x, y)$ κοντά στο (x_0, y_0), Μέγιστα, Ελάχιστα και Σαγματικά Σημεία, Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης (Implicit Function Theorem), Γενικό θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων, Θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης.

3. Συνάρτηση δύο Πραγματικών Μεταβλητών

Ορισμός: Συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών είναι μια απεικόνιση από ένα σύνολο *D* σε ένα σύνολο *R*, έτσι ώστε κάθε στοιχείο του *D* να αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο του *R*.

Εδώ βέβαια το σύνολο D δεν είναι υποσύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ δηλαδή της ευθείας άλλα είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$,δηλαδή του επιπέδου.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to R \subseteq \mathbb{R}$.

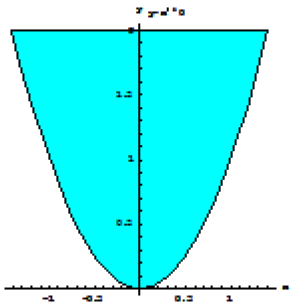
$(x, y) \to f(x, y)$, έχουμε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές x, y.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$.

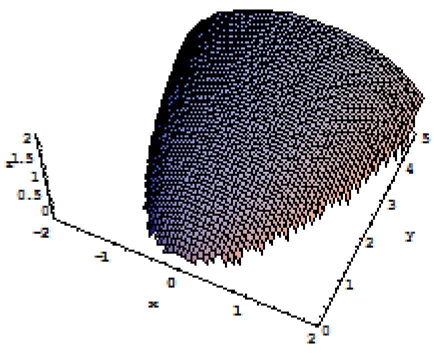
Για να ορίζεται η συνάρτηση στους πραγματικούς αριθμούς πρέπει $y - x^2 \geq 0$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι όλα εκείνα τα σημεία του επιπέδου που ικανοποιούν την ανίσωση $y \geq x^2$, δηλαδή τα σημεία που βρίσκονται «μέσα» στην παραβολή.

Άρα $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \right\}$.

Το πεδίο τιμών της συνάρτησης είναι το σύνολο όλων των μη αρνητικών αριθμών $R = \mathbb{R}_+$.



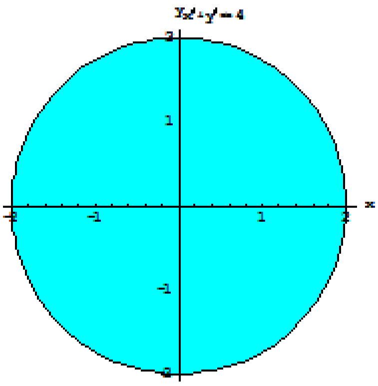
Σχήμα 1. Πεδίο ορισμού της $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$.



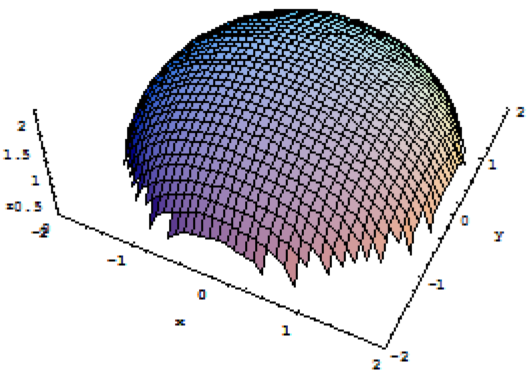
Σχήμα 2. Γραφική παράσταση της $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Για να ορίζεται η συνάρτηση στους πραγματικούς αριθμούς πρέπει $4-x^2-y^2\geq 0$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι όλα εκείνα τα σημεία του επιπέδου που ικανοποιούν την ανίσωση $x^2+y^2\leq 4=2^2$ δηλαδή τα σημεία που βρίσκονται «μέσα» στον κύκλο με κέντρο το (0,0) και ακτίνα 2.



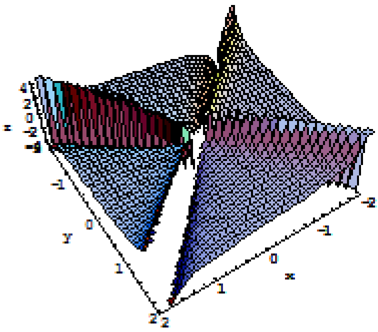
Σχήμα 3. Πεδίο ορισμού της $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$.



Σχήμα 4. Γραφική παράσταση της $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$.

Για να ορίζεται η συνάρτηση στους πραγματικούς αριθμούς πρέπει $x^2-y^2\neq 0$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι όλα εκείνα τα σημεία του επιπέδου εκτός από τις ευθείες $y=x$ και $y=-x$.



Σχήμα 5. Γραφική παράσταση της $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$.

3.1 Γραφική Απεικόνιση μιας Συνάρτησης Δύο Μεταβλητών

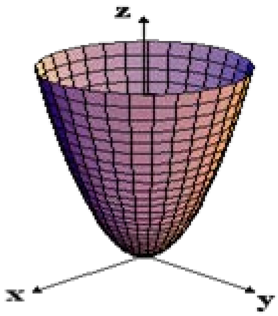
3.1.1 Γραφική παράσταση

Γραφική παράσταση της f ονομάζουμε το σύνολο των σημείων (x, y, z) των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την εξίσωση $z = f(x, y)$. Δηλαδή για να σχηματίσουμε την γραφική παράσταση της f παριστάνουμε τις τιμές της $f(x, y)$ ως ύψη z πάνω από τα αντίστοιχα σημεία (x, y). Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών είναι μια επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο.

$Gr = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$.

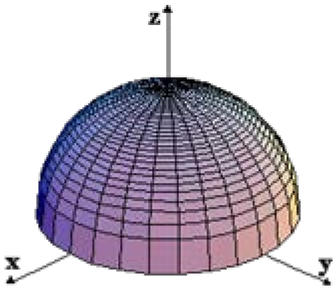
Παραδείγματα:

- $f(x, y) = x^2 + y^2$.



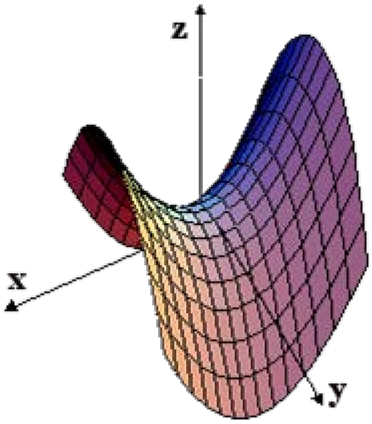
Σχήμα 6. Γραφική παράσταση της $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- $f(x, y) = \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$.



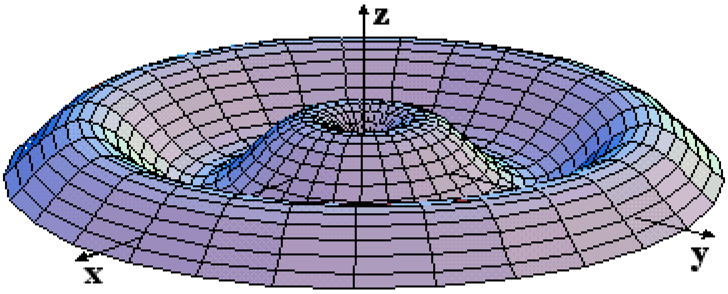
Σχήμα 7. Γραφική παράσταση της $f(x, y) = \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$.

- $f(x,y)=x^2-y^2$.



Σχήμα 8. Γραφική παράσταση της $f(x,y)=x^2-y^2$.

- $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$.



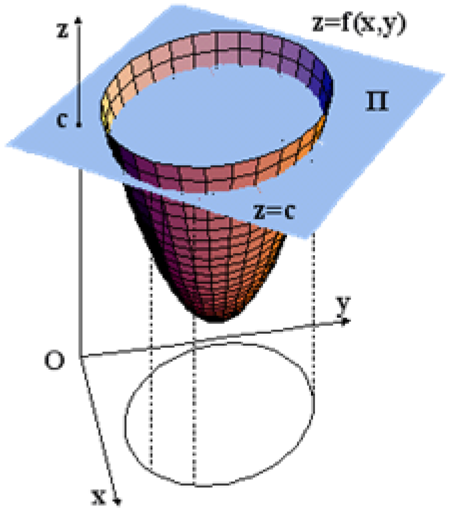
Σχήμα 9. Γραφική παράσταση της $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$.

3.1.2 Ισοσταθμικές καμπύλες

Έστω συνάρτηση $z = f(x, y)$. Θεωρούμε ένα επίπεδο Π, με εξίσωση $z = c$, το οποίο τέμνει την γραφική παράσταση της f. (Προφανώς το Π είναι παράλληλο προς το xy-επίπεδο και ο αριθμός |c| προσδιορίζει την απόσταση του Π από αυτό.).

Η τομή του Π με την επιφάνεια $z = f(x, y)$, θα είναι μια καμπύλη στο χώρο, η οποία έχει για σημεία της, όλα τα σημεία (x, y, z) για τα οποία ισχύει: $z = f(x, y)$ και $z = c$. Δηλαδή θα είναι όλα τα σημεία (x, y, c) για τα οποία $f(x, y) = \mathrm{c}$. Προβάλλουμε την καμπύλη αυτή πάνω στο xy-επίπεδο. Η προβολή της, θα είναι μια καμπύλη που θα έχει για σημεία της, όλα τα σημεία (x,y,0) για τα οποία ισχύει $f(x, y) = \mathrm{c}$. Με άλλα λόγια θα είναι μια καμπύλη στο xy-επίπεδο στα σημεία της οποίας η f παίρνει σταθερή τιμή c.

Καμπύλες αυτού του τύπου θα τις ονομάζουμε ισοσταθμικές καμπύλες της f.



Σχήμα 10. Γραφική παράσταση ισοσταθμικής καμπύλης.

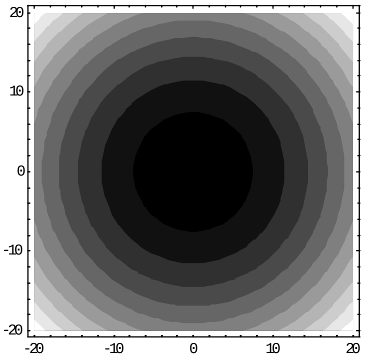
Ορισμός: Έστω $f(x, y)$ συνάρτηση δύο μεταβλητών. Η καμπύλη $f(x, y) = c$ ονομάζεται ισοσταθμική γραμμή.

- Αν είναι γραμμή πίεσης, ονομάζεται **ισοβαρής**.
- Αν είναι γραμμή δυναμικού, ονομάζεται **ισοδυναμική**.
- Αν είναι γραμμή ύψους, ονομάζεται **ισοϋψής**.

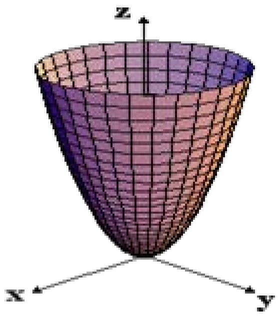
Παρατήρηση: Όπως είδαμε και προηγουμένως, οι ισοσταθμικές καμπύλες μιας συνάρτησης αποτελούν ουσιαστικά την αποτύπωση της γραφικής της παράστασης στο xy-επίπεδο. Επομένως, αυτές μπορούν να μας φανούν χρήσιμες στο να βγάζουμε συμπεράσματα για την μορφή που θα έχει η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών.

Παραδείγματα:

- $f(x,y) = x^2 + y^2$.

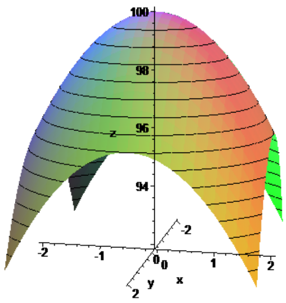


Σχήμα 11. Γραφική παράσταση της $f(x,y) = x^2 + y^2$ (κάτοψη).

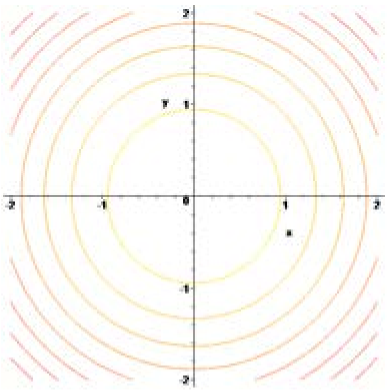


Σχήμα 12. Γραφική παράσταση της $f(x,y) = x^2 + y^2$ (όψη).

- $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$.



Σχήμα 13. Γραφική παράσταση της $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ (όψη).



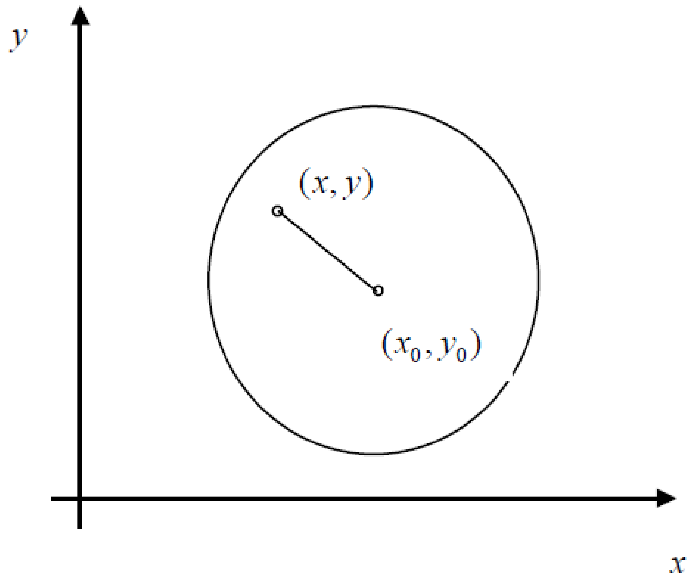
Σχήμα 14. Γραφική παράσταση της $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ (κάτοψη).

3.2 Όριο – Συνέχεια

Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης μπορούν να είναι όσο κοντά θέλουμε σε έναν σταθερό αριθμό ℓ εκλέγοντας το σημείο (x, y) **«κοντά»** στο (x_0, y_0) τότε λέμε ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell .$$

Το ότι το (x, y) βρίσκεται **«κοντά»** στο (x_0, y_0) σημαίνει ότι η απόσταση $\sqrt{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$ είναι μικρή.



Σχήμα 15. Γραφική απεικόνιση του ορίου.

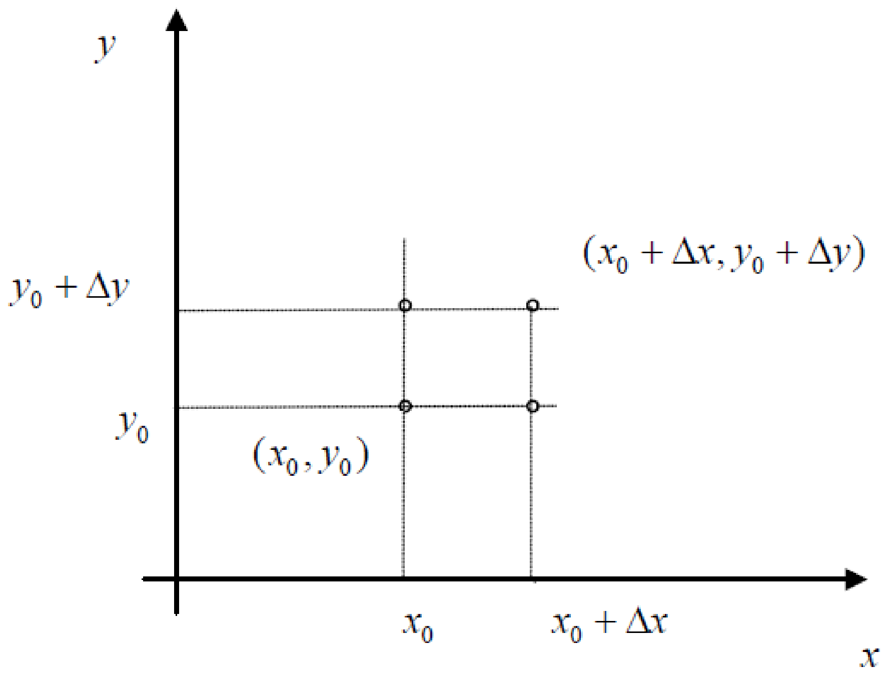
Ορισμός: Το $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$ εάν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε σημείο $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ στο πεδίο ορισμού της f ισχύει:

$$\sqrt{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow \left| f(x,y) - \ell \right| < \varepsilon .$$

3.3 Μερικές Παράγωγοι

Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και $(x_0, y_0) \in A$. Προσπαθώντας να επεκτείνουμε την έννοια της παραγώγου πραγματικής συνάρτηση μιας μεταβλητής στη συνάρτηση $f(x, y)$ διαπιστώνουμε ότι πρέπει να μελετήσουμε τη μεταβολή της συνάρτησης σε μια περιοχή του (x_0, y_0).

Έτσι, μελετάμε σε ένα σημείο της μορφής $(x_0 + h, y_0 + k)$ με $(h, k) \to (0, 0)$.



Σχήμα 16. Γραφική απεικόνιση της περιοχής του (x_0, y_0).

Ορισμός: Θα λέμε ότι η f παραγωγίζεται μερικώς ως προς x στο σημείο (x_0, y_0) αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$. Το όριο αυτό ονομάζεται **μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο (x_0, y_0)** και συμβολίζεται $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ή $f_x(x_0, y_0)$.

Όμοια, θα λέμε ότι η f παραγωγίζεται μερικώς ως προς y στο σημείο (x_0, y_0) αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$. Το όριο αυτό ονομάζεται **μερική παράγωγος της f ως προς y στο σημείο (x_0, y_0)** και συμβολίζεται $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ή $f_y(x_0, y_0)$.

Παρατηρήσεις:

1. Η πρώτης τάξης μερική παράγωγος γενικά είναι συνάρτηση $f_x : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
   $(x, y) \to f_x(x, y)$.
2. Για τον υπολογισμό της μερικής παραγώγου f_x θεωρούμε την μεταβλητή y σταθερά και χρησιμοποιούμε τους γνωστούς κανόνες παραγώγισης πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής.

Ορισμός: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε σαν κλίση της f (grad f) στο σημείο (x_0, y_0) το διάνυσμα $\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \right)$ και συμβολίζεται $\nabla f(x_0, y_0)$ (ανάδελτα).

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \right).$$

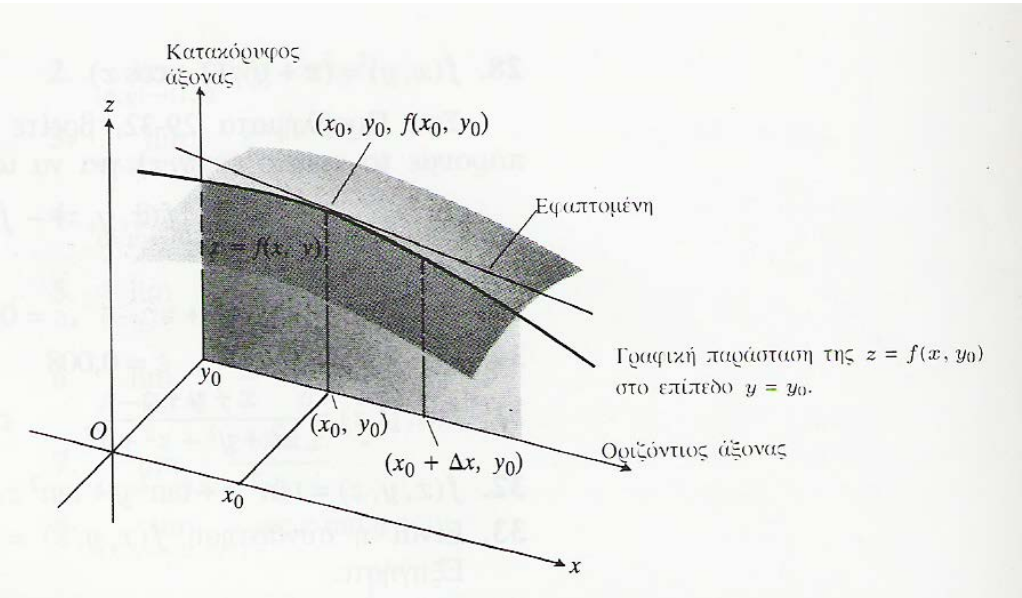
Η κλίση δείχνει προς εκείνη την κατεύθυνση κατά μήκος της οποίας η f αυξάνει γρηγορότερα.

Παράδειγμα:

1. Να βρεθεί η $\frac{\partial f}{\partial x}$ εάν $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$.
2. Να βρεθεί η $\frac{\partial f}{\partial x}$ εάν $f(x, y) = e^x \ln(x^2 + y^2 + 1)$.

3.4 Γεωμετρική Ερμηνεία Μερικών Παραγώγων

Έστω η συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ δύο μεταβλητών και $(x_0, y_0) \in A$. Η εξίσωση $z = f(x, y)$ γενικά περιγράφει μια επιφάνεια S στον χώρο $\mathbb{R}^3$. Η γραφική παράσταση $z = g(x) = f(x, y_0)$ είναι μια καμπύλη C που είναι η τομή της επιφάνειας S με το επίπεδο $y = y_0$.



Σχήμα 17. Γραφική παράσταση της $z = f(x, y)$ στο επίπεδο $y = y_0$.

Από τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής η παράγωγος της g, η $g'(x_0)$, ισούται με την κλίση της εφαπτομένης στης καμπύλης C στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Έτσι η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ισούται με τον ρυθμό μεταβολής ανά μονάδα μήκους της συνάρτησης g στο x_0.

3.5 Μερικές Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Μπορούμε να ορίσουμε μερικές παραγώγους ανώτερης τάξης. Για παράδειγμα παραγωγίζουμε εκ νέου τις μερικές παραγώγους είτε ως προς x είτε ως προς y. Δηλαδή οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι οι εξής:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}.$$

Οι δύο τελευταίες λέγονται **μικτές μερικές παράγωγοι**.

Παράδειγμα: Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δευτέρας τάξης της συνάρτησης $f(x, y) = xy + (x+2y)^2$.

$f_x(x, y) = y + 2(x+2y)$.

$f_y(x, y) = x + 4(x+2y)$.

$f_{xx}(x, y) = 2$.

$f_{yy}(x, y) = 8$.

$f_{xy}(x, y) = 5$.

$f_{yx}(x, y) = 5$.

Θεώρημα: Εάν η $f(x, y)$ και οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} ορίζονται σε μια περιοχή του σημείου (x_0, y_0) και είναι όλες συνεχείς στο (x_0, y_0), τότε $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Η μήτρα όλων των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης στο σημείο (x_0, y_0) ονομάζεται **Εσσιανή μήτρα** της f στο (x_0, y_0).

$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ και εάν οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς τότε είναι συμμετρική μήτρα.

3.6 Ολικό Διαφορικό

Αν για την συνάρτηση $u = f(x,y)$ υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι σε κάποια περιοχή του (x_0, y_0) και οι $f_x(x_0,y_0)$ και $f_y(x_0,y_0)$ είναι συνεχείς στο (x_0,y_0), τότε λέμε ότι η u είναι **διαφορίσιμη στο σημείο** (x_0,y_0) και με du συμβολίζουμε το **ολικό διαφορικό** της u:

$$df = f_x(x_0,y_0)\cdot dx + f_y(x_0,y_0)\cdot dy.$$

Μετράει τη μεταβολή στην εξαρτημένη μεταβλητή που επιφέρει μια μικρή μεταβολή σε κάθε μια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές.

Το διαφορικό 2ης τάξης θα είναι: $d^2 f = d\left(df\right) = d\left(f_x(x_0,y_0)\cdot dx + f_y(x_0,y_0)\cdot dy\right)$
$= d\left(f_x(x_0,y_0)\cdot dx\right) + d\left(f_y(x_0,y_0)\cdot dy\right) = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί το ολικό διαφορικό της $u = e^x y$.

Λύση: $du = e^x y\cdot dx + e^x\cdot dy$.

Πρόταση: (Αν η f είναι παραγωγίσιμη τότε είναι συνεχής). Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0). Τότε η f είναι συνεχής στο (x_0,y_0).

Θεώρημα: Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Ας υποθέσουμε ότι οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ της f υπάρχουν και είναι συνεχείς σε μια περιοχή του σημείου (x_0,y_0). Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0). Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Παρατήρηση: Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η ύπαρξη των μερικών παραγώγων μιας συνάρτησης στο (x_0,y_0) δεν συνεπάγεται την συνέχεια της συνάρτησης f στο (x_0,y_0).

Παράδειγμα:

$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ xy \neq 0 \\ x+y & \alpha\nu\ xy = 0 \end{cases}$ $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 1$ αλλά η f δεν είναι συνεχής στο (0,0).

3.7 Κανόνας Αλυσιδωτής Παραγώγισης

Αν $u = f(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη και $x = x(t), y = y(t)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(x^n\right)}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{n} \cdot x^{-n+1}.$$

Παράδειγμα:

$u = 3x^2 + 4y^2$, όπου $x = 3t^4$, $y = 2t + 1$, τότε:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 6x \cdot 12t^3 + 8y \cdot 2 = 6\left(3t^4\right) \cdot 12t^3 + 8\left(2t+1\right) \cdot 2.$$

3.8 Παραγώγιση Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = 0$ σε πεπλεγμένη μορφή.

Το ολικό διαφορικό της είναι $f_x(x, y) \cdot dx + f_y(x, y) \cdot dy = 0$ άρα $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x}{f_y}$.

Παράδειγμα: $3x^5 + 8y^3 - 12 = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{15x^4}{24y^2}.$$

Έστω η συνάρτηση $f(x, y, u) = 0$ σε πεπλεγμένη μορφή.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_u}$$

Παράδειγμα: Έστω η πεπλεγμένη συνάρτηση $x^2 + xy + yu + u^2 = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_u} = -\frac{2x + y}{y + 2u},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_u} = -\frac{x + u}{y + 2u}.$$

3.9 Εφαρμογές των Μερικών Παραγώγων

3.9.1 Γραμμική Προσέγγιση της $f(x,y)$ κοντά στο (x_0,y_0)

Αν η $f(x,y)$ καθώς και οι μερικές της παράγωγοι, πρώτης και δευτέρας τάξεως, είναι συνεχείς σε μια περιοχή του σημείου (x_0,y_0):

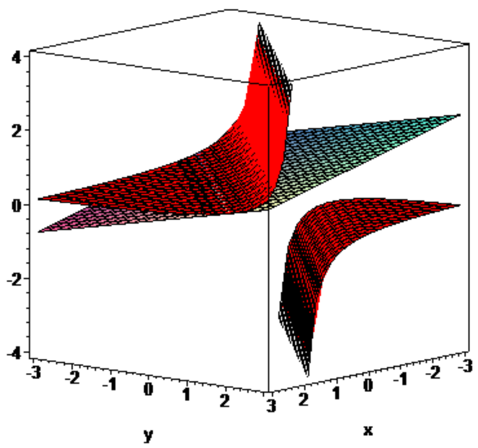
$$f(x,y) \approx\sim f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η γραμμική προσέγγιση της $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x-y}$ κοντά στο σημείο (2,1).

Λύση:

$$f(x,y) \approx f(2,1) + f_x(2,1)(x-2) + f_y(2,1)(y-1).$$

$$f(x,y) \approx \frac{3}{4} - \frac{x}{4} + \frac{y}{4}.$$



Σχήμα 18. Γραφική παράσταση της $f(x,y)$ και η γραμμική προσέγγισή της στο σημείο (2,1).

3.9.2 Μέγιστα, Ελάχιστα και Σαγματικά Σημεία

Θεώρημα: Αν (x_0,y_0) είναι ένα σημείο της συνάρτησης $f(x,y)$ στο οποίο η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, $f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0$ και υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι δευτέρας τάξης, συνεχείς σε μία περιοχή του σημείου (x_0,y_0), τότε:

$$|H_1| = f_{xx}(x_0,y_0).$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix}.$$

Η $|H_2|$ ονομάζεται **Εσσιανή** (Hessian) ορίζουσα της f.

Εσσιανή μήτρα είναι η τετραγωνική μήτρα όλων των μερικών παραγώγων 2[ης] τάξης.

- Αν $|H_2|$>0 και $|H_1|>0$ τότε το (x_0, y_0) είναι **τοπικό ελάχιστο**.
- Αν $|H_2|$>0 και $|H_1|<0$ τότε το (x_0, y_0) είναι **τοπικό μέγιστο.**
- Αν $|H_2|$<0 τότε το (x_0, y_0) δεν είναι σημείο τοπικού ακρότατου, είναι **σαγματικό σημείο**.
- Αν $|H_2|$=0, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Αν $f(x,y)$ είναι συνεχής, τότε τα ακρότατα της μπορούν να υπάρξουν μόνο σε:

1. Συνοριακά σημεία του πεδίου ορισμού της.
2. Εσωτερικά σημεία, στα οποία $f_x = f_y = 0$.
3. Σημεία στα οποία η f_x ή f_y δεν υπάρχουν.

Παράδειγμα: $f(x,y) = 4x^2 + 2xy + y^2$.

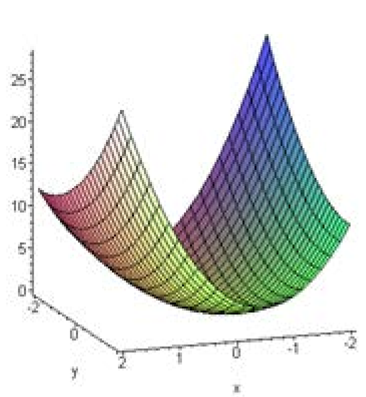
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x + 2y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y.$$

$\left.\begin{array}{l} 8x+2y=0 \\ 2x+2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=0, y=0$, άρα το (0,0) είναι κρίσιμο σημείο.

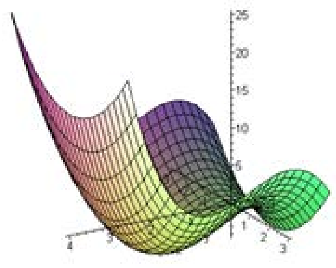
- $|H_1| = f_{xx}(0,0) > 0$.
- $|H_2| = \begin{vmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$.

Άρα στο (0,0) έχω τοπικό ελάχιστο.



Σχήμα 19. Γραφική παράσταση της $f(x,y) = 4x^2 + 2xy + y^2$.

Παράδειγμα: $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

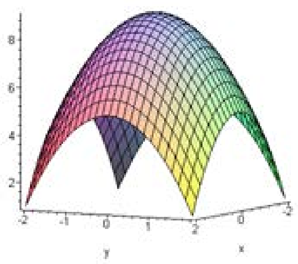


Σχήμα 20. Γραφική παράσταση της $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

Στο (0,0) έχει ……………………............................... (συμπληρώστε καταλλήλως).

Στο (-2,0) έχει .... (συμπληρώστε καταλλήλως).

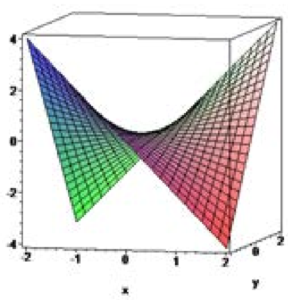
Παράδειγμα: $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.



Σχήμα 21. Γραφική παράσταση της $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

Στο (0,0) έχει... (συμπληρώστε καταλλήλως).

Παράδειγμα: $f(x,y) = x \cdot y$.



Σχήμα 22. Γραφική παράσταση της $f(x,y) = x \cdot y$.

Παράδειγμα:

Τα συνολικά κόστη μιας επιχείρησης συνδέονται με το εργατικό δυναμικό (L) και τον κεφαλαιακό εξοπλισμό (K) με την συνάρτηση: $TC = 10L^2 + 10K^2 - 25L - 50K - 5LK + 2000$. Πότε ελαχιστοποιείται το TC;

(Απάντηση: K=3, L=2).

Γενικά:

Έστω η συνάρτηση $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Η Εσσιανή μήτρα της f στο $x \in \mathbb{R}^n$ θα είναι $H(x) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$. Επίσης μπορούμε να ορίσουμε τις υπομήτρες: $H_1 = f_{11}$, $H_2 = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$, $H_3 = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}$,...

Αν $(x_1{}^0, x_2{}^0, ..., x_n{}^0)$ είναι ένα σημείο της συνάρτησης $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ στο οποίο η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και $f_{x_1}(x_1{}^0, x_2{}^0, ..., x_n{}^0) = 0,\ f_{x_2}(x_1{}^0, x_2{}^0, ..., x_n{}^0) = 0,\ f_{x_3}(x_1{}^0, x_2{}^0, ..., x_n{}^0) = 0...$ (συνοπτικά $\nabla f(x_1{}^0, x_2{}^0, ..., x_n{}^0) = (0, 0, ..., 0)$) και υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι δευτέρας τάξης, συνεχείς σε μία περιοχή του σημείου $(x_1{}^0, x_2{}^0, ..., x_n{}^0)$, τότε:

- Αν $|H_k(x)|$>0, $1 \le k \le n$, τότε στο x έχουμε **τοπικό ελάχιστο**.
- Αν $(-1)^k |H_k(x)| > 0$, $1 \le k \le n$, (δηλ $|H_1| < 0$, $|H_2| > 0$, ...) τότε στο x έχουμε **τοπικό μέγιστο**.
- Αν $|H_k|$<0 για κάποιο k άρτιο στο x δεν έχουμε σημείο τοπικού ακρότατου, αλλά **σαγματικό σημείο**.

Παράδειγμα: $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 - 3x$.

Στο (1,0,0) έχουμε τοπικό ελάχιστο και στο (-1,0,0) σαγματικό σημείο.

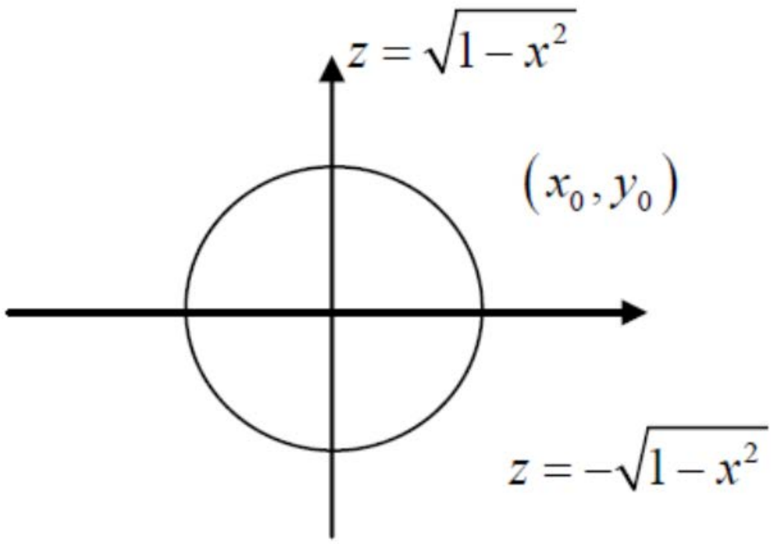
4. Θεώρημα: Πεπλεγμένης Συνάρτησης (Implicit Function Theorem)

Έστω $y = f(x)$ μια συνεχής συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο και $f'(x_0) \neq 0$, τότε μπορούμε να λύσουμε ως προς x, δηλαδή $x = f^{-1}(y)$ κοντά στο x_0, και μάλιστα $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Θεώρημα: Έστω $f:\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ με συνέχεις μερικές παραγώγους και έστω (x_0, z_0), $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $z_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0, z_0) = 0$, και $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, z_0) \neq 0$, τότε υπάρχει μια μπάλα U, που περιέχει το x_0 και μια περιοχή του z ώστε να υπάρχει μοναδική συνάρτηση $z = g(x)$ ορισμένη για $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $z \in V \subseteq \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί την $f(x, g(x)) = 0$.

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση : $x^2 + z^2 - 1 = 0$, εδώ $f(x,z) = x^2 + z^2 - 1$.

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,z) = 2z$ και $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, z_0) \neq 0$ για κάθε σημείο με ${x_0}^2 + {z_0}^2 - 1 = 0$ και $z_0 \neq 0$ σε αυτά τα σημεία ορίζεται μονοσήμαντα η $z = \sqrt{1-x^2}$ αν $z > 0$ και $z = -\sqrt{1-x^2}$ αν $z < 0$.



Σχήμα 23. Γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων $z = \sqrt{1-x^2}$ και $z = -\sqrt{1-x^2}$.

4.1 Γενικό θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

Έστω $\begin{cases} f_1\left(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_m\right) = 0 \\ f_2\left(\left(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_m\right)\right) = 0 \\ \vdots \\ f_m\left(\left(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_m\right)\right) = 0 \end{cases}$, ένα σύνολο m εξισώσεων (1).

Η μήτρα $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & & \frac{\partial f_2}{\partial z_m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \frac{\partial f_n}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_m} \end{pmatrix}$ ονομάζεται Ιακωβιανή μήτρα και η ορίζουσα $|J|$ Ιακωβιανή ορίζουσα.

Θεώρημα: Αν η Ιακωβιανή ορίζουσα $|J| \neq 0$, τότε κοντά στο σημείο $\left(x_0, z_0\right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ το σύνολο εξισώσεων (1) ορίζει μονοσήμαντα τις συναρτήσεις :

$z_i = g_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right),\ i = 1, ..., m$

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα $\begin{cases} xz + ywz^2 = 2 \\ xz^3 + y^2w^4 = 2 \end{cases}$. Να ελέγξετε αν το σύστημα είναι επιλύσιμο ως προς z, w κοντά στο σημείο (1,1,1,1) και να υπολογίσετε $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial w}{\partial x}$.

Λύση:

Θα ελέγξουμε αν το σύστημα μπορεί να λυθεί ως προς z, w.

Ορίζουμε $\begin{cases} f_1\left(x, y, z, w\right) = xz + ywz^2 - 2 \\ f_2\left(x, y, z, w\right) = xz^3 + y^2w^4 - 2 \end{cases}$.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2yzw & yz^2 \\ 3z^2x & 4y^2w^3 \end{pmatrix}.$$

$\left|J\left(1,1,1,1\right)\right| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$ άρα το σύστημα λύνετε μονοσήμαντα ως προς z, w:

- $\frac{\partial z}{\partial x}$ =… (με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας).
- $\frac{\partial w}{\partial x}$ =…

4.2 Θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης

Έστω το σύστημα $\begin{cases} f_1\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=y_1 \\ f_2\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=y_2 \\ \vdots \\ f_n\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=y_n \end{cases}$.

Θέλουμε να εκφράσουμε τις $x_1,x_2,...,x_n$ σαν συνάρτηση των $y_1,y_2,...,y_n$.

Θεώρημα: Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $f_1,f_2,...,f_n:U\to\mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους.

Αν η Ιακωβιανή ορίζουσα $\left|J\right|\neq 0$, τότε κοντά στο σημείο $\left(x_0,y_0\right)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ οι εξισώσεις (2) λύνονται μονοσήμαντα ως προς $x_1,x_2,...,x_n$.

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα $\begin{cases} f_1\left(x,y\right)=\dfrac{x^4+y^4}{x} \\ f_2\left(x,y\right)=\sin x+\cos y \end{cases}$. Να ελέγξετε αν το σύστημα είναι επιλύσιμο ως προς x, y.

Λύση:

$$\left|J\right|=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{3x^4-y^4}{x^2} & \dfrac{4y^3}{x} \\ \cos x & -\sin y \end{vmatrix}=\frac{\sin y}{x^2}\left(y^4-3x^4\right)-\frac{4y^3}{x}\cos x .$$

Το σύστημα μπορεί να λυθεί κοντά στα σημεία για τα οποία $\left|J\right|\neq 0\Leftrightarrow\dfrac{\sin y}{x^2}\left(y^4-3x^4\right)-\dfrac{4y^3}{x}\cos x\neq 0$.

Π.χ. $x_0=\dfrac{\pi}{2},y_0=\dfrac{\pi}{2}$.

Ασκήσεις (κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης και παραγώγιση πεπλεγμένης συνάρτησης) :

1. Να γράψετε τον τύπο της αλυσιδωτής παραγώγισης $\frac{\partial w}{\partial u}$ και $\frac{\partial w}{\partial v}$ για $w = g\left(x, y\right)$, $x = h(u,v)$, $y = k(u,v)$.
2. Να γράψετε τον τύπο της αλυσιδωτής παραγώγισης $\frac{dz}{dt}$ για $z = f\left(u,v,w\right)$, $u = g(t)$, $v = h(t)$ και $w = k(t)$.
3. Να γράψετε τον τύπο της αλυσιδωτής παραγώγισης $\frac{\partial w}{\partial u}$ και $\frac{\partial w}{\partial v}$ για $w = h\left(x, y, z\right)$, $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ και $z = k(u,v)$.
4. Αν $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$ να βρείτε τα $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$.
5. Αν $\sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(x+z) = 0$ να βρείτε τα $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.