Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα

Ενότητα: Θεωρία Συνόλων, Συναρτήσεις Πραγματικής Μεταβλητής, Όριο και Συνέχεια

Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής

1. Σκοποί ενότητας

Παρουσιάζονται θέματα Θεωρίας Συνόλων, Συναρτήσεων Πραγματικής Μεταβλητής, Ορίου και Συνέχειας που είναι απαραίτητα για τον χρηματοοικονομικό και λογιστικό αναλυτή.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Σύνολα, Σχέσεις, Συναρτήσεις μιας Πραγματικής Μεταβλητής, Βασικές Συναρτήσεις, Όριο – Συνέχεια, Όριο καθώς το $x \to x_0$ (πεπερασμένο): $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, Όριο καθώς το $x \to x_0$ (Μη πεπερασμένο): $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, Όριο καθώς το $x \to \pm\infty$ $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ή $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, Συνεχείς Συναρτήσεις.

3. Σύνολα

Σύνολο (set) είναι μια συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων.

Π.χ. $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$, $A=\{a,b\}$, $\{\text{Νίκος, Μαρία, Γιάννης, Πέτρος}\}$.

Τα αντικείμενα ενός συνόλου ονομάζονται **στοιχεία** (element) του συνόλου και αν ένα στοιχείο ανήκει σε ένα σύνολο το συμβολίζουμε $a \in \{a,b\}$, ενώ αν δεν ανήκει συμβολίζουμε $c \notin \{a,b\}$.

Ένα σύνολο μπορεί να μην περιέχει στοιχεία, ένα τέτοιο σύνολο ονομάζεται **κενό** και συμβολίζεται με {} ή $\varnothing$.

Ορισμός: Το σύνολο P είναι **υποσύνολο** του συνόλου Q εάν το κάθε στοιχείο του P είναι στοιχείο του Q και θα συμβολίζουμε με $P \subseteq Q$.

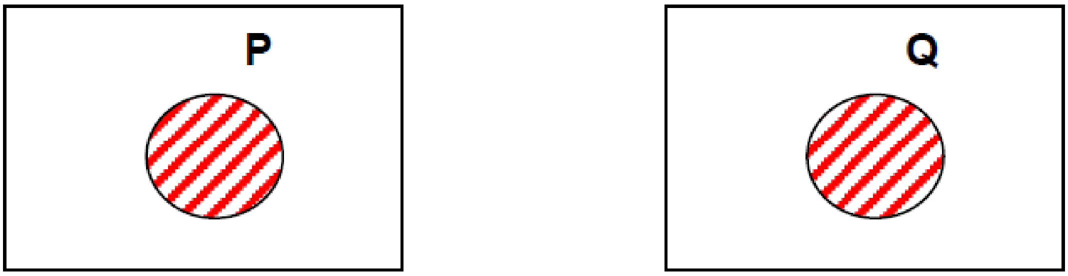
Π.χ. $\{a\} \subseteq \{a,b\}$, ενώ $\{a,b,c\} \subsetneq \{a,b\}$.

Ορισμός: Δύο σύνολα P και Q ονομάζονται **ίσα**, αν αποτελούνται από τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Ορισμός: Έστω P ένα υποσύνολο του Q. Θα λέμε ότι το P είναι **γνήσιο υποσύνολο** του Q εάν το P δεν είναι ίσο με το Q και θα συμβολίζουμε με $P \subset Q$.

Τα σύνολα μπορούν να συνδυαστούν με διάφορους τρόπους και να παράγουμε νέα σύνολα. Τα σύνολα που προέρχονται από συνδυασμό άλλων συνόλων μπορούν να αναπαρασταθούν γραφικά χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα Venn.

Έτσι αν θεωρήσουμε δυο σύνολα P και Q, τα σύνολα αυτά αναπαρίστανται από τις γραμμοσκιασμένες περιοχές, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1 παρακάτω.



Σχήμα 1. Τα σύνολα P και Q αναπαρίστανται από τις γραμμοσκιασμένες περιοχές.

Ορισμός: Η **ένωση** (union) δύο συνόλων P και Q είναι το σύνολο $P \cup Q$ του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα στοιχεία που ανήκουν στο P ή στο Q.

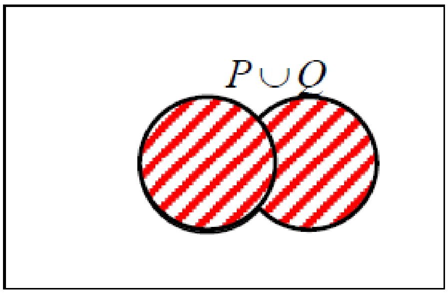
$P \cup Q = \{x : x \in P \text{ ή } x \in Q\}$.

Παράδειγμα:

$\{a,b\} \cup \{c,d\} = \{a,b,c,d\}$.

$\{a,b\} \cup \{a,c\} = \{a,b,c\}$.

$\{a,b\} \cup \varnothing = \{a,b\}$



Σχήμα 2. Ένωση των συνόλων P και Q.

Ορισμός: Η **τομή** (intersection) δύο συνόλων P και Q είναι το σύνολο $P \cap Q$ του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα στοιχεία που ανήκουν τόσο P όσο και στο Q.

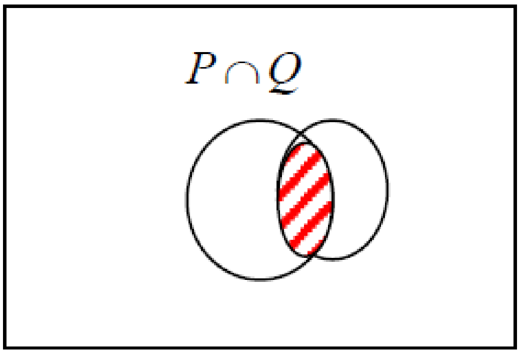
$P \cap Q = \{x : x \in P \text{ και } x \in Q\}$.

Παράδειγμα:

$\{a,b\} \cap \{c,d\} = \varnothing$.

$\{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\}$.

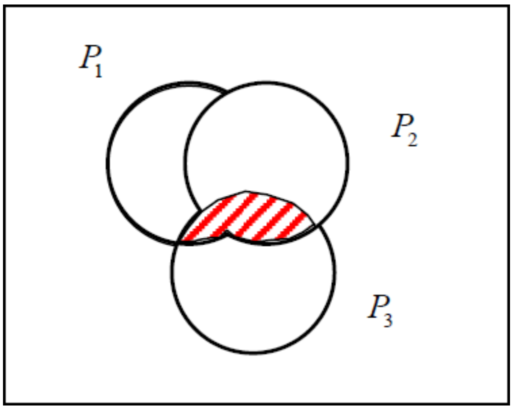
$\{a,b\} \cap \varnothing = \varnothing$.



Σχήμα 3. Η τομή των συνόλων P και Q.

Ιδιότητες:

1. Προσεταιριστική.
   1.1. $P_1 \cup \left(P_2 \cup P_3\right) = P_1 \cup P_2 \cup P_3$.
   1.2. $P_1 \cap \left(P_2 \cap P_3\right) = P_1 \cap P_2 \cap P_3$.
2. Αντιμεταθετική.
   2.1. $P_1 \cup P_2 = P_2 \cup P_1$.
   2.2. $P_1 \cap P_2 = P_2 \cap P_1$.
3. Ουδέτερο στοιχείο.
   3.1. $P \cup \varnothing = P$.
   3.2. $P \cap \Omega = P$ (όπου το Ω είναι το σύνολο αναφοράς).
4. Επιμεριστική (Σχήμα 4).
   4.1. $\left(P_1 \cup P_2\right) \cap P_3 = \left(P_1 \cap P_3\right) \cup \left(P_2 \cap P_3\right)$.
   4.2. $\left(P_1 \cap P_2\right) \cup P_3 = \left(P_1 \cup P_3\right) \cap \left(P_2 \cup P_3\right)$.



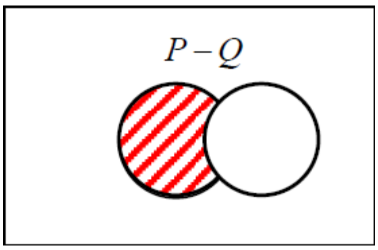
Σχήμα 4. Επιμεριστική ιδιότητα.

Ορισμός: Η **διαφορά** δύο συνόλων P και Q, είναι το σύνολο $P - Q$ που περιέχει ακριβώς τα στοιχεία του P τα οποία δεν είναι στοιχεία του Q.

$P - Q = \left\{ x \mid x \in P \text{ και } x \notin Q \right\}$. (συμπλήρωμα του Q ως προς P).

Παράδειγμα:

$\left\{a, b\right\} - \left\{a, c\right\} = \left\{b, c\right\}$.



Σχήμα 5. Η διαφορά των συνόλων P και Q.

Ορισμός: Το **δυναμοσύνολο** ενός συνόλου Α είναι το σύνολο το οποίο περιέχει ακριβώς όλα τα υποσύνολα του Α, το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε με $\wp(A)$ ή 2^A.

$\wp(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.

Παράδειγμα:

$\wp(\{a,b\}) = \{\{\ \},\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

Θεώρημα: Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου με n στοιχεία έχει 2^n πλήθος στοιχείων, δηλαδή $|\wp(A)| = 2^{|A|}$.

Ορισμός: Αν P, Q δύο σύνολα τότε ονομάζουμε **καρτεσιανό γινόμενο** των P και Q το σύνολο που αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (a, b) όπου $a \in P$ και $b \in Q$, δηλαδή

$P \times Q = \{(a,b) : a \in P \text{ και } b \in Q\}$.

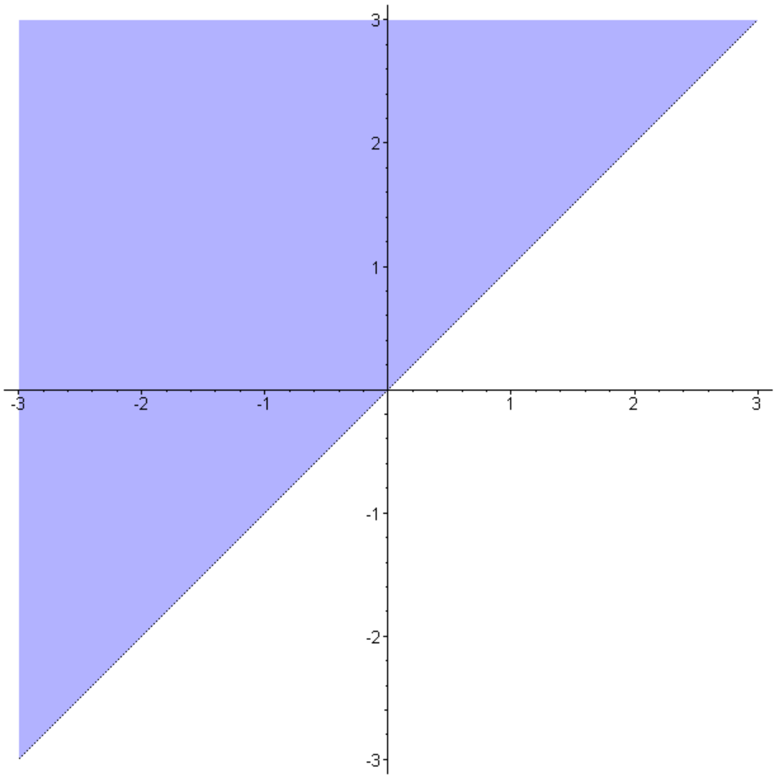
4. Σχέσεις

Έστω Α και Β δύο σύνολα, τότε κάθε υποσύνολο R του καρτεσιανού γινομένου $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ λέγεται **σχέση** (relation) μεταξύ του Α και του Β.

Παράδειγμα:

Ορίζουμε την σχέση R: «μικρότερος ή ίσος πραγματικός αριθμός», συμβολικά xRy.

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$.



Σχήμα 6. Γραφική απεικόνιση της σχέσης R.

5. Συναρτήσεις μιας Πραγματικής Μεταβλητής

Γενικά, με τον όρο **συνάρτηση** (function) από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B ορίζουμε μια σχέση μεταξύ του A και του B ώστε κάθε στοιχείο του A να σχετίζεται μόνο με ένα στοιχείο του B.

$f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, με τύπο $y = f(x)$.

Το σύνολο A ονομάζεται **πεδίο ορισμού**.

Το σύνολο B **σύνολο αφίξεως**.

Το σύνολο $f(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{B}$ **πεδίο τιμών**.

Η ανεξάρτητη μεταβλητή $x \in A$ μπορεί να παριστάνει μία ή περισσότερες πραγματικές ή μιγαδικές μεταβλητές με $y \in B$ την αντίστοιχη τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής.

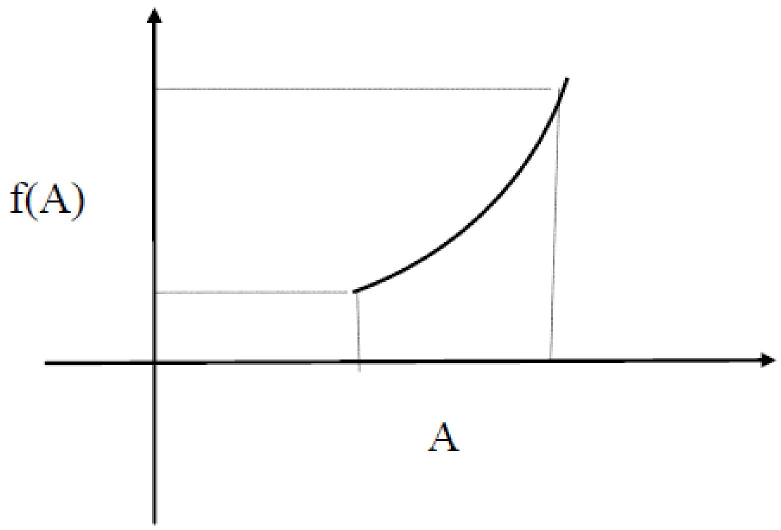
- Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ η συνάρτηση θα λέμε ότι είναι μιας πραγματικής μεταβλητής.
- Αν $f(\mathrm{A}) \subseteq \mathbb{R}$ η συνάρτηση θα λέμε ότι είναι συνάρτηση πραγματικών τιμών.

Παραδείγματα:

1. Η $f(x) = x^2$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$ και πεδίο τιμών $f(A) = \mathbb{R}_+$.
2. Η $f(x) = \dfrac{2x}{3x+2}$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$ και πεδίο τιμών $f(A) = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.
3. Η $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A = [-1,1]$ και πεδίο τιμών το $f(A) = [0,1]$.

Ορισμός: Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που οι συντεταγμένες τους είναι διατεταγμένα ζεύγη μιας συνάρτησης $(x, f(x))$, ονομάζεται **γραφική παράσταση**.

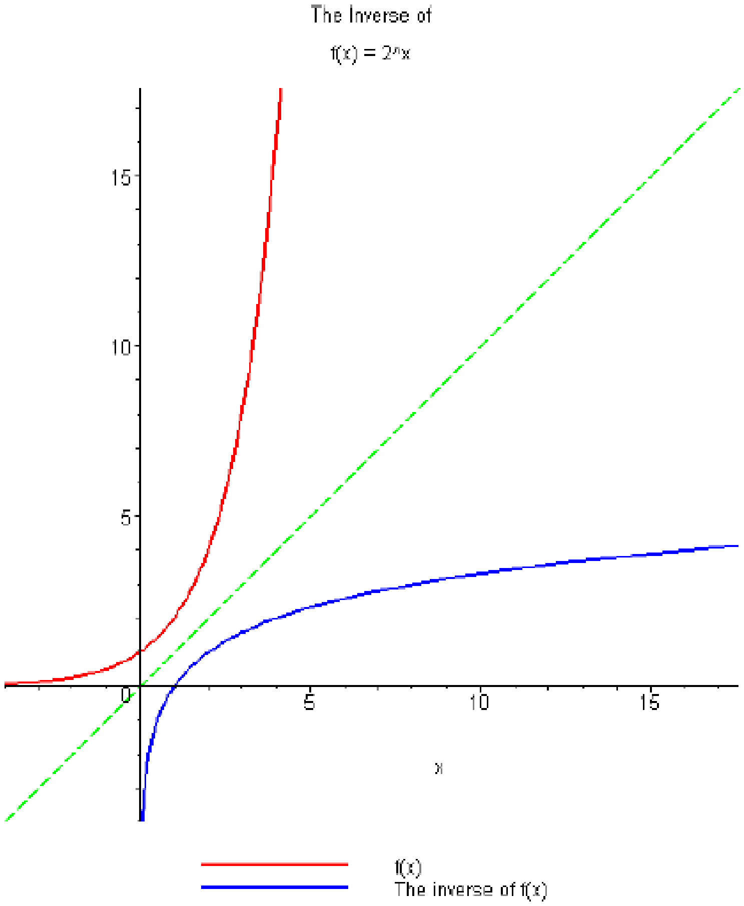
$Grf = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$ ή C_f.



Σχήμα 7. Γραφική παράσταση συνάρτησης.

Ορισμός: Έστω $f: A \to B$ αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$, τότε η f λέγεται **αμφιμονοσήμαντη**, συμβολίζεται 1-1 και διαβάζεται «ένα προς ένα».

Ορισμός: Έστω $f: A \to B$ μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση από το Α στο Β, τότε η **αντίστροφη συνάρτηση** (inverse function) της f, συμβολίζεται με f^{-1}, είναι η συνάρτηση που σε κάθε $y \in B$ αντιστοιχεί το μοναδικό $x \in A$.



Σχήμα 8. Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η 2^x, με μπλε η αντίστροφή της και με πράσινο η y=x ως άξονας αναφοράς.

Ορισμός: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α ονομάζεται:

- **Άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ είναι $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$
- **Περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ είναι $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$
- **Περιοδική**, όταν υπάρχει $T \in \mathbb{R}^*$, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ είναι $x + T \in A$ και $f(x+T) = f(x)$.

Παράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι άρτια.

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι περιττή.

Η συνάρτηση $f(x) = \cos(x)$ είναι περιοδική.

Ορισμός: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α ονομάζεται:

- **Γνησίως αύξουσα**, όταν για $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- **Γνησίως φθίνουσα**, όταν για $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- **Αύξουσα**, όταν για $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **Φθίνουσα**, όταν για $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Μια συνάρτηση που είναι αύξουσα ή φθίνουσα ονομάζεται **μονότονη**.

Ορισμός: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α ονομάζεται:

- **Φραγμένη άνω**, όταν υπάρχει $\varphi \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \leq \varphi$.
- **Φραγμένη κάτω**, όταν υπάρχει $\varphi \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \geq \varphi$.
- **Φραγμένη**, όταν είναι φραγμένη άνω και κάτω.

Πρόταση : Μια συνάρτηση f είναι φραγμένη, αν και μόνο αν υπάρχει $\delta \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε για κάθε $|f(x)| \leq \delta$.

Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$.

- Αν υπάρχει στοιχείο $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ να είναι $f(x) \leq f(x_0)$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει στο x_0 **μέγιστο**.
- Αν υπάρχει στοιχείο $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ να είναι $f(x) \geq f(x_0)$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει στο x_0 **ελάχιστο**.

Ορισμός: (Πράξεις συναρτήσεων) Ορίζουμε ως:

- **Άθροισμα** $f + g : A_1 \cap A_2 \to \mathbb{R}$, με τύπο $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- **Διαφορά** $f - g : A_1 \cap A_2 \to \mathbb{R}$, με τύπο $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.
- **Γινόμενο** $f \cdot g : A_1 \cap A_2 \to \mathbb{R}$, με τύπο $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- **Πηλίκο** $f / g : A_1 \cap A_2 \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$, με τύπο $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

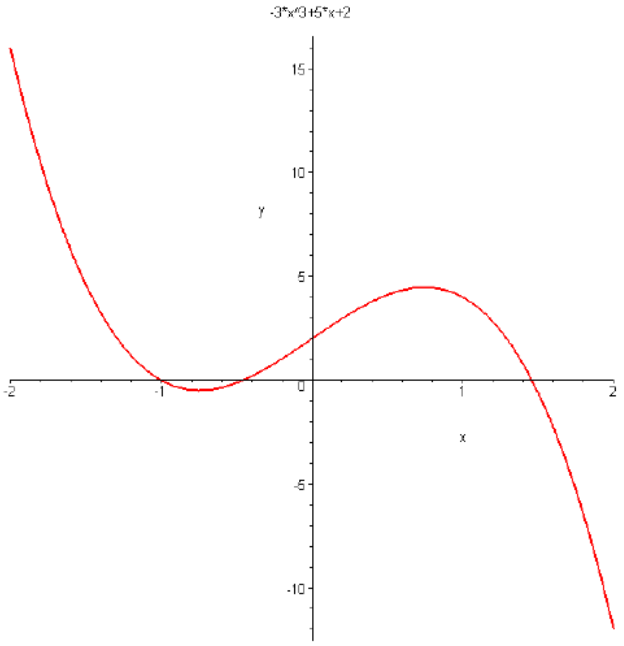
Ορισμός: Αν $f : A_1 \to \mathbb{R}$, $g : A_2 \to \mathbb{R}$ **η σύνθεση της** f **με τη** g είναι η συνάρτηση $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ με $A = \left\{ \mathrm{x} \in \mathrm{A}_1 : f(x) \in A_2 \right\}$.

Παράδειγμα: Η $f(x) = \sin(x^3)$.

5.1 Βασικές Συναρτήσεις

1. **Πολυωνυμική:** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}, i = 1,...,n$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

   Αποτελείται από n υποδιαστήματα στα οποία είναι μονότονη (με διαφορετική μονοτονία).

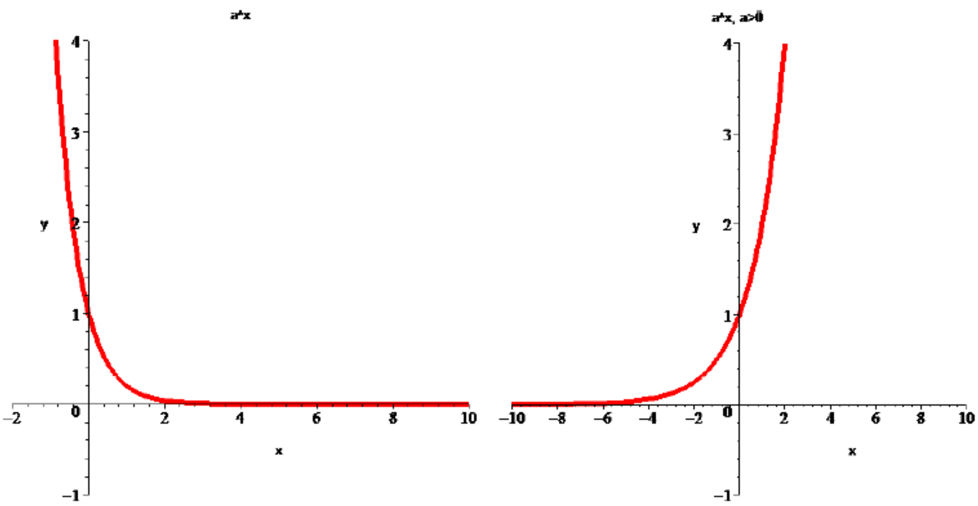


Σχήμα 9. Παράδειγμα Πολυωνυμικής Συνάρτησης.

2. **Ρητή:** $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα πεπερασμένου βαθμού. Πεδίο ορισμού το $A = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.

3. **Εκθετική με βάση το α:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ με $f(x) = a^x$ και $a > 0$.

   Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το $(0, +\infty)$.



$0 < a < 1$ $\qquad\qquad$ $a > 1$

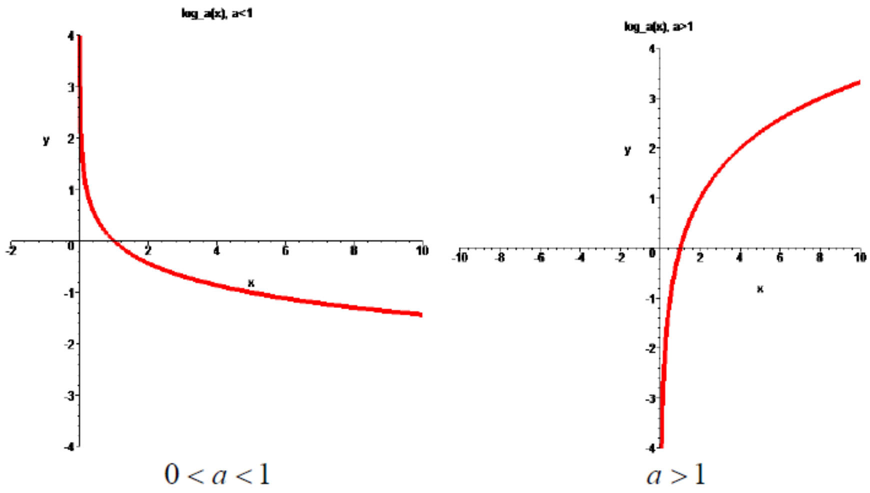
Σχήμα 10. Εκθετική συνάρτηση με βάση το α.

Ιδιότητες πράξεων με δυνάμεις:

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $\left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y}$
- $a^x b^x = \left(ab\right)^x$

4. **Λογαριθμική με βάση α**: $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ με $f\left(x\right)=\log_a\left(x\right)$.

Πεδίο ορισμού $A=\left(0,+\infty\right)$.



Σχήμα 11. Λογαριθμική συνάρτηση με βάση α.

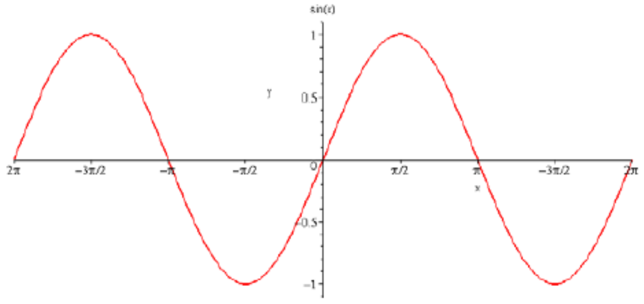
Ιδιότητες πράξεων με λογαρίθμους:

- $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow a^y = x$.
- $\log_\alpha a^x = x$ και $a^{\log_a x} = x$.
- $\log_\alpha a = 1$ και $\log_\alpha 1 = 0$.
- $\log_\alpha\left(x_1\cdot x_2\right)=\log_\alpha x_1+\log_\alpha x_2$.
- $\log_\alpha\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)=\log_\alpha x_1-\log_\alpha x_2$.
- $\log_\alpha x^k = k\log_\alpha x$.
- $\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
- Αν $a>1$ τότε: $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$.
- Αν $0<a<1$ τότε: $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.
- $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$.
- $a^x = e^{x\ln a}$, διότι $a = e^{\ln a}$.
- $\log_\alpha x = \dfrac{\log_\beta x}{\log_\beta \alpha}$.

5. **Τριγωνομετρικές:**

5.1. **Ημίτονο:** $f(x) = \sin x$.

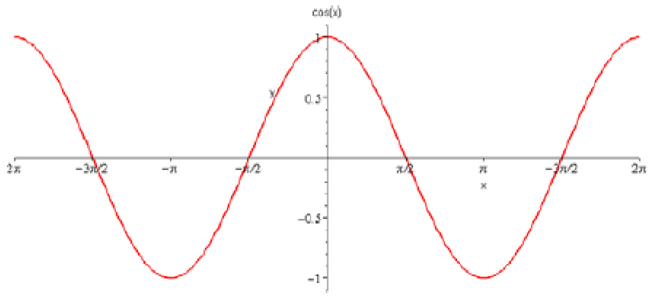
Πεδίο ορισμού: $A = \mathbb{R}$. Σύνολο τιμών $f(A) = [-1, 1]$.



Σχήμα 12. Συνάρτηση ημιτόνου.

5.2. **Συνημίτονο:** $f(x) = \cos(x)$.

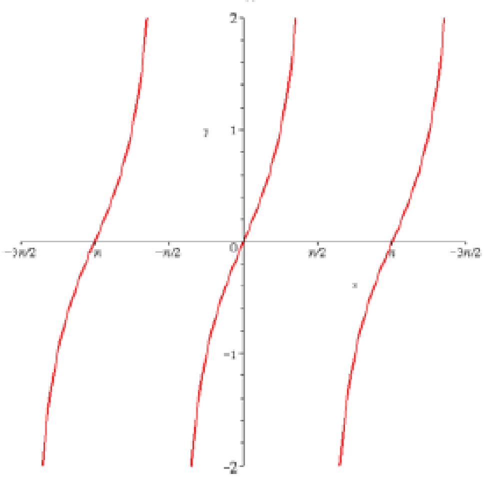
Πεδίο ορισμού: $A = \mathbb{R}$. Σύνολο τιμών $f(A) = [-1, 1]$.



Σχήμα 13. Συνάρτηση συνημίτονου.

5.3. **Εφαπτομένη:** $f(x) = \tan(x)$.

Πεδίο ορισμού: $A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z \right\}$**.** Σύνολο τιμών $f(A) = R$.



Σχήμα 14. Συνάρτηση εφαπτομένης.

6. **Αντίστροφες Τριγωνομετρικές:**

6.1. **Τόξο Ημιτόνου:** arcsin(x).

Η συνάρτηση $f(x)=\sin x$ περιορισμένη στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ είναι αντιστρέψιμη.

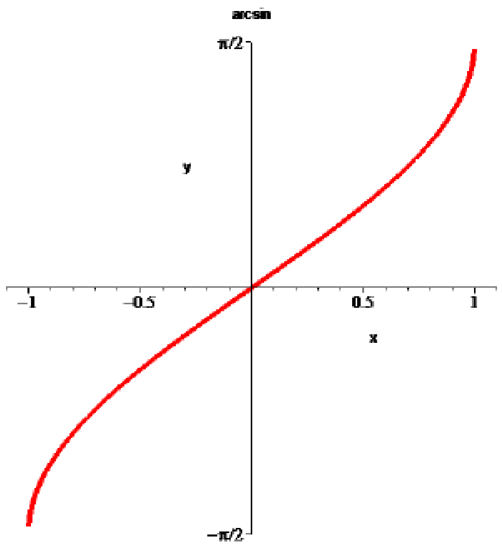
Συμβολίζουμε με $\sin^{-1}x$ ή $\arcsin x$ την αντίστροφη της.

$\arcsin x:[-1,1]\to\mathbb{R}$.

Πεδίο Τιμών είναι το $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Πίνακας 1. Ενδεικτικές τιμές ημιτόνου και τόξου ημιτόνου.

α/α	Ενδεικτικές τιμές ημιτόνου:	Ενδεικτικές τιμές τόξου ημιτόνου:
1	$\sin(\frac{\pi}{2})=1$	$\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$
2	$\sin(0)=0$	$\arcsin(0)=0$
3	$\sin(-1)=\frac{-\pi}{2}$	$\arcsin(-1)=\frac{\pi}{2}$



Σχήμα 15. Συνάρτηση Τόξου Ημιτόνου.

6.2. **Τόξο Συνημιτόνου:** arcos(x).

Η συνάρτηση $f(x)=\cos x$ περιορισμένη στο διάστημα $[0,\pi]$ είναι αντιστρέψιμη.

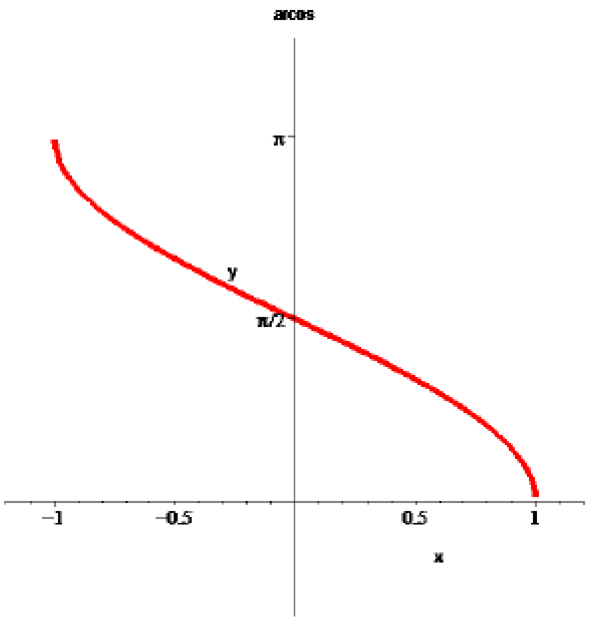
Συμβολίζουμε με $\cos^{-1}x$ ή $\arccos x$ την αντίστροφη της.

$\arccos x:[-1,1]\to\mathbb{R}$.

Πεδίο Τιμών είναι το $[0,\pi]$.

Πίνακας 2. Ενδεικτικές τιμές συνημιτόνου και τόξου συνημιτόνου.

α/α	Ενδεικτικές τιμές συνημιτόνου:	Ενδεικτικές τιμές τόξου συνημιτόνου:
1	$\cos(0)=1$	$\arcos(1)=0$
2	$\cos(\frac{\pi}{2})=0$	$\arcos(0)=\frac{\pi}{2}$
3	$\cos(\pi)=-1$	$\arcos(-1)=\pi$



Σχήμα 16. Συνάρτηση Τόξου Συνημιτόνου.

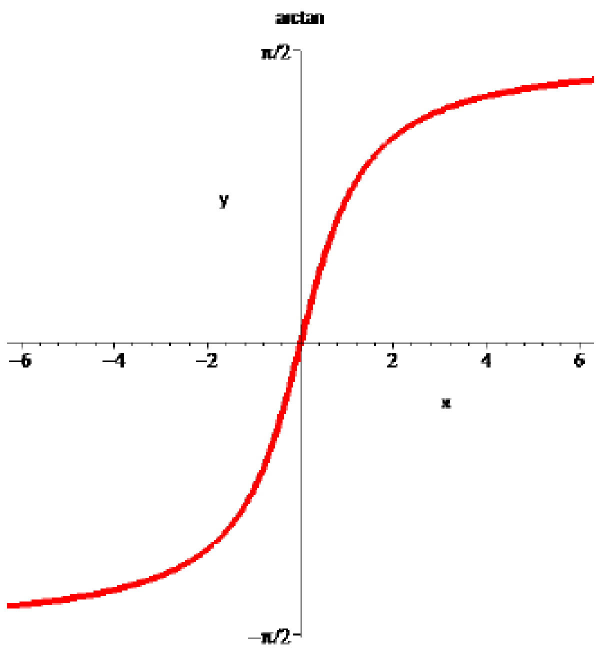
6.3. **Τόξο Εφαπτομένης:** arctan(x).

Η συνάρτηση $f(x) = \tan x$ περιορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι αντιστρέψιμη.

Συμβολίζουμε με $\tan^{-1} x$ ή $\arctan x$ την αντίστροφη της.

$\arctan x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Πεδίο Τιμών είναι το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Σχήμα 17. Συνάρτηση Τόξου Εφαπτομένης.

5.2 Όριο – Συνέχεια

Ορισμός: Έστω $V \neq \varnothing$ και $d: V \times V \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

1. $d(x,y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in V$ και $d(x,y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x)$.
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Η πραγματική συνάρτηση d ονομάζεται **μετρική** και ο αριθμός $d(x,y)$ **απόσταση** του x από το y.

Το ζεύγος (V,d) ονομάζεται **μετρικός χώρος** (Metric Space).

- Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μια απόσταση είναι η: $d_1(x,y) = |x-y|$ (συνήθης απόσταση).

Ορισμός: Έστω $(V,+,\cdot)$ ένας πραγματικός γραμμικός χώρος μια απεικόνιση $\| \; \|: V \to \mathbb{R}$ ονομάζεται νόρμα αν:

1. $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in V$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν x=0.
2. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$ για κάθε $x \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in V$.

Το ζεύγος $(V, \| \; \|)$ ονομάζεται χώρος με νόρμα.

Έτσι η απεικόνιση $d(x,y) = \|x-y\|$ είναι μια μετρική στον V.

- Στον γραμμικό χώρο $\mathbb{R}^n$ μια νόρμα (η ευκλείδεια νόρμα) είναι $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ αν $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και έτσι η απόσταση μεταξύ δύο στοιχείων $x, y \in \mathbb{R}^n$ είναι $d(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$.

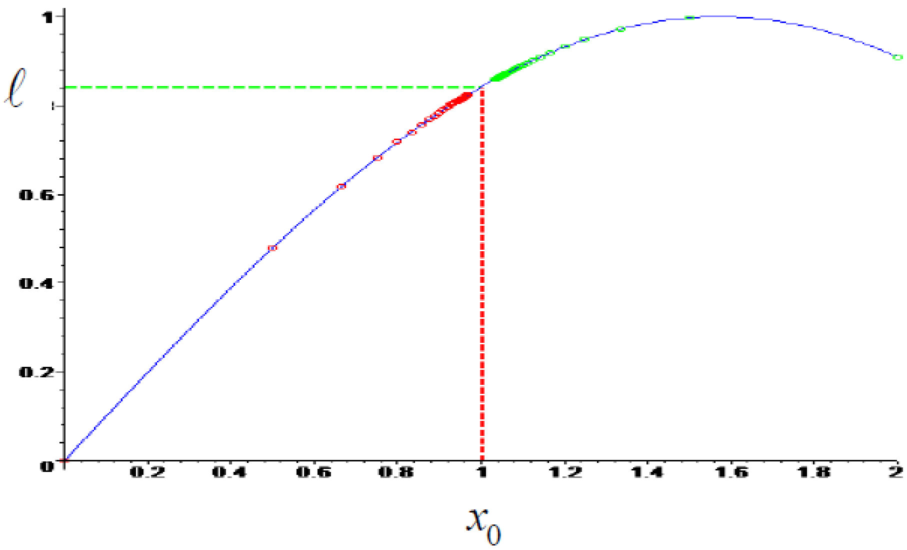
Ορισμός: Έστω ένα σύνολο $V \neq \varnothing$ και $x_0 \in V$ τότε το σύνολο όλων των σημείων $x \in V$ τέτοιων ώστε $d(x,x_0) < \varepsilon$ (ε>0) ονομάζεται **περιοχή** του x_0.

- Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών με τη συνήθη απόσταση, μια περιοχή είναι ένα ανοικτό διάστημα $d_1(x,x_0) = |x-x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon$
$\Leftrightarrow -\varepsilon + x_0 < x < \varepsilon + x_0 \Leftrightarrow x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

Ορισμός: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ ονομάζεται σημείο συσσώρευσης του Α, αν και μόνο αν κάθε περιοχή του x_0 περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του Α διαφορετικό του x_0.

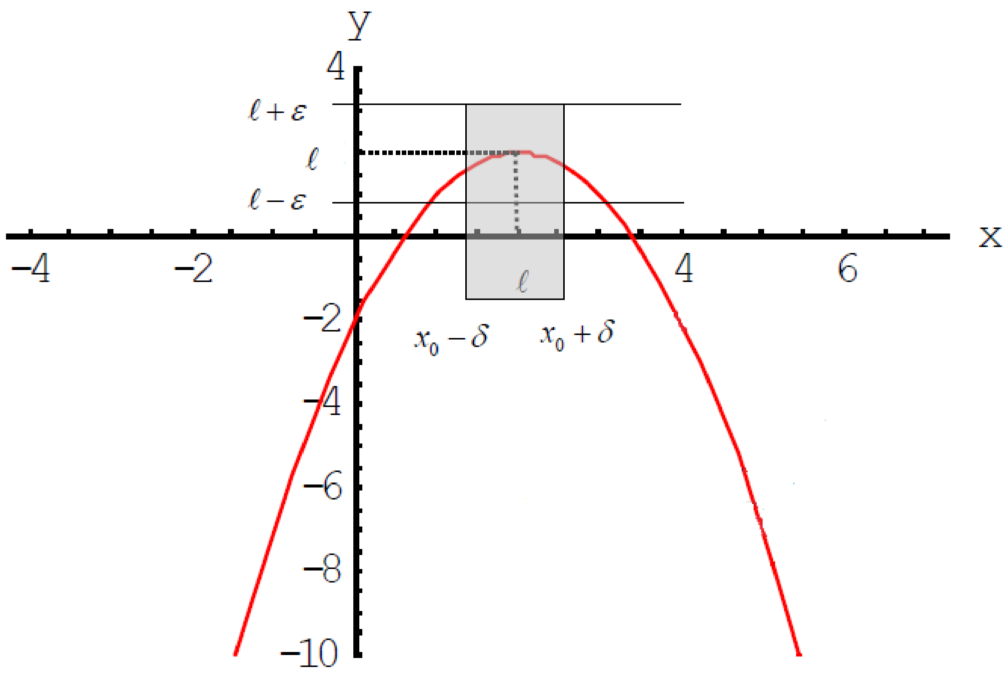
5.2.1 Όριο καθώς το $x \to x_0$ (πεπερασμένο): $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Διαισθητικά: Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης προσεγγίζουν όσο «κοντά» θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο το x_0, τότε το όριο της συνάρτησης $f(x)$ είναι το ℓ.



Σχήμα 18. Διαισθητική απεικόνιση του ορίου.

Ορισμός: Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A τότε θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 **όριο** το $\ell \in \mathbb{R}$ όταν για κάθε ε>0 υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ και συμβολίζουμε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.



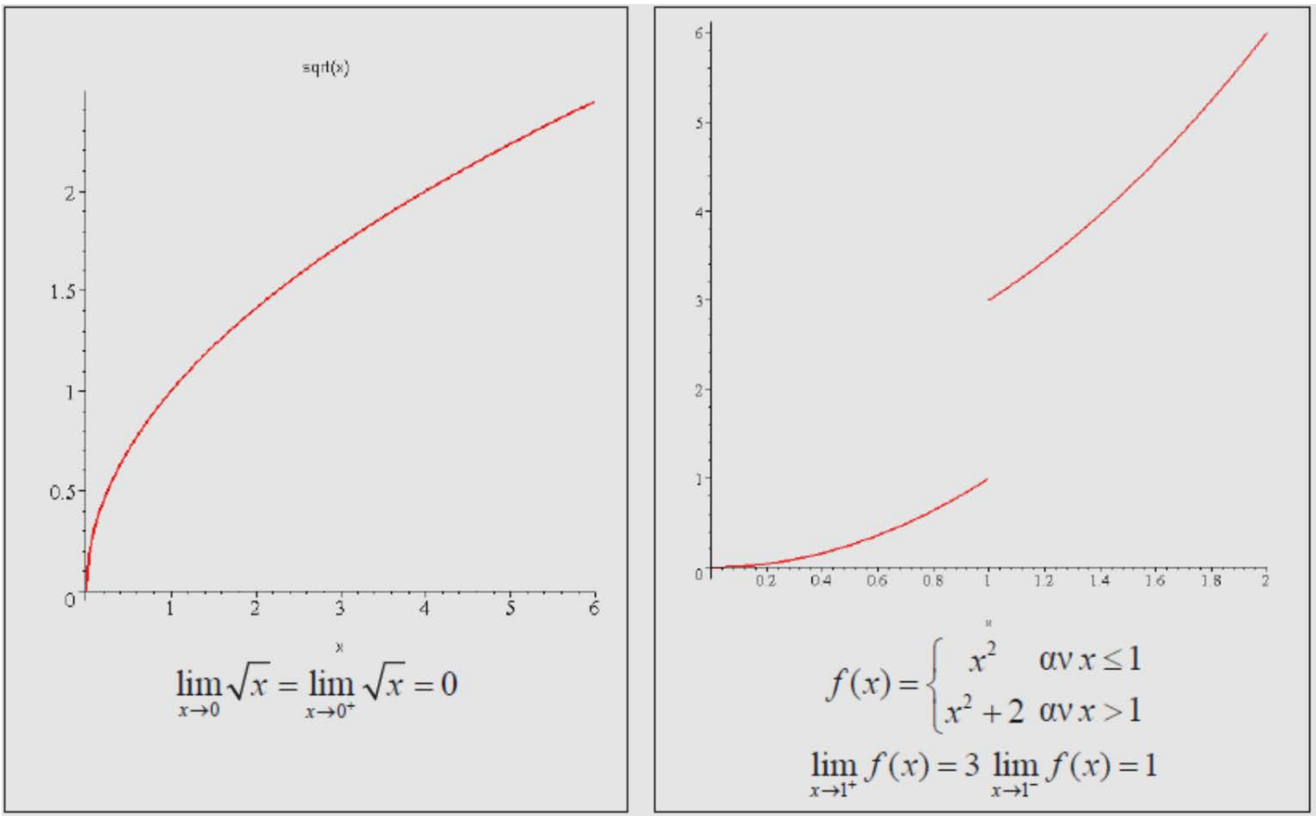
Σχήμα 19. Απεικόνιση του ορίου.

Ορισμός: Έστω $f:(x_0,b)\to\mathbb{R}$ λέμε ότι η f **έχει στο x_0 δεξιό πλευρικό όριο** το $\ell\in\mathbb{R}$ όταν για κάθε ε>0 υπάρχει $\delta(\varepsilon)>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in A$ με $x_0<x<x_0+\delta$, να ισχύει $|f(x)-\ell|\le\varepsilon$ και συμβολίζουμε $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$.

Ορισμός: Έστω $f:(a,x_0)\to\mathbb{R}$ λέμε ότι η f **έχει στο x_0 αριστερό πλευρικό όριο** το $\ell\in\mathbb{R}$ όταν για κάθε ε>0 υπάρχει $\delta(\varepsilon)>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in A$ με $x_0-\delta<x<x_0$, να ισχύει $|f(x)-\ell|\le\varepsilon$ και συμβολίζουμε $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$.

Παρατηρήσεις:

1. Αν το όριο της f στο x_0 υπάρχει, τότε αυτό είναι μοναδικό.
2. Έστω $f:(\alpha,x_0)\cup(x_0,b)\to\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$.
3. Έστω $f:(x_0,b)\to\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.
4. Έστω $f:(\alpha,x_0)\to\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.
5. Αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$,τότε δεν υπάρχει το όριο της f στο x_0.
6. $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$.
7. $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.



Σχήμα 20. Αριστερά: Τα πλευρικά όρια είναι ίσα. Δεξιά: Τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα.

Θεώρημα (κριτήριο Παρεμβολής): Έστω $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του συνόλου Α. Αν: $h(x) \le f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in A, x \ne x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$ τότε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Θεώρημα: Αν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$, τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+ g(x))= \lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\kappa f(x))=\kappa \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.
5. $\lim\limits_{x\to x_0}| f(x)|=|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)|$.
6. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$ εφόσον $f(x) \ge 0$ για κάθε x, με $x \in$(α, x_0)$\cup$(x_0,β).
7. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\nu}=[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^{\nu}$.
8. $\lim\limits_{x\to x_0} x^{\nu} = x_0{}^{\nu}$.
9. Αν $p(x)$ πολυώνυμο βαθμού n ,τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$.
10. Αν $p(x)$, q(x) πολυώνυμα, τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(x_0)}{q(x_0)}, q(x_0) \ne 0$.

Παραδείγματα:

- Αν $f(x) = x^3 + 5x - 2$ τότε:
  $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left[x^3 + 5x - 2\right] = \lim\limits_{x\to 1} x^3 + \lim\limits_{x\to 1} 5x - \lim\limits_{x\to 1} 2 = \lim\limits_{x\to 1} x^3 + 5\lim\limits_{x\to 1} x - \lim\limits_{x\to 1} 2 = 1 + 5 - 2 = 4 = f(1)$.
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x+1)} = \dfrac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \left(3\sin x + \cos x\right) = 3\cdot \sin\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{4} = 3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.
- $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)} =$

  $\mathop{lim}\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)} = \mathop{lim}\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

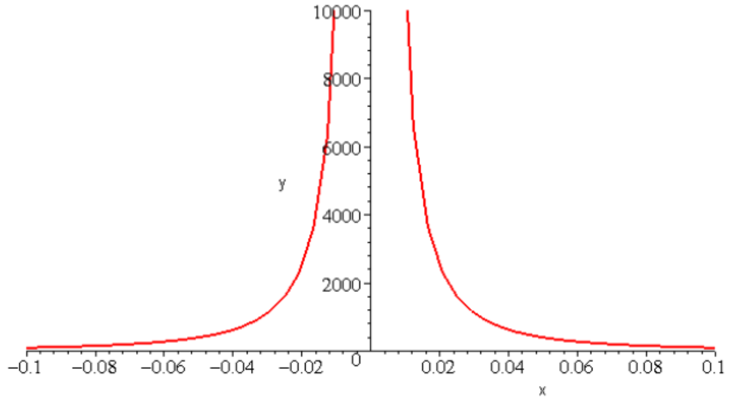
Πρόταση: Αποδεικνύεται με χρήση του ορισμού ότι:

- $\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$.
- $\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.
- $\lim_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$.
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$.
- $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

5.2.2 Όριο καθώς το $x \to x_0$ (Μη πεπερασμένο): $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Ορισμός:

- Το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για όλα τα x με $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.
- Το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για όλα τα x με $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$.



$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Σχήμα 21. Η συνάρτηση αποκλίνει στο άπειρο καθώς το $x \to 0$.

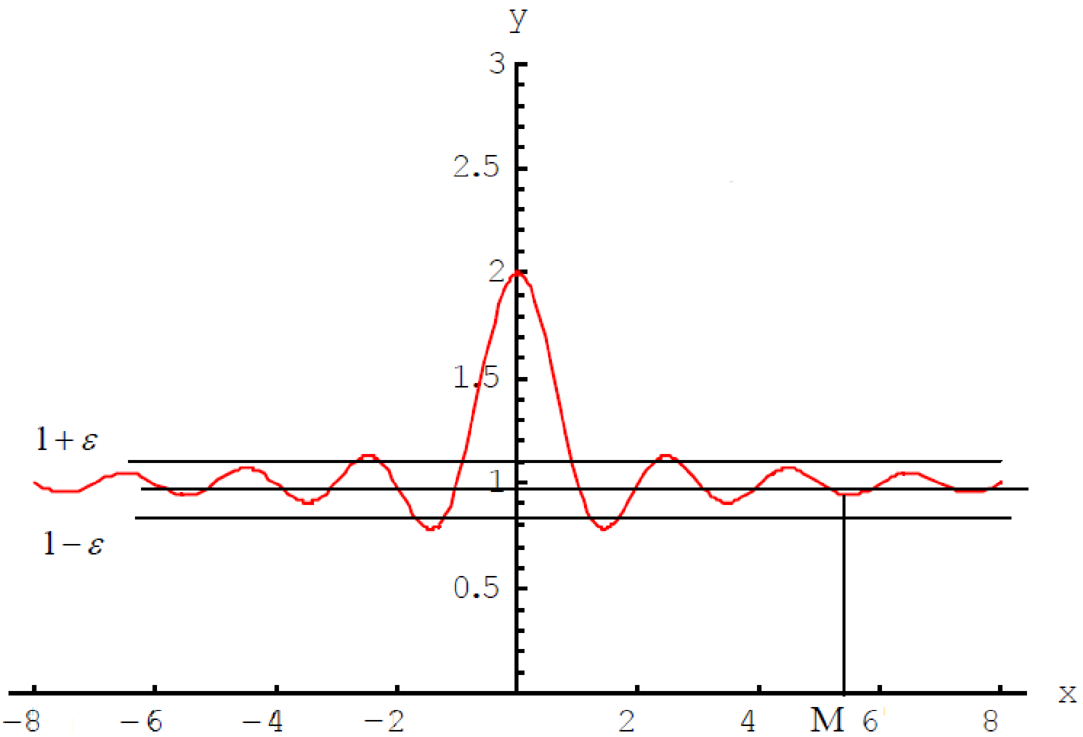
Παρατηρήσεις:

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (-f(x)) = -\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (-f(x)) = +\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.

α/α	Όρια	Τιμές	Τιμές	Τιμές	Τιμές	Τιμές	Τιμές	Τιμές	Τιμές
1	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
2	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
3	$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Α	Α
4	$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x))$	$\ell > 0$ $+\infty$	$\ell < 0$ $-\infty$	$\ell < 0$ $+\infty$	$\ell > 0$ $-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

5.2.3 Όριο καθώς το $x \to \pm\infty$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

Ορισμός: Το $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ αν για δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας αριθμός M τέτοιος ώστε, για όλα τα x με $\mathrm{M} < x \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.



Σχήμα 22. Όριο ημιτονοειδούς συνάρτησης.

Θεώρημα: Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell_1$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \ell_2$,τότε:

- $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) \pm g(x)) = \ell_1 \pm \ell_2$.
- $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$.
- $\lim\limits_{x\to\infty}(k \cdot f(x)) = k \cdot \ell_1$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}, \quad \ell_2 \neq 0$.

Πρόταση: Αποδεικνύεται με χρήση του ορισμού ότι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \alpha\nu \quad n \quad \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \\ -\infty & \alpha\nu \quad n \quad \pi\varepsilon\rho\rho\iota\tau\acute{o}\varsigma \end{cases}$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_0\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha_n x^n)$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_n x^n+\beta_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{\alpha_n x^n}{\beta_n x^n}\right)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0, 0<a<1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty, 0<a<1$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty, a>1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0, a>1$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\log x=+\infty$.

Παραδείγματα:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{3x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x}\dfrac{2}{3-2\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{3-2\frac{1}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}2}{\lim\limits_{x\to\infty}3-2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\dfrac{2}{3-2\cdot 0}=\dfrac{2}{3}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^3-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^3}\dfrac{1-3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}}{2-2\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\dfrac{1-3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}}{2-2\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to\infty}\frac{1-3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}}{2-2\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=0\cdot\frac{1-3\cdot 0+2\cdot 0}{2-2\cdot 0}=0 .$$

6. Συνεχείς Συναρτήσεις

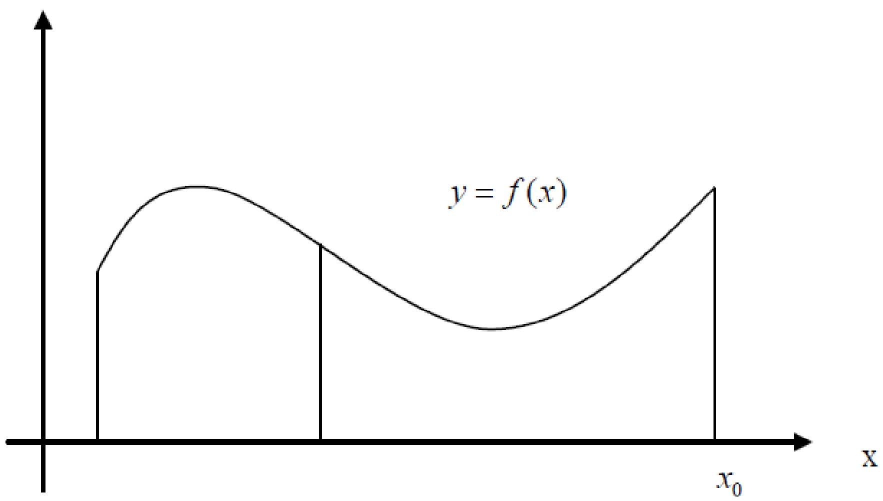
Μια συνάρτηση είναι συνεχής αν η γραφική της παράσταση δεν παρουσιάζει διακοπές, χάσματα ή άλματα.

Μια συνάρτηση $y=f(x)$ είναι **συνεχής σε ένα εσωτερικό σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Μια συνάρτηση $y=f(x)$ είναι **συνεχής στο αριστερό ακραίο σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της αν $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Μια συνάρτηση $y=f(x)$ είναι **συνεχής στο δεξιό ακραίο σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της αν $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Μια συνάρτηση είναι **συνεχής** εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.



Σχήμα 23. Γραφική παράσταση συνεχούς συνάρτησης.

Μια συνάρτηση $y=f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν ισχύουν τα ακόλουθα:

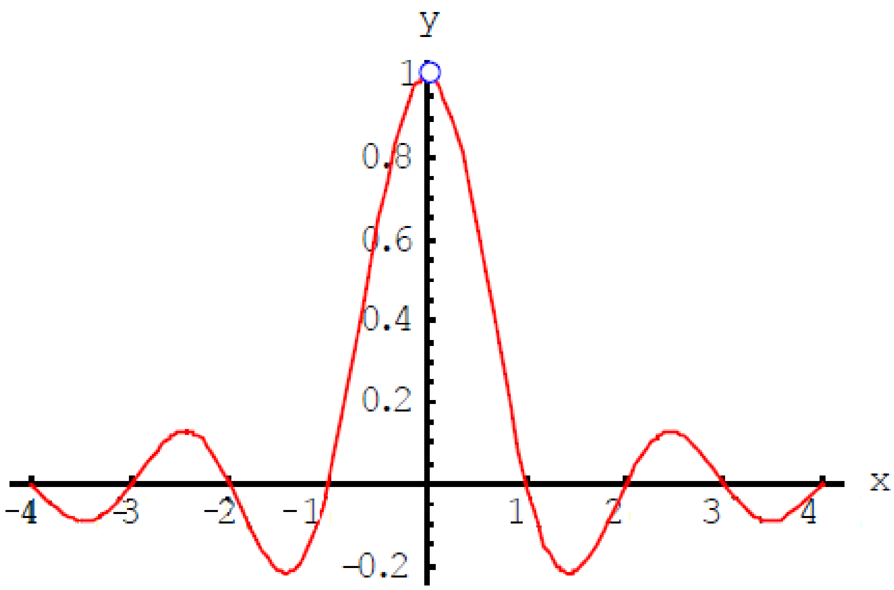
1. Το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού.
2. Το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ υπάρχει.
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Παρατηρήσεις:

- Τα πολυώνυμα και τα πηλίκα πολυωνύμων είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.
- Αν οι συναρτήσεις $f(x), g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0 τότε και οι $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $kf(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι συνεχείς στο x_0.
- Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

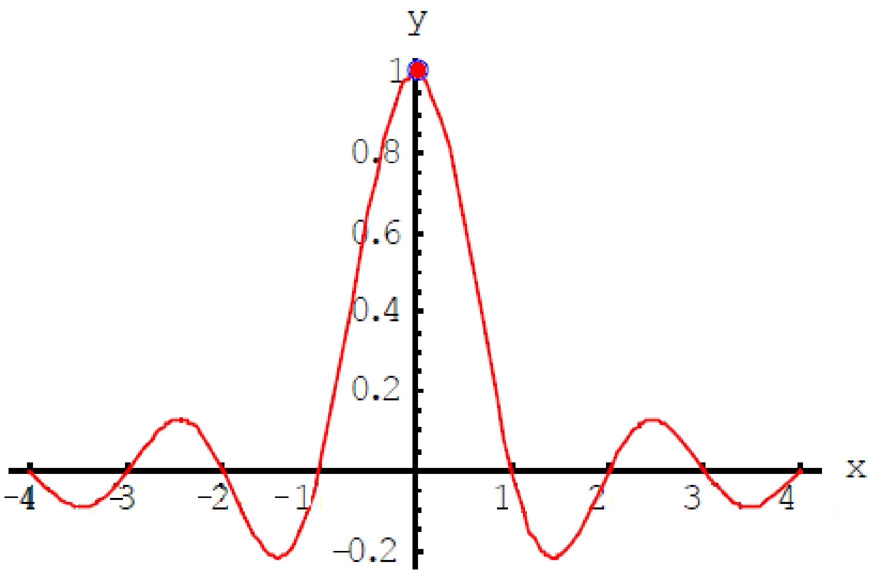
- Οι συναρτήσεις $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x είναι συνεχής.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων εκτός από το σημείο $x=0$ όπου δεν ορίζεται.



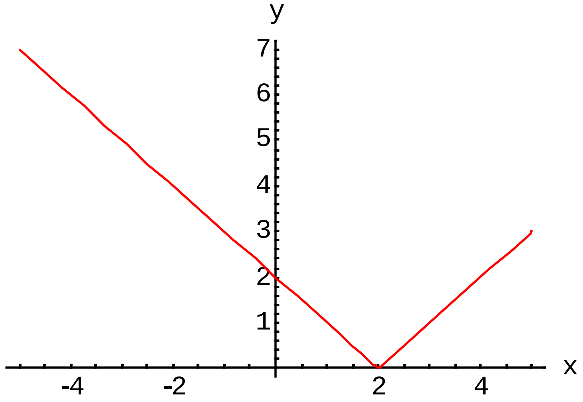
Σχήμα 24. Γραφική παράσταση της $f(x)$.

Μπορούμε όμως να επεκτείνουμε αυτή την συνάρτηση ώστε να είναι συνεχής και στο $x=0$, ορίζοντάς την ως εξής $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$ (γεμίσαμε το σημείο ασυνέχειας).



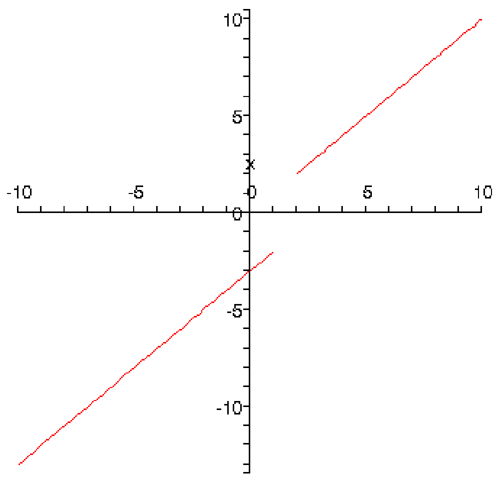
Σχήμα 25. Γραφική παράσταση της $f(x)$ (μετά την επέκταση).

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x)=|x-2|$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$. Αν βγάλουμε το απόλυτο, η συνάρτηση γράφεται $f(x)=\begin{cases} x-2, x>2 \\ -x+2, x<2 \end{cases}$.



Σχήμα 26. Γραφική παράσταση της $f(x)$.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x-3, x\geq 1 \\ x \quad , x<1 \end{cases}$ είναι ασυνεχής στο $x_0=1$. Πράγματι, τα πλευρικά όρια στο $x_0=1$ είναι διαφορετικά, άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. (ασυνέχεια α-είδους). Αυτό προκύπτει και από τη γραφική της παράσταση.



Σχήμα 27. Γραφική παράσταση της $f(x)$.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.