Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα

Ενότητα: Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα: Ο Αλγόριθμος Gauss

Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής

1. Σκοποί ενότητας

Παρουσιάζονται θέματα Γραμμικής Άλγεβρας που είναι απαραίτητα για τον χρηματοοικονομικό και λογιστικό αναλυτή.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Συμβολισμός πινάκων και πράξεις με πίνακες, Η σχέση του Ax με τις στήλες του A, Γραμμικά Συστήματα: Ο Αλγόριθμος Gauss, Αλγόριθμος Gauss, Η διάσπαση $A=L\cdot U$, Κατασκευή του L, Επίλυση του $Ax=b$ όταν γνωρίζω τη διάσπαση $A=L\cdot U$, Αν εμφανιστεί μηδενικό, Αντίστροφοι και Ανάστροφοι Πίνακες, Αντίστροφοι πίνακες, Μέθοδος υπολογισμού του αντιστρόφου (Αλγόριθμος Gauss – Jordan), Ανάστροφοι πίνακες.

3. Συμβολισμός πινάκων και πράξεις με πίνακες

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων σε «πολλούς αγνώστους», όπως για παράδειγμα το παρακάτω:

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + 1x_2 + x_3 = 5 \\
&4x_1 - 6x_2 + 0x_3 = -2
\end{aligned}
$$

Συνήθως αναρωτιόμαστε ποια $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ λύνουν ταυτόχρονα και τις δύο εξισώσεις. Αλλά με την επίλυση γραμμικών συστημάτων θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τα συστήματα ως κίνητρο για να εισάγουμε τους «πίνακες».

Η γενική μορφή ενός συστήματος με m εξισώσεις και n αγνώστους είναι:

$$
(*) \begin{Bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{Bmatrix}
$$

όπου τα a_{ij} (i ο δείκτης γραμμής και j ο δείκτης στήλης) είναι οι συντελεστές των x_j.

Στο παράδειγμά μας:

$$
\begin{aligned}
&\overbrace{2}^{a_{11}}\, x_1 + \overbrace{1}^{a_{12}}\, x_2 + \overbrace{1}^{a_{13}}\, x_3 = \overbrace{5}^{b_1} \\
&\underbrace{4}_{a_{21}}\, x_1 + \underbrace{(-6)}_{a_{22}}\, x_2 + \underbrace{0}_{a_{23}}\, x_3 = \underbrace{-2}_{b_2}
\end{aligned}
$$

Ψάχνω πιο σύντομη γραφή του συστήματος $(*)$:

Αν συμβολίσω με $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ και με a^{i^T} την «οριζόντια» (εξ ου και το T που διαβάζεται «ανάστροφο») i-γραμμή των συντελεστών $a^{i^T} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ με $a^i \in \mathbb{R}^n$.

π.χ. $a^{1^T} = (2,1,1)$ και $a^{2^T} = (4,-6,0)$.

Τότε η i-εξίσωση γράφεται $\langle a^i, x\rangle = b_i$ και το σύστημα γράφεται:

$$(*):\begin{cases} \langle a^1, x\rangle = b_1 \\ \langle a^2, x\rangle = b_2 \\ \vdots \\ \langle a^m, x\rangle = b_m \end{cases}$$

Θέλω ακόμα «πιο σύντομη» γραφή του συστήματος. Θέλω να «πιάσω» όλους τους συντελεστές a_{ij} σε ένα «τετραγωνικό αντικείμενο» A και να γράφω το σύστημα ως $A\cdot x = b$ με $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ και

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ π.χ. } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αντικείμενα σαν τον A τα ονομάζω «πίνακες» και τα ορίζω παρακάτω:

Ορισμός (Πίνακας): Πίνακας $m\times n$ είναι ένα σύνολο $m\cdot n$ πραγματικών αριθμών a_{ij}, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$ διατεταγμένων σε m γραμμές και n στήλες (ορθογώνια διευθέτηση $m\times n$ στοιχείων του συνόλου $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$)).

Ο $m\times n$ πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ γράφεται και ως $A = \left[a_{ij}\right]_{\substack{i=\dots \\ j=\dots}}$.

- Το σύνολο όλων των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς το συμβολίζουμε με $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
- Αν τα στοιχεία του πίνακα είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε το σύνολο των πινάκων το συμβολίζουμε με $M_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Ορισμός: Ένας $1\times n$ πίνακας λέγεται **πίνακας γραμμή** $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \in M_{1\times n}$. Ένας $m\times 1$ πίνακας λέγεται **πίνακας στήλη** $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}$.

Ο πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδέν λέγεται **μηδενική πίνακας** και συμβολίζεται με

$$O_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός: Δύο πίνακες $A=\left(a_{ij}\right)$, $B=\left(\beta_{ij}\right)\in M_{m\times n}$, θα λέμε ότι είναι **ίσοι (Α=Β)**, αν έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία ίσα δηλαδή $a_{ij}=b_{ij}$.

Πρόσθεση δύο $m\times n$ πινάκων: Έστω $A=\left[a_{ij}\right]$ και $B=\left[b_{ij}\right]$ δύο $m\times n$ πίνακες.

Τότε ορίζω $A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$ (αθροίζω κατά συντεταγμένες).

Πολλαπλασιασμός με $\lambda\in R$. Ορίζω τον πίνακα $\lambda\cdot A=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$.

Κανόνες πράξεων:

Αν A, B, C $m\times n$ πίνακες, και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$:

- $A+B=B+A$.
- $(A+B)+C=A+(B+C)$.
- $\exists\ m\times n\ O:\ A+O=A\ \forall\ m\times n\ A$, $O=\underbrace{\left.\begin{bmatrix}0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\right\}n}_{m}$.
- $\forall A\ \exists(-A):\ A+(-A)=O$.
- $\lambda\cdot(\mu\cdot A)=(\lambda\cdot\mu)\cdot \mathrm{A}$.
- $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$.
- $\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$.

Σύμβαση: Τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ τα γράφουμε ως πίνακες με μια στήλη, δηλαδή ως $n\times 1$ πίνακες, όχι ως γραμμές. Αν θέλουμε να γράψουμε το $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ ως γραμμή το συμβολίζουμε με x^T.

$x^T=\left(x_1,\dots,x_n\right)$ (διαβάζουμε x ανάστροφο).

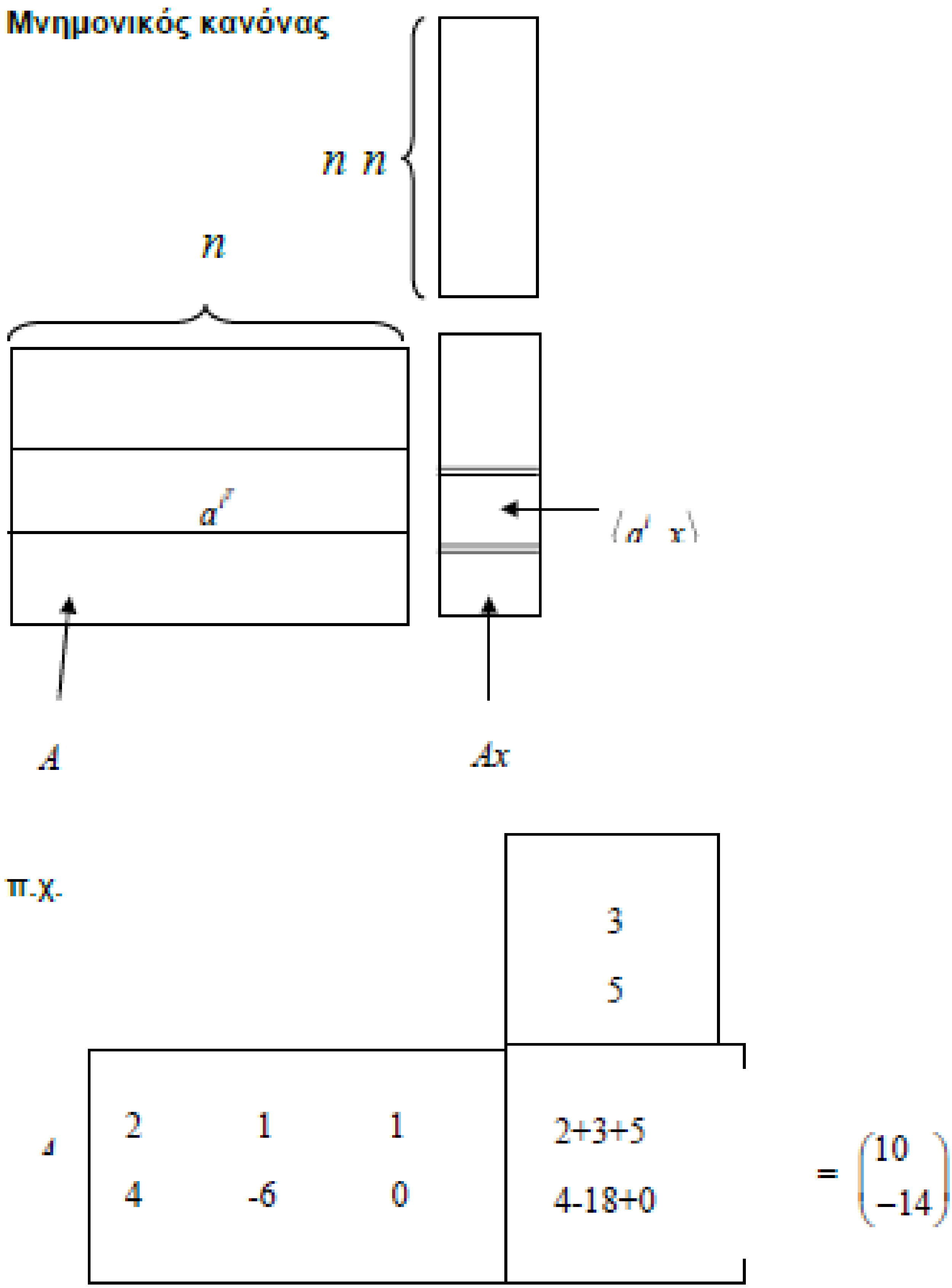
Θέλω η αριστερή πλευρά γραμμικού συστήματος να γράφεται ως $A\cdot x$. Άρα πρέπει να ορίσω πολλαπλασιασμό πίνακα επί διάνυσμα, τέτοιο που το αποτέλεσμα να δίνει την αριστερή πλευρά του συστήματος.

Ορισμός (Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα): Έστω $A=\left[a_{ij}\right]$ ένας $m\times n$ πίνακας με i-γραμμή την $a^{i^T}=\left(a_{i1},\dots a_{in}\right)$. Έστω $x\in R^n$ $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

Ορίζουμε $A\cdot x\in R^m$ ως:

$$A\cdot x=\ m-\sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\varepsilon\varsigma\left\{\begin{pmatrix}\left\langle a^1,x\right\rangle\\ \left\langle a^2,x\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle a^m,x\right\rangle\end{pmatrix}\right.=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m$$

Σημείωση: Για να μπορώ να πολλαπλασιάσω A και x πρέπει: το πλήθος στηλών του A = το πλήθος συντεταγμένων του x.



Σχήμα 1. Μνημονικός κανόνας.

3.1 Τί σχέση έχει το Ax με τις στήλες του A;

Αν ονομάσουμε $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ την i-στήλη του A τότε:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{pmatrix} + \dots = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots \;= x_1 a_1 + x_2 a_2 .$$

Δηλαδή, Το Ax είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A με συντελεστές τις συντεταγμένες του x.

Κανόνες πράξεων:

- $A \cdot (x + y) = Ax + Ay$.
- $A \cdot (\lambda x) = \lambda \cdot (Ax)$.
- $(A + B) \cdot x = Ax + Bx$.
- $(\lambda A) \cdot x = \lambda \cdot (Ax)$.

Παραδείγματα:

Μοναδιαίος

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow I_n \cdot x = x \quad \forall x$$

Ο I_n είναι ο ταυτοτικός ή μοναδιαίος πίνακας.

Διαγώνιος

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}.$$

Στοιχειώδης $E(\lambda)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots\lambda & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ x_i + \lambda x_j \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ορισμός: Έστω ένας πίνακας $A \in M_n$. Ο A θα λέγεται:

1. **Συμμετρικός** αν ο πίνακας A συμπίπτει με τον ανάστροφο του, δηλαδή $A^T = A$.
   1.1. Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός, πράγματι $A^T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = A$.
2. **Αντισυμμετρικός** (ή στρεβλά συμμετρικός) αν $A^T = -A$.
   2.1. Ο $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ είναι αντισυμμετρικός, πράγματι $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = -A$.
3. **Ορθογώνιος** αν $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n$.
   3.1. Ο $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

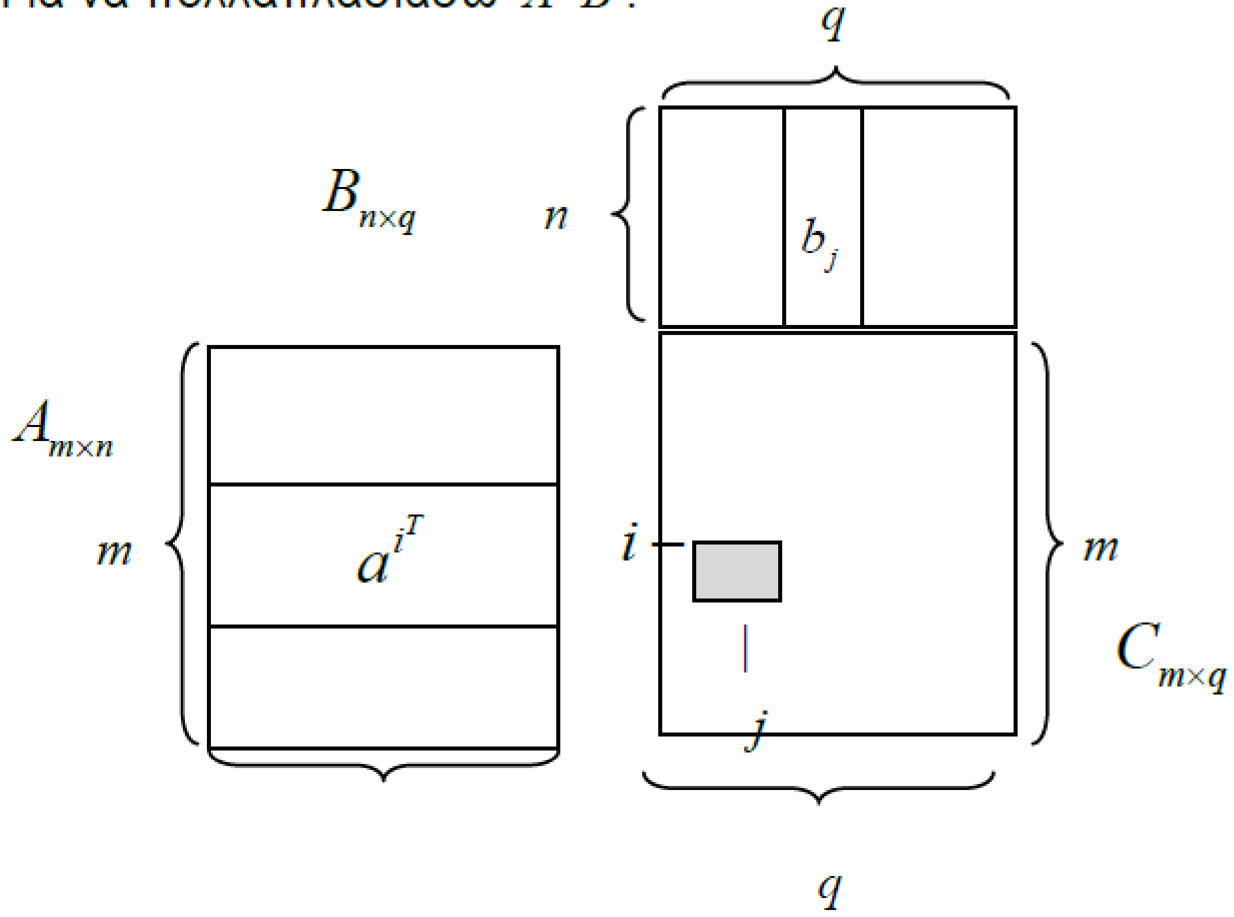
Επίσης ορίζουμε **πολλαπλασιασμό πινάκων μεταξύ τους**.

Ορισμός (Πολλαπλασιασμός πίνακα με πίνακα): Έστω A $m \times n$ πίνακας και B ένας $n \times q$ πίνακας. Ο πίνακας $C = A \cdot B$ θα είναι $m \times q$ και ορίζεται ως $C_{ij} = \langle a^i, b_j \rangle$ (εσωτερικό γινόμενο i-γραμμής του A με j-στήλη του B.

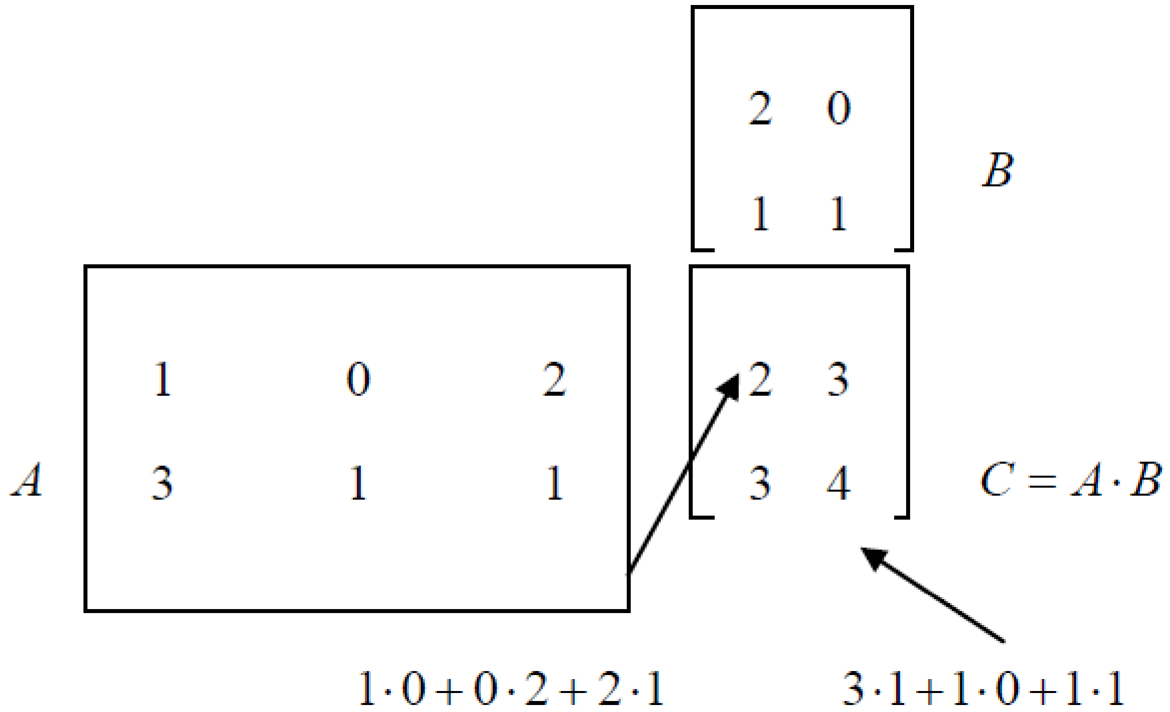
Σημείωση: Για να πολλαπλασιάσω A με B πρέπει:

Πλήθος στηλών A = πλήθος γραμμών B.

Για να πολλαπλασιάσω $A \cdot B$:

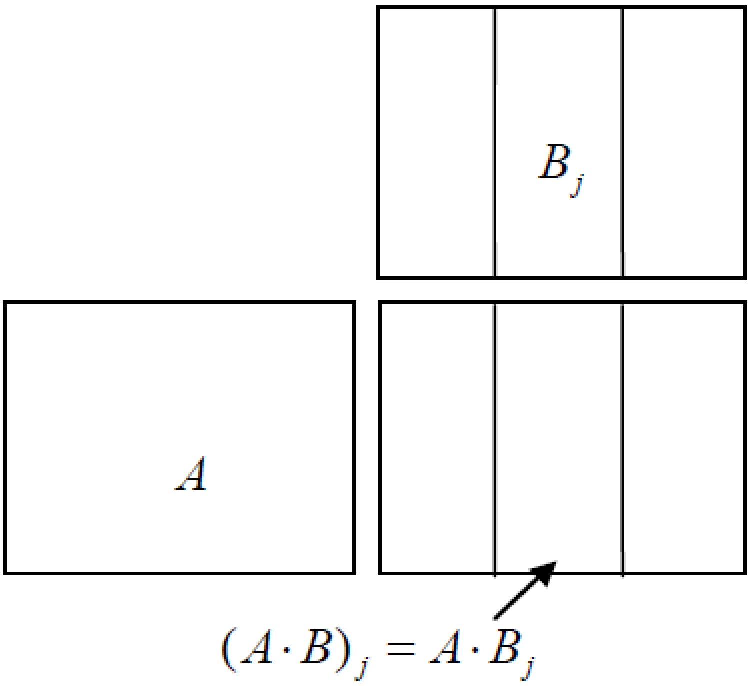


Σχήμα 2. Μνημονικός κανόνας.



Σχήμα 3. Παράδειγμα εφαρμογής του μνημονικού κανόνα.

Παρατήρηση: Η «j-στήλη του $A \cdot B$» ισούται με $A \cdot$ «j-στήλη του B». Δηλαδή $(A \cdot B)_j = A \cdot B_j$.

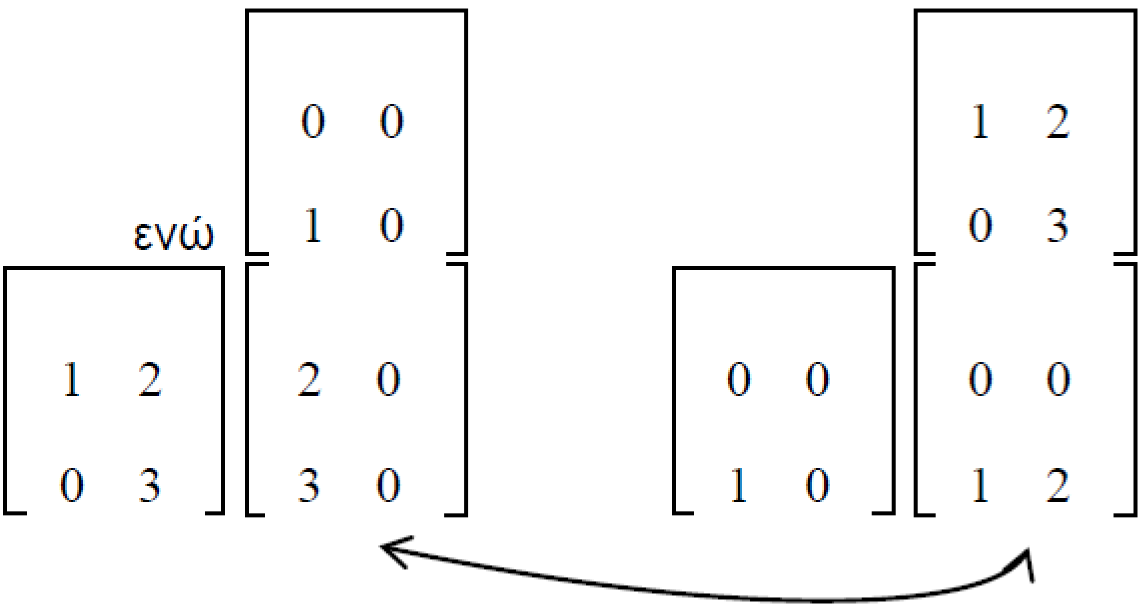


Σχήμα 4. Παρατήρηση $(A \cdot B)_j = A \cdot B_j$.

Κανόνες πράξεων:

- Έστω $A_{m\times n}$, $B_{n\times q}$, $C_{q\times s}$, $D_{n\times q}$, $E_{m\times n}$.
- $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$.
- $A\cdot(B+D) = A\cdot B + A\cdot D$.
- $(A+E)\cdot B = A\cdot B + E\cdot B$.
- $(\lambda\cdot \mathrm{A})\cdot(\mu\cdot B) = \lambda\cdot\mu\cdot A\cdot B$.

Προσοχή: Γενικά ισχύει $A\cdot B \neq B\cdot A \quad n\times n$!!!



Σχήμα 5. Παράδειγμα, $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Παραδείγματα:

Μοναδιαίος

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (I_n\cdot A)_j = I_n\cdot a_j = a_j \Rightarrow I_n\cdot A = A \text{ και } (A\cdot I_n)_j = A\cdot e_j = a_j \Rightarrow A\cdot I_n = A.$$

Διαγώνιος

Από αριστερά: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \dots \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots \end{bmatrix}$$ Το λ_i συντελεστής της **i-γραμμής**.

Από δεξιά: $\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \lambda_2 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}$$ Το λ_i συντελεστής της **i-στήλης**.

<u>Από αριστερά</u>

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_2 & \cdots \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & \end{bmatrix} \\ a_1 \end{array}$$

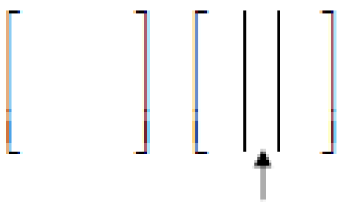
$$i - \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} + \lambda \alpha_{j1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i+1,1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ a^{i-1^T} \\ a^{i^T} + \lambda a^{j^T} \\ a^{i+1^T} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

i

Προσθέτει λ-πλάσιο της <u>j-γραμμής</u> στην <u>i-γραμμή</u>.

<u>Από δεξιά</u>

$$i - \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$



$a_i + \lambda a_i$

Προσθέτει λ-πλάσιο της <u>i-στήλης</u> στην <u>j-στήλη</u>.

Σχήμα 6. Στοιχειώδης $E(\lambda)$.

Πίνακες μεταθέσεων

Έστω P προκύπτει από μοναδιαίο πίνακα με εναλλαγή i- και j-γραμμής.

Τότε $P \cdot A$ εναλλάσσει i- & j-γραμμή του A και $A \cdot P$ εναλλάσσει i- & j-στήλη του A.

Παράδειγμα:

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Εναλλάσσοντας την 1η με τη 2η γραμμή προκύπτει ο $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Παρατηρούμε ότι:

$P \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ενώ $A \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$.

4. Γραμμικά Συστήματα: Ο Αλγόριθμος Gauss

Έστω το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} &2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 5 \\ &4x_1 - 6x_2 = -2 \\ &-2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9 \end{aligned}.$$

Στόχος: Να βρω τις λύσεις, δηλαδή τα $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ που ικανοποιούν και τις τρεις εξισώσεις.

Η διαδικασία επίλυσης βασίζεται στην αρχή ότι οι **λύσεις του συστήματος δεν αλλάζουν** αν:

- Αλλάξω τη σειρά των εξισώσεων.
- Πολλαπλασιάσω μία εξίσωση με λ $\langle a, x\rangle = b \Leftrightarrow \langle \lambda a, x\rangle = \lambda b$.
- Προσθέσω σε μία εξίσωση πολλαπλάσιο μίας άλλης εξίσωσης
  $$\left.\begin{aligned} \langle a^1, x\rangle = b_1 \\ \langle a^2, x\rangle = b_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &\langle a^1, x\rangle = b_1 \\ &\langle a^1 + \lambda a^2, x\rangle = b_1 + \lambda b_2 \end{aligned}\right. .$$

Ο αλγόριθμος Gauss προτείνει ένα συγκεκριμένο τρόπο να κάνω τέτοιες «**γραμμοπράξεις**» ώστε να καταλήξω σε λύση.

Κατ' αρχάς το σύστημα γράφεται ως $Ax = b$ με $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ και $b = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

4.1 Αλγόριθμος Gauss

Πρώτα παίρνουμε τον A και κολλάμε από δεξιά το b.

$\rightarrow [A \quad | \quad b]$. Στο παράδειγμά μας σχηματίζεται ο $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & |\, 5 \\ 4 & -6 & 0 & |\, -2 \\ -2 & 7 & 2 & |\, 9 \end{bmatrix}$.

Ακολούθως κάνουμε γραμμοπράξεις στον «διευρυμένο» A με την εξής σειρά:

1ο βήμα:

Αν $a_{11} \neq 0$ το ονομάζουμε πρώτο οδηγό. Προσθέτουμε κατάλληλα **πολλαπλάσια της πρώτης γραμμής** (την οποία κρατάμε αναλλοίωτη) στις επόμενες, έτσι ώστε **να μηδενιστούν τα στοιχεία κάτω από τον πρώτο οδηγό**.

Δηλαδή: στην i γραμμή προσθέτω $-\frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot$ της πρώτης γραμμής.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | \ 5 \\ 4 & -6 & 0 & | -2 \\ -2 & 7 & 2 & | \ 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_3'=\gamma_3+\gamma_1]{\gamma_2'=\gamma_2-2\gamma_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | \ 5 \\ 0 & -8 & -2 & | -12 \\ 0 & 8 & 3 & | \ 14 \end{bmatrix}.$$

2^{ο} βήμα:

Αν το δεύτερο στοιχείο της διαγωνίου (που προέκυψε μετά το 1^{ο} βήμα) $a_{22}' \neq 0$ το ονομάζω δεύτερο οδηγό. Κρατάω τις δύο πρώτες γραμμές και προσθέτω κατάλληλα **πολλαπλάσια της δεύτερης γραμμής** (της **γραμμής του οδηγού**!!) στις επόμενες ώστε **να μηδενιστούν τα στοιχεία κάτω από το δεύτερο οδηγό**.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | \ 5 \\ 0 & -8 & -2 & | -12 \\ 0 & 8 & 3 & | \ 14 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_3''=\gamma_3'+\gamma_2']{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | \ 5 \\ 0 & -8 & -2 & | -12 \\ 0 & 0 & 1 & | \ 2 \end{bmatrix}$$

Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται, (υπό την προϋπόθεση ότι τα διαγώνια στοιχεία που συναντώ είναι $\neq 0$) **μέχρι να φθάσω δεξιά σε άνω τριγωνικό πίνακα** (τα στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο είναι 0) και πάνω στη διαγώνιο έχει τους οδηγούς. Αυτόν τον ονομάζω U.

Στο παράδειγμά μας, όπου ο A είναι 3×3 άρκεσαν δύο βήματα. Αν $A_{n\times n}$ χρειάζονται $n-1$ βήματα του Αλγορίθμου Gauss.

Παράλληλα το b έχει μετασχηματιστεί σε κάποιο c:

$[A \quad b] \to [U \quad c]$.

Οι λύσεις του $Ax=b$ είναι ακριβώς οι λύσεις του $Ux=c$. Το πλεονέκτημα είναι τώρα ότι μετατρέποντας το σύστημα σε τριγωνικό, μπορούμε να το λύσουμε εύκολα με «ανάδρομη αντικατάσταση»:

$Ux=c$:

$2x_1+1x_2+1x_3=5$.

$-8x_2-2x_3=-12$.

$x_3=2$.

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην προτελευταία παίρνουμε:

$-8x_2-4=-12 \Leftrightarrow x_2=1$.

Αντικαθιστώντας στην πρώτη:

$2x_1+1+2=5 \Leftrightarrow x_1=1$.

Συμπέρασμα: Αν για κάποιο $n\times n$ πίνακα A κατά την εφαρμογή του Αλγορίθμου Gauss δε συναντήσω μηδενικό και βρω, λοιπόν, ένα **πλήρες σύστημα οδηγών** (δηλαδή n οδηγούς $\neq 0$), τότε το σύστημα $Ax=b$ θα έχει **ακριβώς μία λύση** για **οποιοδήποτε b**. **Ονομάζω αυτή την περίπτωση μη – ιδιόμορφη.**

4.2 Η διάσπαση $A=L\cdot U$

Στο 1ο βήμα του Gauss μετατρέψαμε με γραμμοπράξεις τον A σε A'. Οι γραμμοπράξεις αυτές μπορούν να εκφραστούν με πολλαπλασιασμούς του A με στοιχειώδεις πίνακες από αριστερά:

$$A'=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}}_{\gamma_3'=\gamma_3+\gamma_1}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{\gamma_2'=\gamma_2-2\gamma_1}A.$$

Στο 2ο βήμα πήραμε από τον A' τον U πάλι με γραμμοπράξεις:

$$U=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}}_{\gamma_3''=\gamma_3'+\gamma_2'}A'.$$

Συνολικά λοιπόν παίρνουμε:

$$U=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{L'=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}}\cdot A$$

Στο γινόμενο L' οι συντελεστές **«χάνονται» γενικώς**. (Εδώ είναι σύμπτωση ότι κάποιοι διατηρήθηκαν).

Για να αντιστρέψω ένα μετασχηματισμό $a^i\to a^i+\lambda a^j$ αρκεί να τον «ξανακάνω» με **αντίθετο πρόσημο του λ:** $a^i+\lambda a^j-\lambda a^j\to a^i$.

Αν ακυρώσω τον τελευταίο μετασχηματισμό που έκανα παίρνω:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}U=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}A.$$

Αν ακυρώσω έναν – έναν και τους υπόλοιπους:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}U = A.$$

Οι στοιχειώδεις πίνακες εμφανίζονται με **ανάποδη σειρά** και περιέχουν τα **αντίθετα των συντελεστών** του αλγορίθμου Gauss.

Αν σχηματίσω τώρα το γινόμενο $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ θα δω ότι τα **αντίθετα των συντελεστών** διατηρούνται στον L και βρίσκονται **στην ίδια θέση με το στοιχείο που «μηδένισαν»** στον A (για να προκύψει ο U).

Αυτό δεν είναι σύμπτωση: αποδεικνύεται ότι ισχύει γενικά. Επομένως:

Αν για κάποιο $n \times n$ πίνακα A κατά τον Αλγόριθμο Gauss δε συναντήσω μηδενικά, αν έχω δηλαδή πλήρες σύστημα οδηγών, τότε θα υπάρχουν:

- Κάτω τριγωνικός πίνακας L $n \times n$ με «1» στη διαγώνιο και τα αντίθετα των συντελεστών κάτω από τη διαγώνιο.
- Άνω τριγωνικός U $n \times n$ με τους οδηγούς στη διαγώνιο, τέτοιοι ώστε $A = L \cdot U$.

4.3 Κατασκευή του L

Τον φτιάχνω παράλληλα με τον αλγόριθμο Gauss θέτοντας το αντίθετο του συντελεστή που χρησιμοποιώ για να μηδενίσω ένα στοιχείο του A στην αντίστοιχη θέση του L .

Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 4 & -2 & -8 \\ 0 & 4 & -4 & -10 \end{bmatrix} \text{από αυτόν τον μετασχηματισμό προκύπτει } \left(L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \text{ενώ από αυτόν τον μετασχηματισμό προκύπτει } \left(L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

4.4 Επίλυση του $Ax=b$ όταν γνωρίζω τη διάσπαση $A=L\cdot U$

Αν αφού έχω κάνει τη διάσπαση $A=LU$ μου δοθεί η δεξιά πλευρά b του συστήματος, δεν αξίζει να «ξανακάνω» αλγόριθμο Gauss.

Λύνω το σύστημα $Ax=b$ στα εξής δύο βήματα:

$$Ax=b \Leftrightarrow \underbrace{LU}_{A}x=b \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{c}=b.$$

1. Βρες c: $Lc=b$.
2. Βρες x: $Ux=c$.

Και τα δύο συστήματα είναι τριγωνικά και λύνονται εύκολα.

π.χ. Να λυθεί το $Ax=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

1. Βρες c: $Lc=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$c_1=1$.

$2c_1+c_2=0 \Rightarrow c_2=-2$.

$-c_1-c_2+c_3=0 \Rightarrow c_3=0$.

2. Βρες x: $Ux=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

$x_3=0$.

$-8x_2-2x_3=-2 \Rightarrow x_2=\frac{1}{4}$.

$2x_1+x_2+x_3=1 \Rightarrow x_1=\frac{3}{8}$.

4.5 Αν εμφανιστεί μηδενικό

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις, η «θεραπεύσιμη» και η «μη – θεραπεύσιμη».

<u>Θεραπεύσιμη</u> π.χ. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Μπορώ με εναλλαγή γραμμών να φέρω στην θέση που μ' ενδιαφέρει μη μηδενικό στοιχείο και να το κάνω οδηγό.

Αν μπορώ κατ' αυτό τον τρόπο να έχω ένα πλήρες σύστημα οδηγών (n οδηγούς $\neq 0$) βρίσκομαι στην **μη – ιδιόμορφη** περίπτωση **υπάρχει ακριβώς μία λύση για οποιαδήποτε δεξιά πλευρά**.

Σημείωση: Αν γνώριζα από πριν τις αναγκαίες εναλλαγές γραμμών θα μπορούσα να τις είχα κάνει εξ αρχής και να κάνω μετά τον αλγόριθμο Gauss χωρίς να συναντήσω 0. Συνεπώς, **υπάρχει πίνακας μεταθέσεων** P **τέτοιος που** $PA = LU$.

Μη – θεραπεύσιμη: Όταν όλη η στήλη δεξιά κάτω από τον προηγούμενο οδηγό είναι γεμάτη 0. Άρα δεν μπορώ με εναλλαγή γραμμών να φέρω μη – μηδενικό στοιχείο στη θέση του οδηγού.

π.χ. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Τότε βρίσκομαι στην **ιδιόμορφη** περίπτωση όπου: **Καμία αναδιάταξη γραμμών δεν παράγει πλήρες σύστημα οδηγών**.

Στην ιδιόμορφη περίπτωση το αν θα υπάρχουν λύσεις και πόσες εξαρτάται από τη δεξιά πλευρά.

Αν η μετασχηματισμένη δεξιά πλευρά στο παραπάνω παράδειγμα ήταν $\begin{pmatrix} \kappa\acute{\alpha}\tau\iota \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ οι δύο τελευταίες εξισώσεις θα ήταν συμβατές ($x_3 = 2$) αλλά θα είχα άπειρες λύσεις γιατί το x_2 είναι ελεύθερο.

Αν η δεξιά πλευρά ήταν $\begin{pmatrix} \kappa\acute{\alpha}\tau\iota \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ οι δύο τελευταίες εξισώσεις θα ήταν μη συμβατές και δεν θα είχα καμία λύση.

Στην ιδιόμορφη περίπτωση έχω καμία ή άπειρες λύσεις.

5. Αντίστροφοι και Ανάστροφοι Πίνακες

5.1 Αντίστροφοι πίνακες

Έστω ο στοιχειώδης $n \times n$ πίνακας $E_{ij}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Γνωρίζουμε ότι $E_{ij}(\lambda) \cdot x$ προσθέτει την λ-πλάσια της j-συντεταγμένης στην i-συντεταγμένη του x:

$$E_{ij}(\lambda) \cdot x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ x_i + \lambda x_j \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα με $E_{ij}(-\lambda)$ ακυρώνουμε ξανά τον μετασχηματισμό που διενήργησε η $E_{ij}(\lambda)$ και γυρνάμε στο αρχικό x. Δηλαδή:

$$E_{ij}(-\lambda) \cdot \left(E_{ij}(\lambda) \cdot x \right) = x.$$

Αυτή είναι και η ιδιότητα μέσω της οποίας θα ορίσουμε τον αντίστροφο, A^{-1}, ενός πίνακα A. Εάν υπάρχει αντίστροφος αυτός θα έχει την ιδιότητα ότι:

$A^{-1} \cdot (A \cdot x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ και επομένως $A^{-1} \cdot A = I$.

Σημείωση: Αντίστροφος δεν υπάρχει για κάθε πίνακα A: Έστω ένας πίνακας A ιδιόμορφος. Τότε θα υπάρχει $x \neq 0$ με $Ax = 0$. Εδώ όμως δεν υπάρχει πίνακας που πολλαπλασιάζει το Ax και ξαναγυρνάμε στο x διότι: $B \cdot (Ax) = B \cdot 0 = 0 \neq x$.

Ορισμός (αντίστροφος πίνακας): Ένας $n \times n$ πίνακας A λέγεται αντιστρέψιμος εάν υπάρχει πίνακας B τέτοιος που $A \cdot B = I$ (B δεξιός αντίστροφος) και $B \cdot A = I$ (B αριστερός αντίστροφος).

Παράδειγμα:

- $(a)^{-1} = \left(\dfrac{1}{a} \right)$.
- $E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$.

- $$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

Σημείωση:

1. Από τον ορισμό προκύπτει ότι $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Αν ο A έχει δεξιό αντίστροφο C και αριστερό B τότε πρέπει να ταυτίζονται και ο A είναι αντιστρέψιμος.

Διότι: $B = B \cdot I = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = I \cdot C = C$.

Κανόνας: Αν A, B αντιστρέψιμοι (**υποθέτω** ότι υπάρχουν A^{-1}, B^{-1}) τότε και $A \cdot B$ αντιστρέψιμος και $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Απόδειξη:

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (AB) = I \Leftrightarrow B^{-1} \cdot \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I} \cdot B = I \Leftrightarrow B^{-1} \cdot B = I.$$

Αν εργαστούμε αντιστοίχως αποδεικνύουμε ότι $AB \cdot (B^{1} \cdot A^{-1}) = I$.

Γενικότερα: $(A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$ αν A, B, C αντιστρέψιμοι.

5.2 Μέθοδος υπολογισμού του αντιστρόφου (Αλγόριθμος Gauss – Jordan)

Έστω A έχει n οδηγούς. Θα δείξουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τον A^{-1} σε αυτή την περίπτωση.

Ας συμβολίσουμε την i-στήλη του A^{-1} με x_i (άγνωστη) δηλαδή:

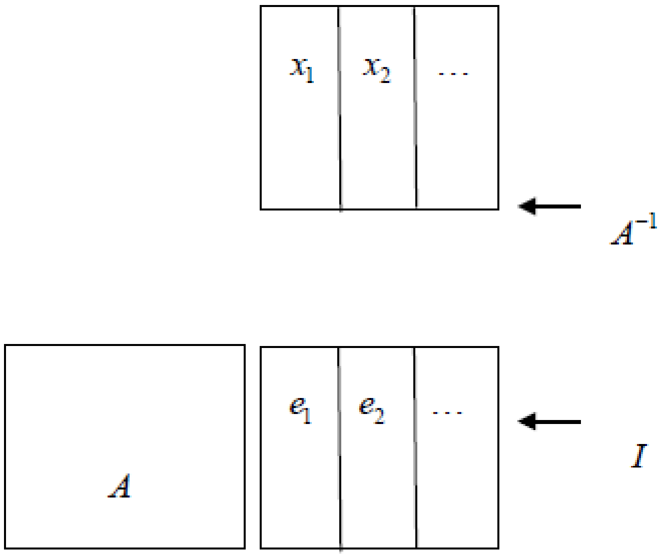
$A^{-1} = \left(x_1 \mid x_2 \mid \cdots \mid x_n \right)$, $x_i \in \mathbb{R}^n$ (διάνυσμα, όχι αριθμός!)

Ας συμβολίσουμε επιπλέον με $e_i = i - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Δηλαδή $I = \left(e_1 \mid e_2 \mid \cdots \mid e_n \right)$.

Η εξίσωση που ορίζει τον A^{-1} είναι η $A \cdot A^{-1} = I$ ή ισοδύναμα:

$Ax_i = e_i, i = 1, \dots, n$.

Δηλαδή:



Σχήμα 7. Ο πίνακας A και τα διανύσματα x_i και e_i.

Άρα έχω n γραμμικά συστήματα. Από το πρώτο μπορώ να βρω το x_1, από το δεύτερο το x_2, κ.ο.κ..

Πώς; Αντί να κάνω Gauss για κάθε σύστημα ξεχωριστά, κολλάω όλες τις δεξιές πλευρές δεξιά από τον A και κάνω Gauss σε όλες μαζί:

$$[A \,|\, e_1 \,|\, e_2 \,|\, \ldots e_n] = [A \,|\, I] \to [U \,|\, L'].$$

π.χ. Βρες τον αντίστροφο του $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{U} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{L'} \end{array}\right].$$

Εδώ θα μπορούσα να πάρω τα συστήματα $Ux_i = l_i'$ (όπου l_i' η i-στήλη του L') και να λύσω το καθένα από αυτά με ανάδρομη αντικατάσταση.

Ωστόσο, τώρα που έχω πολλές δεξιές πλευρές για τον ίδιο U συμφέρει να κάνω κάτι άλλο.

Να συνεχίσω τους μετασχηματισμούς γραμμών μέχρι αριστερά να εμφανιστεί ο ταυτοτικός (με ανάποδη απαλοιφή Gauss όπως θα δούμε παρακάτω).

$$[U \,|\, L'] \to [I \,|\, K].$$

Τότε τα συστήματα διαβάζονται $I \cdot x_i = k_i$ και επομένως η i-στήλη του K είναι η i-στήλη του A^{-1}, δηλαδή $K = A^{-1}$. Τελείωσα!

Βήμα 1°: Προσθέτω πολλαπλάσια της **τελευταίας γραμμής** στις προηγούμενες έτσι ώστε να μηδενιστούν τα στοιχεία πάνω από τον **τελευταίο οδηγό**.

Βήμα 2°: Προσθέτω πολλαπλάσια της **προτελευταίας γραμμής** στις προηγούμενες έτσι ώστε να μηδενιστούν τα στοιχεία πάνω από τον **προτελευταίο οδηγό**.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι **να φθάσω αριστερά σε διαγώνιο πίνακα**.

Τέλος: Διαιρώ κάθε γραμμή με στοιχείο της διαγωνίου του αριστερού πίνακα, οπότε αριστερά παίρνω τον ταυτοτικό.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 12/8 & -5/8 & -6/8 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 12/16 & -5/16 & -6/16 \\ 4/8 & -3/8 & -2/8 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right].$$

Σημείωση: Δείξαμε ότι αν A μη – ιδιόμορφος $\Rightarrow$ υπάρχει δεξιός αντίστροφος.

Όμως η κατασκευή εξασφαλίζει ότι θα υπάρχει και αριστερός και άρα ο A είναι αντιστρέψιμος και ο A^{-1} αυτός που φτιάξαμε.

Μπορεί κανείς να δείξει και το ανάποδο.

Αν A αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ μη – ιδιόμορφος και άρα:

Αντιστρέψιμοι πίνακες είναι ακριβώς οι μη – ιδιόμορφοι.

5.3 Ανάστροφοι πίνακες

Αν A ένας $m \times n$ πίνακας, τότε ως A^T ορίζεται ο $n \times m$ πίνακας που προκύπτει αν στον A εναλλάξω γραμμές και στήλες.

Η πρώτη γραμμή του A γίνεται πρώτη στήλη του A^T κ.ο.κ..

Δηλαδή $\left[A^T\right]_{ij} = A_{ji}$.

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Επίσης, ο A^T προκύπτει αν στον A καθρεφτίσω τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο ($a_{11}, a_{22}, \ldots$).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Σχήμα 8. Κατασκευή ανάστροφου πίνακα (A^T) με εναλλαγή γραμμών και στηλών.

Ισχύουν οι εξής **κανόνες**:

- $(A^T)^T = A$ (προφανές).
- $(A+B)^T = A^T + B^T$ (εύκολο...).
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (θέλει λίγη δουλίτσα, αλλά μόνο ορισμοί...).
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Απόδειξη του τελευταίου:

Έχουμε $A^{-1} \cdot A = I = A \cdot A^{-1}$, παίρνουμε ανάστροφα $(A^{-1} \cdot A)^T = I = (A \cdot A^{-1})^T$ και από τον κανόνα $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$: $A^T \cdot (A^{-1})^T = I = (A^{-1})^T \cdot A^T$.

Αυτός είναι ορισμός του αντιστρόφου του A^T, ένας πίνακας B με $A^T \cdot B = I = B \cdot A^T$.

Άρα ο $(A^{-1})^T$ είναι ο B δηλαδή ο $(A^T)^{-1}$.

Ορισμός: Ένας $n \times n$ πίνακας A λέγεται **συμμετρικός**. $\Leftrightarrow$ $A^T = A$, δηλαδή τα συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο στοιχεία ταυτίζονται.

Πρόταση: Αν A συμμετρικός και αντιστρέψιμος τότε A^{-1} συμμετρικός.

Απόδειξη: Δείξτε $(A^{-1})^T = A^{-1}$.

Αλλά έχουμε $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ και αφού A συμμετρικός (άρα $A^T = A$) το τελευταίο είναι ίσο με A^{-1}.

Προσοχή: Αν A, B συμμετρικοί μπορεί ο $A \cdot B$ να **μην** είναι συμμετρικός, καθώς $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T = B \cdot A$ και όχι $A \cdot B$.

π.χ. $\begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 0 \end{bmatrix}$ συμμετρικός.

Συμμετρικός $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & b \\ a & \end{bmatrix}$ όχι συμμετρικός.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης