Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα

Ενότητα: Ολοκληρωτικός Λογισμός (μέρος 2)

Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής

1. Σκοποί ενότητας 4
2. Περιεχόμενα ενότητας..4
3. Ορισμένο Ολοκλήρωμα 5
4. Εφαρμογές του Ορισμένου Ολοκληρώματος 9
4.1 Συνολικά και Οριακά Μεγέθη 9
4.2 Υπολογισμός πλεονάσματος του καταναλωτή και του παραγωγού..................................10
4.3 Μέση τιμή μιας συνάρτησης..11
4.4 Εκθετικός Νόμος..11
5. Γενικευμένα Ολοκληρώματα 15
5.1 Γενικευμένα Ολοκληρώματα 1ου είδους (σε μη φραγμένα διαστήματα)............................15
5.2 Γενικευμένα Ολοκληρώματα 2ου είδους (μη φραγμένων συναρτήσεων)...........................16
6. Πολλαπλά Ολοκληρώματα...18
6.1 Ολοκληρώματα σε Ορθογώνιες Περιοχές $R=[a,b]\times[c,d]$ 18
6.2 Ολοκληρώματα σε Φραγμένες Μη Ορθογώνιες Περιοχές 19
6.2.1 Η περιοχή είναι απλή τουλάχιστον σε έναν από τους δύο άξονες 19
6.2.2 Η περιοχή που μπορεί να χωρισθεί σε κατάλληλα πεπερασμένου πλήθους κανονικά χωρία 20

1. Σκοποί ενότητας

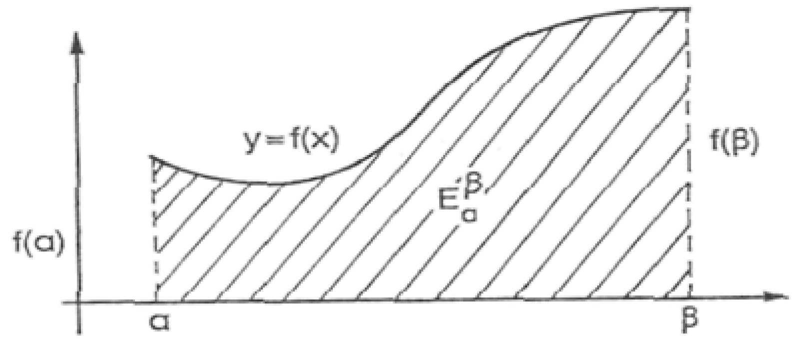
Παρουσιάζονται θέματα Ολοκληρωτικού Λογισμού (μέρος 2) που είναι απαραίτητα για τον χρηματοοικονομικό και λογιστικό αναλυτή.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Ορισμένο Ολοκλήρωμα, Εφαρμογές του Ορισμένου Ολοκληρώματος, Συνολικά και Οριακά Μεγέθη, Υπολογισμός πλεονάσματος του καταναλωτή και του παραγωγού, Μέση τιμή μιας συνάρτησης, Εκθετικός Νόμος, Γενικευμένα Ολοκληρώματα, Γενικευμένα Ολοκληρώματα 1ου είδους (σε μη φραγμένα διαστήματα), Γενικευμένα Ολοκληρώματα 2ου είδους (μη φραγμένων συναρτήσεων), Πολλαπλά Ολοκληρώματα, Ολοκληρώματα σε Ορθογώνιες Περιοχές $R=[a,b]\times[c,d]$, Ολοκληρώματα σε Φραγμένες Μη Ορθογώνιες Περιοχές, Η περιοχή είναι απλή τουλάχιστον σε έναν από τους δύο άξονες, Η περιοχή που μπορεί να χωρισθεί σε κατάλληλα πεπερασμένου πλήθους κανονικά χωρία.

3. Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Έστω $f(x)$ μια συνεχής ορισμένη στο $\Delta = [a, \beta]$. Σε ένα σύστημα καρτεσιανών αξόνων, η καμπύλη C_f, οι ευθείες x = α, και x = β και ο άξονας xx΄ σχηματίζουν επίπεδο τόπο Τ. Συμβολίζουμε το εμβαδόν του τόπου Τ με E_α^β. Ο υπολογισμός του E_α^β θα γίνει προσεγγίζοντάς το με κλιμακωτό πολύγωνο εσωτερικά και εξωτερικά του Τ.



Σχήμα 1. Απεικόνιση του E_α^β.

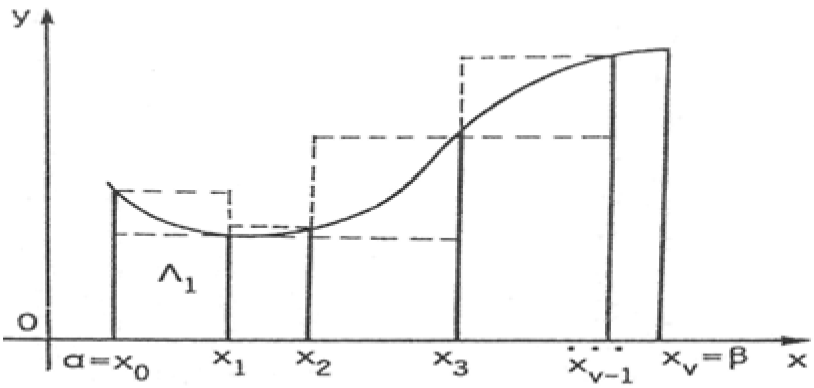
Η κατασκευή αυτών των πολυγώνων γίνεται ως εξής:

Διαλέγουμε ν-1 τυχαίους αριθμούς έτσι ώστε:

$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta$.

Η διαδικασία αυτή καλείται **διαμέριση δ** του διαστήματος Δ σε υποδιαστήματα $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_\nu$ με μήκος του κάθε $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ το $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, i = 1, 2, …, ν.

Καλούμε **λεπτότητα διαμέρισης** δ και συμβολίζουμε με $\lambda(\delta)$ το μέγιστο από τα Δx_i.



Σχήμα 2. Απεικόνιση διαμερίσεων.

Σχηματίζουμε τα αθροίσματα:

$$s_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} f(x_{i-1})\Delta x_i \quad \text{και} \quad S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} f(x_i)\Delta x_i$$

Καλούμε δε το s_ν **κάτω άθροισμα** και το S_ν **άνω άθροισμα** της $f\left(x\right)$ σε σχέση με τη διαμέριση δ και ισχύει: $s_\nu < E_\alpha^\beta < S_\nu$.

Έστω ξ_i μια τυχαία τιμή του x στο υποδιάστημα Δ_i, δηλαδή $f(x_{i-1}) \le f(\xi_i) \le f(x_i)$, i = 1, 2, …, ν και επομένως:

$$s_\nu < \sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\Delta x_i < S_\nu \text{. (1)}$$

Το άθροισμα $E = \sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\Delta x_i$ καλείται **άθροισμα Riemann.**

Υποθέτουμε ότι η λεπτότητα του διαμερισμού $\lambda\left(\delta\right) \to 0$ και επομένως το πλήθος των υποδιαστημάτων ν αυξάνει απεριόριστα, δηλαδή $\nu \to \infty$. Τα κάτω αθροίσματα σχηματίζουν μια αύξουσα και τα άνω αθροίσματα μια φθίνουσα ακολουθία. Και οι δύο ακολουθίες είναι φραγμένες και συγκλίνουν. Εάν το όριο σύγκλισης είναι το ίδιο, I, τότε αυτό καλείται **ορισμένο ολοκλήρωμα**:

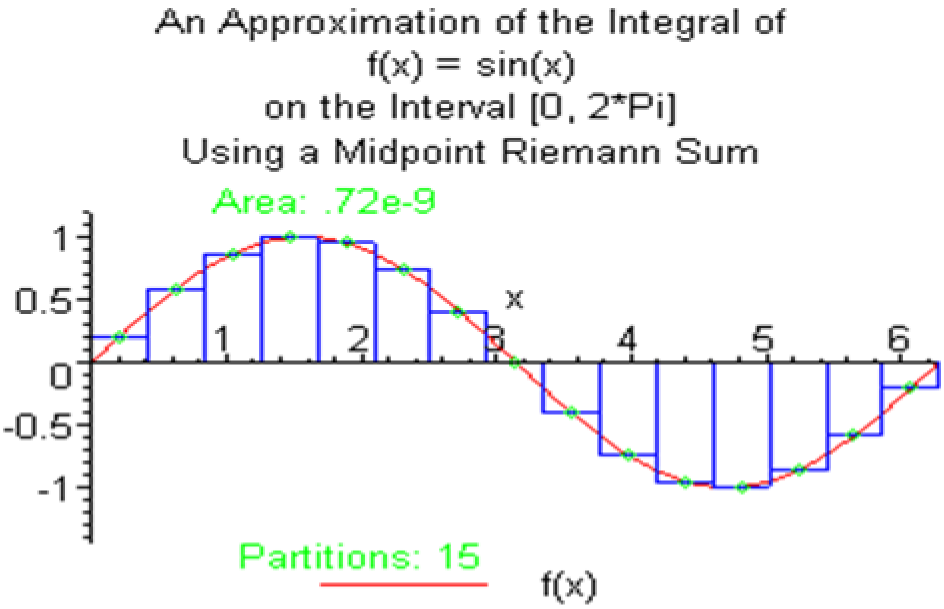
$$I = \lim_{\nu\to\infty} s_\nu = \lim_{\nu\to\infty} S_\nu = \int_\alpha^\beta f(x)dx \text{. (2)}$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν θεωρήσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα Δx_i και ύψη τα $f\left(\xi_i\right)$ και λόγω των (1), (2) ισχύει:

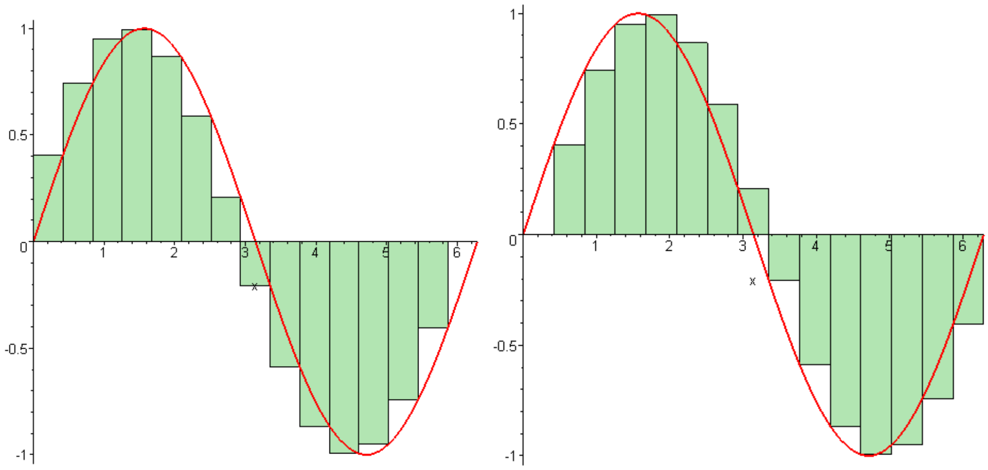
$$\lim_{\nu\to\infty} E = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Ορισμός: Μια συνάρτηση f καλείται **ολοκληρώσιμη** στο a, β όταν το $\lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\Delta x_i = I$ υπάρχει και για κάθε διαμέριση του a, β και τυχαία επιλογή των θέσεων ξ_i έχει την ίδια οριακή τιμή.
Τα a, β λέγονται **κάτω** και **άνω όριο του ολοκληρώματος**, το δε $\left[a, \beta\right]$ **διάστημα ολοκλήρωσης.**

Εάν η $f\left(x\right)$ είναι ολοκληρώσιμη στο a, β τότε ορίζουμε τον αριθμό $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ σαν το εμβαδό E_α^β.



Σχήμα 3. Μία προσέγγιση του ολοκληρώματος της συνάρτησης sin(x).



Σχήμα 4. Δύο εναλλακτικές προσεγγίσεις του ολοκληρώματος της συνάρτησης sin(x).

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος:

1. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
3. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.
5. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.

Θεώρημα: Αν $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Θεώρημα: Αν $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Θεώρημα (θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού (Newton-Leibniz)):
Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και F μια οποιαδήποτε παράγουσα της f στο $[a,b]$ τότε:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

Παραδείγματα:

1. $\int_4^{-1} \mathrm{xdx} = \left[\frac{\mathrm{x}^2}{2}\right]_4^{-1} = \frac{1}{2} - 8 = -\frac{15}{2}$.
2. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sigma\upsilon\nu x dx = [\eta\mu x]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \eta\mu\frac{3\pi}{4} - \eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.
3. $\int_3^5 \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{x+1}{x-1}\right]_3^5 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2} - \ln 2\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}$.

4. Εφαρμογές του Ορισμένου Ολοκληρώματος

4.1 Συνολικά και Οριακά Μεγέθη

Αν $g(x)=\frac{dy}{dx}$ είναι η οριακή συνάρτηση, τότε η συνολική συνάρτηση είναι $y=\int f(x)dx$.

Παράδειγμα: (Υπολογισμός συνάρτησης ζήτησης).
Το οριακό κόστος μιας βιομηχανίας δίνεται από την σχέση $MC(q)=10q+200$ όπου q η παραγόμενη ποσότητα και το σταθερό κόστος είναι 100 χρηματικές μονάδες. Να βρεθεί η συνάρτηση του κόστους.

- **Οριακό κόστος** (Marginal Cost- MC): $MC(q)=\frac{dTC(q)}{dq}$.

- **Οριακό έσοδο** (Marginal Revenue- MR): $MR(q)=\frac{dTR(q)}{dq}$.

Λύση:
$TC(q)=\int MC(q)dq=\int\left(10q+200\right)dq=5q^2+200q+c$. Όπου c σταθερά και $TC(0)=c=100$.
Άρα, $TC(q)=5q^2+200q+100$.

Παράδειγμα: (Υπολογισμός συνάρτησης ζήτησης).
Το οριακό έσοδο $MR(q)=1400-20q$,όπου q η παραγόμενη ποσότητα. Να βρεθεί η συνάρτηση ζήτησης της βιομηχανίας.

Λύση:
$TR(q)=\int MR(q)dq=\int\left(1400-20q\right)dq=1400q-10q^2+c$.
Έχουμε $TR(0)=c=0$.
Άρα $TR(q)=1400q-10q^2$.

Αν p είναι η τιμή πώλησης τότε $TR(q)=p\cdot q \Leftrightarrow p=\frac{TR(q)}{q}=\frac{1400q-10q^2}{q}\Leftrightarrow p=1400-10q$ είναι η συνάρτηση ζήτησης.

Παράδειγμα: (Υπολογισμός συνολικού κόστους).
Το οριακό έσοδο $MR(q)=25-5q-2q^2$ και το οριακό κόστος $MC(q)=15-2q-q^2$,όπου q η παραγόμενη ποσότητα. Να βρεθεί το μέγιστο συνολικό κέρδος.

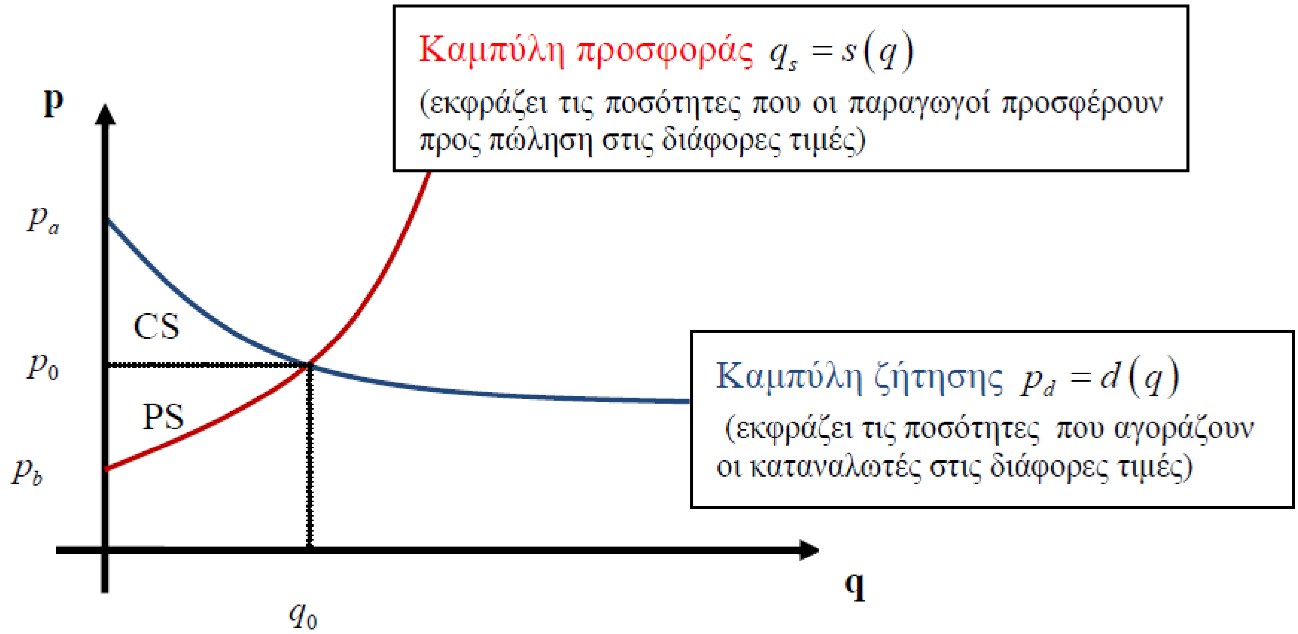
$$\frac{d}{dq}\pi(q)=0\Leftrightarrow\frac{d}{dq}TR(q)-\frac{d}{dq}C(q)=0\Leftrightarrow\frac{d}{dq}TR(q)=\frac{d}{dq}C(q)\Leftrightarrow MR\left(q^*\right)=MC\left(q^*\right).$$

Λύση:

Το κέρδος είναι μέγιστο στο σημείο όπου $MC(q)=MR(q)\Leftrightarrow q=-5$ (απορρίπτεται) ή $q=2$.

Το συνολικό κέρδος είναι $\pi=\int_0^2\left(MR(q)-MC(q)\right)dq=...=\frac{34}{3}$.

4.2 Υπολογισμός πλεονάσματος του καταναλωτή και του παραγωγού



Σχήμα 5. Γραφική απεικόνιση των καμπυλών προσφοράς και ζήτησης.

Το **πλεόνασμα του καταναλωτή** (Consumers surplus) είναι το εμβαδόν της περιοχής CS, έτσι:

$$CS = \int_0^{q_a} d(q)\,dq - p_0 q_0$$

Το **πλεόνασμα του παραγωγού** (Producer surplus) είναι το εμβαδόν της περιοχής PS, έτσι:

$$PS = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} s(q)\,dq$$

Παράδειγμα: Αν η συνάρτηση ζήτησης είναι $p = 36 - 2q - q^2$. Να υπολογιστεί το πλεόνασμα του καταναλωτή αν αγοράσει ποσότητα $q_0 = 4$.

Λύση:

$$CS = \int_0^{q_a} d(q)\,dq - p_0 q_0 = \int_0^4 \left(36 - 2q - q^2\right)dq - \left(36 - 2\cdot 4 - 4^2\right)\cdot 4$$

$$\left[36q - q^2 - \frac{q^3}{3}\right]_0^4 - \left(36 - 2\cdot 4 - 4^2\right)\cdot 4 = 36\cdot 4 - 4^2 - \frac{4^3}{3} - \left(36 - 2\cdot 4 - 4^3\right)\cdot 4 = 58.6\,.$$

Παράδειγμα: Αν η συνάρτηση προσφοράς είναι $p = (q+2)^2$ να υπολογιστεί το πλεόνασμα του παράγωγού όταν η τιμή είναι $p_0 = 25$

Λύση:

$$p = (q+2)^2 \Rightarrow 25 = (q+2)^2 \Rightarrow q = 3$$

$$PS = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} s(q)\,dq = (3+2)^2 3 - \int_0^3 (q+2)^2\,dq = (3+2)^2 3 - \left[\frac{(q+2)^3}{3}\right]_0^3 = 36\,.$$

4.3 Μέση τιμή μιας συνάρτησης

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]$, τότε η μέση τιμή των τιμών της συνάρτησης $x_1,x_2,...,x_n$

είναι: $\overline{y}=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}f(x_i)}{n}$.

Η μέση τιμή της f θα είναι: $\overline{y}=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x)=\sqrt[3]{x}$ στο $[0,1]$.

4.4 Εκθετικός Νόμος

Έστω το μέγεθος y που αυξάνεται με ρυθμό ανάλογο με το y, τότε: $\dfrac{dy}{dx}=ky$.

Άρα $\dfrac{1}{y}dy=kdx$ ολοκληρώνοντας έχουμε $\int\dfrac{1}{y}dy=\int kdx\Leftrightarrow \ln y(t)=k[x]_0^t=...=\ln\dfrac{y(t)}{y(0)}$.

Αν $y(0)=1$, τότε $y(t)=e^{kt}$.

Πίνακας 1. Συμβολισμός.

Συμβολισμός	Μέγεθος
d	Ζητούμενη ποσότητα
s	Προσφερόμενη ποσότητα
Q	Συνάρτηση ζήτησης (Είναι μια συνάρτηση του Q και του P)
Q_d Q_s	Συναρτήσεις ζήτησης, προσφοράς

Πίνακας 2. Έσοδα.

Συμβολισμός	Μέγεθος	Τύπος
MR	Οριακά έσοδα	$MR(Q) = \frac{d}{dQ}TR(Q)$ (ευρώ/τεμάχιο)
TR	Συνολικά έσοδα	$TR\left(Q\right) = \int MRdQ + FR$ $TR\left(Q\right) = P(Q) \cdot Q$
AR	Μέσα έσοδα	$AR(Q) = \frac{TR(Q)}{Q}$

Πίνακας 3. Κόστη (έξοδα).

Συμβολισμός	Μέγεθος	Τύπος
MC	Οριακά κόστη	$MC(Q) = \frac{d}{dQ}TC(Q)$ (ευρώ/τεμάχιο)
TC	Συνολικό κόστος	• $TC\left(Q\right) = \int MCdQ + FC$ • $TC\left(Q\right) = P(Q) \cdot Q$ • Αν είναι γραμμικό τότε: $\begin{cases} TC(Q) = k \cdot Q + l \\ TC(0) = FC \\ TC(\tau\iota\mu\acute{\eta}) = \sigma\upsilon\nu o\lambda\iota\kappa\acute{o} \end{cases}$
AC	Μέσο κόστος	$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q}$
FC	Πάγια έξοδα	
VC	Λειτουργικό κόστος	

Πίνακας 4. Κέρδος.

Συμβολισμός	Μέγεθος	Τύπος
ΜΠ	Οριακά κέρδη	$\mathrm{M}\Pi = \frac{d}{dQ}\Pi(Q)$ (ευρώ/τεμάχιο)
ΤΠ	Συνολικό κέρδος	Π=TR-TC
ΑΠ	Μέσο κέρδος	$A\Pi(Q) = \frac{\Pi}{Q}$
Π	Κέρδη	$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$

Πίνακας 5. Ελαστικότητα.

Συμβολισμός	Μέγεθος	Τύπος
E_{QP}	Ελαστικότητα	• $E_{QP} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$, P τιμή Q ποσότητα. • Ελαστικότητα Ζήτησης $Q = Q_d(P)$. • Ελαστικότητα Προσφοράς $Q = Q_s(P)$. • Οικονομική ερμηνεία μια αύξηση της τιμής κατά 10% οδηγεί σε μείωση ή αύξηση της ζητούμενης (προσφερόμενης) ποσότητας κατά $E_{PQ} \cdot 10\%$

Πίνακας 6. Σημείο Ισορροπίας.

Μέγεθος	Τύπος
Σημείο Ισορροπίας	$Q_d(P) = Q_s(P)$

- Για να πάμε από τα οριακά (Μ) στα συνολικά (Τ) ολοκληρώνουμε.
- Για να πάμε από τα συνολικά (Τ) στα οριακά (Μ) παραγωγίζουμε.

Παράδειγμα 1:

Το οριακό κόστος σε μια παραγωγή είναι $3q^2 - 60q + 400$ ανά μονάδα προϊόντος. Το συνολικό κόστος παραγωγής των πρώτων 2 μονάδων είναι 400 χρηματικές μονάδες. Ποιο είναι το συνολικό κόστος παραγωγής των πρώτων 5 μονάδων;

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι $C'(q) = 3q^2 - 60q + 400$, άρα $C(q) = \int C'(q)dq =$
$\int (3q^2 - 60q + 400)dq = q^3 - 30q^2 + 400q + k$. Γνωρίζουμε ότι $C(2) = 900$, άρα
$900 = 2^3 - 30 \cdot 2^2 + 400 \cdot 2 + k$ οπότε k=212. Τότε η συνάρτηση κόστους είναι
$C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 21$ και το κόστος παραγωγής των πρώτων 5 μονάδων είναι
$C(5) = 5^3 - 30 \cdot 5 + 400 \cdot 5 + 212 = 1587$ χρηματικές μονάδες.

Παράδειγμα 2:

Το οριακό έσοδο είναι $2{,}4e^{0{,}8Q}$ και το σταθερό είναι –0,4 (ζημία πριν αρχίσει την πώληση). Να βρεθεί η συνάρτηση εσόδων.

Λύση

$$R = \int \frac{dR}{dQ} dQ = \int 2{,}4e^{0.8Q} dQ = 2{,}4 \frac{1}{0.8} \int e^{0.8Q} d(0.8Q) = 3e^{0.8Q} + C \Rightarrow 3 \cdot e^{0.8Q} + C = -0{,}4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C = -3{,}4 \Rightarrow R = 3e^{0.8Q} - 3.4.$$

Παράδειγμα 3:

Ένα εργοστάσιο υπολογίζει ότι q (σε χιλιάδες) μονάδες θα αγοραστούν από χοντρέμπορους όταν η τιμή του αγαθού είναι $p = D(q) = -0.19^2 + 90$ χρ. μον. ανά προϊόν και ότι ο ίδιος αριθμός θα προσφερθεί στην αγορά όταν η τιμή είναι $p = S(q) = 0.2q^2 + q + 50$ χρηματικές μονάδες ανά προϊόν.

1. α) Να βρεθεί η τιμή ισορροπίας (προσφορά ίση με ζήτηση) και η ποσότητα προσφοράς και ζήτησης σε αυτή την τιμή.
2. β) Να προσδιοριστεί το πλεόνασμα παραγωγού και καταναλωτή στην τιμή ισορροπίας.

Λύση:

1. Η προσφορά ισούται με τη ζήτηση όταν:
   $-0.1q^2 + 90 = 0.2q^2 + q + 50 \Rightarrow 0.3q^2 + q - 40 = 0 \Rightarrow q = 10$.

   $P = -0.1(10)^2 + 90 = 80$ χρ. μον. ανά προϊόν σε ζήτηση 10000 μονάδων.

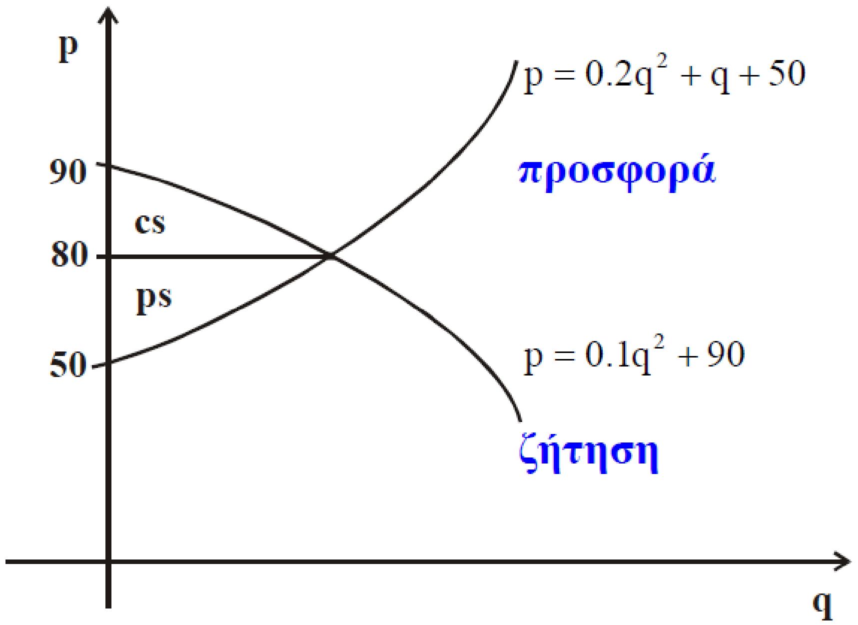
2. P_0 = 80 και q_0 = 10, το πλεόνασμα καταναλωτή είναι:

   $$CS = \int_0^{10} (-0.1q^2 + 90)dq - 80 \cdot 10 = \left(-0.1\frac{q^3}{3} + 90 \cdot q \right)\Bigg|_0^{10} - 80 \cdot 10 = 866.67 - 800 = 66.67\,.$$

   Το πλεόνασμα του παραγωγού είναι:

   $$PS = 80 \cdot 10 - \int_0^{10} (0.2q^2 + q + 50)dq = 80 \cdot 10 - -\left(0.2\frac{q^3}{3} + \frac{q^2}{2} + 509 \right)\Bigg|_0^{10} = 800 - 556.67 = 243.33$$

   χρηματικές μονάδες.



Σχήμα 6. Γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων προσφοράς και ζήτησης.

5. Γενικευμένα Ολοκληρώματα

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος προϋποθέτει η συνάρτηση να είναι φραγμένη σε ένα φραγμένο διάστημα $\left[a,b\right]$.

Ακόμα υποθέτουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\left[a,b\right]$.

Τα ολοκληρώματα που δεν πληρούν μια από τις δύο αυτές συνθήκες ονομάζονται γενικευμένα ολοκληρώματα (improper integrals) (ολοκληρώματα Cauchy-Riemann).

5.1 Γενικευμένα Ολοκληρώματα 1ου είδους (σε μη φραγμένα διαστήματα)

Έστω $f:\left[a,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα $\left[a,t\right]\subset\left[a,\infty\right]$ για κάθε $t>a$.

Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$ και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f συγκλίνει (υπάρχει) και το συμβολίζουμε $\int_a^\infty f(x)dx$.

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx.$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^k}dx$.

Λύση:

Αν $k\neq 1$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^k}dx=\int\limits_1^\infty x^{-k}dx=\lim\limits_{t\to\infty}\left.\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right|_1^t=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{1-k}\left(\frac{1}{t^{k-1}}-1\right)=\begin{cases}\frac{1}{k-1}, & \text{αν } \kappa>1\\ \infty, & \text{αν } \kappa<1\end{cases}$.

Αν $k=1$, $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx=\lim\limits_{t\to\infty}\int_1^t\frac{1}{x}dx=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\ln x\big|_1^t\right)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\ln x\big|_1^t\right)=\infty$.

Παρατήρηση:

1. Αν $f:\left(-\infty,b\right]\to\mathbb{R}$, τότε: $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$.
2. Αν $f:\left(-\infty,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, τότε: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx+\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$ με $a\in\mathbb{R}$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$.

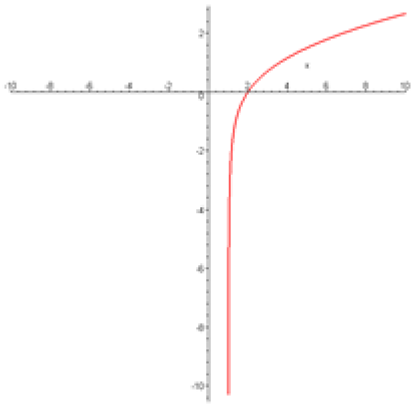
5.2 Γενικευμένα Ολοκληρώματα 2ου είδους (μη φραγμένων συναρτήσεων)

Έστω $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,t]\subset[a,b)$ για κάθε $t>a$.

Τότε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$ και είναι πραγματικός αριθμός τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f συγκλίνει (υπάρχει) και το συμβολίζουμε $\int_a^\infty f(x)dx$.

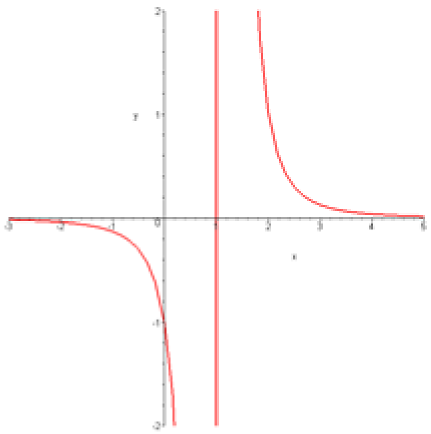
$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx$ (β είδους).



Σχήμα 7. Γραφική απεικόνιση της $\frac{x-2}{\sqrt{x-1}}$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^3}dx$ (β είδους).



Σχήμα 8. Γραφική απεικόνιση της $\frac{1}{(x-1)^3}$.

Ασκήσεις:

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-rx} f(x)dx$ (μετασχηματισμός Laplace).
2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$ (συνάρτηση γάμμα).
3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ (κανονική κατανομή).

6. Πολλαπλά Ολοκληρώματα

Η τεχνική ολοκλήρωσης εξαρτάται από την μορφή του χωρίου ολοκλήρωσης R.

6.1 Ολοκληρώματα σε Ορθογώνιες Περιοχές $R=[a,b]\times[c,d]$

$\iint_R f(x,y)dA$.

Ιδιότητες διπλών ολοκληρωμάτων:

1. $\iint_R k\cdot f(x,y)dA = k\iint_R f(x,y)dA$.
2. $\iint_R \left[f(x,y)\pm g(x,y)\right]dA = \iint_R f(x,y)dA \pm \iint_R g(x,y)dA$.
3. $\iint_R f(x,y)dA \geq 0$ εάν $f(x,y)\geq 0$ πάνω στο R.
4. $\iint_R f(x,y)dA \geq \iint_R g(x,y)dA$ εάν $f(x,y)\geq g(x,y)$ πάνω στο R.
5. $\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} g(x,y)dA$ εάν $R=R_1+R_2$.

Θεώρημα: (1ο Θεώρημα του Fubinni).
Αν η $f(x,y)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση στην ορθογώνια περιοχή $R=[a,b]\times[c,d]$, τότε:
$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b [\int_c^d f(x,y)dy]dx = \int_c^d [\int_a^b f(x,y)dx]dy$.

Τα διπλά ολοκληρώματα σε ορθογώνιες περιοχές μπορούν να υπολογιστούν σαν διαδοχικά ολοκληρώματα.

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_R \frac{y^2}{1+x^2}dA$, όπου $R=[0,1]\times[0,1]$.

$$\iint_R \frac{y^2}{1+x^2}dA = \int_0^1[\int_0^1 \frac{y^2}{1+x^2}dy]dx = \int_0^1[\left.\frac{y^3}{3(1+x^2)}\right|_0^1]dx = \int_0^1[\frac{1}{3(1+x^2 2)}]dx = \frac{1}{3}\arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}.$$

Παράδειγμα:
Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_R 1-6x^2ydA$, όπου $R=[0,2]\times[-1,1]$.

Παράδειγμα
Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_R (x^2+y)dA$, όπου $R=[1,2]\times[1,3]$.

6.2 Ολοκληρώματα σε Φραγμένες Μη Ορθογώνιες Περιοχές

6.2.1 Η περιοχή είναι απλή τουλάχιστον σε έναν από τους δύο άξονες

Αν $R=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b \\ f_1(x)\le y\le f_2(x)\end{matrix}\right\}$,τότε $\iint_R f(x,y)dA=\int_a^b[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy]dx$.

Θεώρημα: (2ο Θεώρημα του Fubinni)
Αν η $f(x,y)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση σε μια περιοχή R:

1. Αν η R ορίζεται $R=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b \\ f_1(x)\le y\le f_2(x)\end{matrix}\right\}$ με f_1, f_2 συνεχής στο $[a,b]$, τότε:
   $\iint_R f(x,y)dA=\int_a^b[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy]dx$.
2. Αν η R ορίζεται $R=\left\{\begin{matrix} c\le y\le d \\ g_1(x)\le x\le g_2(x)\end{matrix}\right\}$ με g_1, g_2 συνεχής στο $[c,d]$, τότε:
   $\iint_R f(x,y)dA=\int_c^d[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dx]dy$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dA$, όπου D είναι το τρίγωνο που ορίζεται από των άξονα $x'x$ την $y=x$ και $x=1$.

Λύση:
$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1, 0\le y\le x\right\}$.

1-Cos[1].

Παράδειγμα : Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_D e^{x+3y}dA$, όπου D είναι η περιοχή που ορίζεται από τις $y=x$ $y=-x+5$, $y=1$, $y=2$.

Λύση:
$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le y\le 2, y\le x\le 5-y\right\}$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_D x^2-xydA$, όπου D είναι η περιοχή που ορίζεται από τις $y=0$ $y+x=1$, $y=x$.

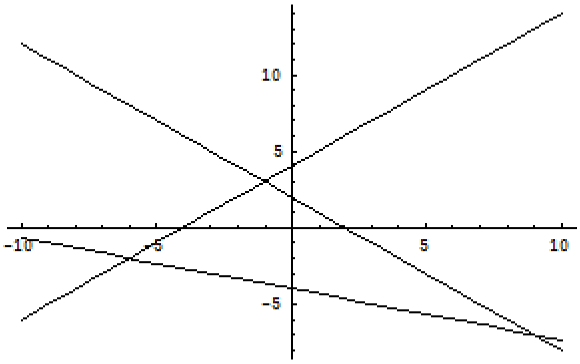
Λύση:
$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le \frac{1}{2}, y\le x\le 1-y\right\}$.

(Απάντηση: $\frac{5}{96}$).

6.2.2 Η περιοχή που μπορεί να χωρισθεί σε κατάλληλα πεπερασμένου πλήθους κανονικά χωρία

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D xydA$, όπου D είναι το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες $y = x + 4$, $y = -x + 2$ και $y = -\frac{1}{3}x - 4$.

Λύση:



Σχήμα 9. Γραφική απεικόνιση του τριγώνου που ορίζεται από τις ευθείες $y = x + 4$, $y = -x + 2$ και $y = -\frac{1}{3}x - 4$.

Έτσι, η περιοχή ολοκλήρωσης D μπορεί να χωρισθεί σε δύο άπλα τρίγωνα:

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -6 \le x \le -1, -\frac{1}{3}x - 4 \le y \le x + 4 \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 9, -\frac{1}{3}x - 4 \le y \le -x + 2 \right\}.$$

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.