Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα

Ενότητα: Ολοκληρωτικός Λογισμός (μέρος 1)

Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής

1. Σκοποί ενότητας

Παρουσιάζονται θέματα Ολοκληρωτικού Λογισμού (μέρος 1) που είναι απαραίτητα για τον χρηματοοικονομικό και λογιστικό αναλυτή.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Ολοκληρωτικός Λογισμός, Μέθοδοι Ολοκλήρωσης, Εφαρμόζοντας τους τύπους των βασικών ολοκληρωμάτων, Με αντικατάσταση και στη συνέχεια εφαρμόζοντας τους τύπους των βασικών ολοκληρωμάτων, Ολοκληρώματα Ρητών Συναρτήσεων, Ανάλυση σε απλά κλάσματα, Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες.

3. Ολοκληρωτικός Λογισμός

Θεώρημα: Μια συνάρτηση $F\left(x\right)$ είναι **αντιπαράγωγος** της συνάρτησης $f\left(x\right)$ εάν $F'\left(x\right)=f(x)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f.

Παράδειγμα: $f\left(x\right)=x^2+x$.

Η αντιπαράγωγος της f είναι $F\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$, αφού $F'\left(x\right)=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)'=x^2+x=f(x)$.

Όμως, $G'\left(x\right)=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3\right)'=x^2+x=f(x)$.

Θεώρημα: Έστω F μια αντιπαράγωγος της f σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση είναι μια αντιπαράγωγος της f στο διάστημα Δ, **αν και μόνο αν** η G είναι της μορφής:
$G(x)=F(x)+c$ όπου c είναι μια σταθερά.

Ορισμός: Το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων μια συνάρτησης f είναι το **αόριστο ολοκλήρωμα** της f, και συμβολίζεται με $\int f(x)dx$.
$\int f(x)dx=F(x)+c$.

Βασικά Ολοκληρώματα

- $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$.
- $\int \frac{1}{x}dx=\ln\left|x\right|+c$.
- $\int e^x dx=e^x+c$.
- $\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+c, a>0, a\neq 1$.
- $\int \sin x dx=-\cos x+c$.
- $\int \cos x dx=\sin x+c$.
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\int \sec^2 x dx=\tan x+c$.
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=\int \csc^2 x dx=-\cot x+c$.

Βασικοί Κανόνες Ολοκλήρωσης:

1. $\int \left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.
2. $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$.

3.1 Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

3.1.1 Εφαρμόζοντας τους τύπους των βασικών ολοκληρωμάτων

1. $\int 4xdx = 4\int xdx = 4\frac{x^2}{2} + c$.
2. $\int \left(1+e^x\right)dx = \int 1dx + \int e^x dx = x + e^x + c$.

3.1.2 Με αντικατάσταση και στη συνέχεια εφαρμόζοντας τους τύπους των βασικών ολοκληρωμάτων

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε ολοκληρώματα της μορφής $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx$.

Θέτουμε $u = g(x)$. Υπολογίζουμε το du, $du = g'(x)dx$. Λύνουμε το ολοκλήρωμα ως προς du και αντικαθιστούμε το u από το $g(x)$.

Παραδείγματα:

1. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$, θέτω $u = x^2+1 \Rightarrow du = 2xdx$,άρα $\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c = \ln\left|x^2+1\right| + c$.
2. $\int \frac{1}{x-2}dx$, θέτω $u = x-2 \Rightarrow du = dx$, άρα $\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c = \ln|x-2| + c$.
3. $\int (x+1)^2 dx$, θέτω $u = x+1 \Rightarrow du = dx$, άρα $\int u^2 du = \frac{u^{2+1}}{2+1} + c = \frac{(x+1)^3}{3} + c$.
4. $\int \frac{\cos^5 x - 3\cos^2 x - 7}{\cos^4 x}\sin xdx$, θέτω $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin xdx \Rightarrow dx = -\frac{du}{\sin x}$, άρα
$$\int \frac{\cos^5 x - 3\cos^2 x - 7}{\cos^4 x}\sin xdx = -\int \frac{u^5 - 3u^2 - 7}{u^4}du = -\int\left(\frac{u^5}{u^4} - \frac{3u^2}{u^4} - \frac{7}{u^4}\right)du =$$
$$-\int\left(u - \frac{3}{u^2} - \frac{7}{u^4}\right)du = -\int\left(u - 3u^{-2} - 7u^{-4}\right)du = -\frac{u^{1+1}}{1+1} + 3\frac{u^{-2+1}}{-2+1} + 7\frac{u^{-4+1}}{-4+1} + c =$$
$$-\frac{u^2}{2} - 3u^{-1} - 7\frac{u^{-3}}{3} + c = -\frac{\cos x^2}{2} - 3\cos x^{-1} - 7\frac{\cos x^{-3}}{3} + c.$$
5. $\int x\cos(x^2+3)dx$, θέτω $u = x^2+3 \Rightarrow du = 2xdx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$, άρα
$$\int x\cos(x^2+3)dx = \frac{1}{2}\int \cos udu = \frac{1}{2}\sin u + c = \frac{1}{2}\sin(x^2+3) + c.$$
6. $I = \int (2x+1)e^{x^2+x}dx = e^{x^2+x} + c$.
7. $I = \int \sin^2 x\cos xdx$ θέτω $u = \sin x$ αποτέλεσμα $I = \frac{\sin^3 x}{3} + c$.
8. $I = \int \sqrt{1+x^2}\,2xdx$ θέτω $u = 1+x^2$ αποτέλεσμα $I = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + c$.
9. $I = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$ θέτω $u = 4-x^2$ αποτέλεσμα $I = -\sqrt{4-x^2} + c$.

3.1.3 Ολοκληρώματα Ρητών Συναρτήσεων

$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$.

- Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι < του βαθμού παρονομαστή τότε αναλύω σε απλά κλάσματα.
- Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι > του βαθμού παρονομαστή τότε κάνουμε την διαίρεση $\frac{f(x)}{g(x)} = p(x) + \frac{v(x)}{h(x)}$ και το αναλύω $\frac{v(x)}{h(x)}$ σε απλά κλάσματα.

3.1.4 Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή $g(x)$ και εάν:

1. Το $g(x)$ έχει μια πραγματική ρίζα τότε : $\frac{A}{a_1 x + a_2}$.
2. Το $g(x)$ έχει μια πραγματική ρίζα με πολλαπλότητα ν τότε:
$\frac{A_1}{a_1 x + a_2} + \frac{A_2}{(a_1 x + a_2)^2} + \ldots + \frac{A_\nu}{(a_1 x + a_2)^\nu}$.
3. Το $g(x)$ έχει ένα ζεύγος μιγαδικών ριζών: $\frac{Ax + B}{a_1 x^2 + a_2 x + a_3}$.
4. Το $g(x)$ έχει ένα ζεύγος μιγαδικών ριζών με πολλαπλότητα ν:
$\frac{A_1 x + B_1}{a_1 x^2 + a_2 x + a_3} + \frac{A_2 x + B_2}{(a_1 x^2 + a_2 x + a_3)^2} + \ldots + \frac{A_\nu x + B_\nu}{(a_1 x^2 + a_2 x + a_3)^\nu}$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{5x-3}{x^2 - 2x - 3} dx$ (2 πραγματικές ρίζες).

Λύση:

Αναλύω το κλάσμα ως εξής $\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A = 2, B = 3$.

Άρα $I = \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx = 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + c$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$ (3 πραγματικές ρίζες).

Λύση:

Αναλύω το κλάσμα ως εξής $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A = 1, B = 5, C = 5$.

$\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{5}{x-3} - \frac{5}{x-2} = \ln(x-1) + 5\ln(x-3) - 5\ln(x-2) + c$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int \frac{6x+7}{\left(x^2+4x+4\right)\left(x+1\right)}dx$ (2 πραγματικές ρίζες, η μια πραγματική πολλαπλότητας 2).

Λύση:

Αναλύω το κλάσμα ως εξής $\frac{6x+7}{\left(x^2+4x+4\right)\left(x+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}\Rightarrow ...\Rightarrow A=1, B=-1, C=5$,

άρα $I=\int \frac{6x+7}{x^2+4x+4}dx=...=-\frac{5}{x+2}-\ln\left(x+2\right)+\ln\left(x+1\right)+c$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}dx$ (2 ρίζες συζυγείς μιγαδικές και 1 ρίζα πραγματική πολλαπλότητας 2).

Λύση:

Αναλύω το κλάσμα ως εξής $\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{\left(x-1\right)^2}$

$\Rightarrow ...\Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=0, C=-\frac{1}{2}, D=\frac{1}{2}$. Άρα,

$$I=\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}dx=\int -\frac{1}{2\left(x-1\right)}+\frac{1}{2\left(x-1\right)^2}+\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}\,dx=$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(x-1\right)-\frac{1}{2\left(x-1\right)}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)+c.$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int \frac{x^3-3x+2}{x^2-5x+6}dx$ (Ο βαθμός του αριθμητή μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή).

Λύση:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 \qquad\qquad -3x+2 & x^2-5x+6 \\ \cline{2-2}
-\quad x^3 \quad -5x^2+6x & x \quad +5 \\ \cline{1-1}
0 \quad 5x^2-9x+2 & \\
-\quad 5x^2-25x+30 & \\ \cline{1-1}
16x-28 &
\end{array}$$

, άρα $\frac{x^3-3x+2}{x^2-5x+6}=x+5+\frac{16x-28}{x^2-5x+6}$.

$$\int \frac{x^3-3x+2}{x^2-5x+6}dx=\int\left(x+5+\frac{16x-28}{x^2-5x+6}\right)dx=\int xdx+\int 5dx+\int \frac{16x-28}{x^2-5x+6}dx.$$

$\int \frac{16x-28}{x^2-5x+6}dx=\int \frac{16x-28}{(x-2)(x-3)}dx$, αναλύω το $\frac{16x-28}{(x-2)(x-3)}$ σε απλά κλάσματα:

$$\frac{16x-28}{(x-2)(x-3)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-3}\Rightarrow ...\Rightarrow a=-4, b=20$$ άρα

$$\int\frac{16x-28}{x^2-5x+6}dx=\int\frac{16x-28}{(x-2)(x-3)}dx=\int\frac{-4}{x-2}dx+\int\frac{20}{x-3}dx=-4\ln|x-2|+20\ln|x-3|+c.$$

Τελικά: $\int\frac{x^3-3x+2}{x^2-5x+6}dx=\frac{x^2}{2}+5x-4\ln|x-2|+20\ln|x-3|+c$.

3.1.5 Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx+c.$$

Με τον παραπάνω τύπο λύνονται ολοκληρώματα της μορφής:

- $\int f(x)\sin(ax+b)dx$.
- $\int f(x)\cos(ax+b)dx$.
- $\int e^{ax}\sin(ax+b)dx$.
- $\int e^{ax}\cos(ax+b)dx$.
- $\int f(x)\ln f(x)dx$.
- $\int f(x)e^{ax}dx$.
- $\int f(x)e^{ax}\sin(ax+b)dx$ (εφαρμόζουμε την μέθοδο για $e^{ax}\sin(ax+b)$ πρώτα).
- $\int f(x)e^{ax}\cos(ax+b)dx$ (εφαρμόζουμε την μέθοδο για $e^{ax}\cos(ax+b)$ πρώτα).

Ασκήσεις:

1. $I=\int xe^x dx=xe^x-e^x+c$.
2. $I=\int x^2e^x dx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+c$.
3. $I=\int \ln x dx=x\ln x-x+c$.
4. $I=\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c$.
5. $I=\int\frac{\ln x}{x^3}dx=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+c$.
6. $I=\int x\cos x dx=x\sin x+\cos x+c$.
7. $I=\int x\sin x dx=-x\cos x+\sin x+c$.
8. $I=\int x^2\cos x dx=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c$.
9. $I=\int x\sin 2x dx=-x\frac{\cos 2x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}+c$.
10. $I=\int \ln^2 x dx=x\ln^2 x+2(x\ln x-x)+c$ (δύο φορές παραγοντική).

11. $I=\int \frac{\sin x}{e^{2x}}dx=\frac{-\cos x-2\sin x}{5e^{2x}}$ (δύο φορές παραγοντική).

12. $I=\int \sin(\ln x)dx=\frac{x}{2}\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]+c$ (δύο φορές παραγοντική).

13. $I=\int \sin x\sin 3xdx=\frac{1}{8}\sin 3x\cos x-\frac{3}{8}\cos 3x+\sin x$ (δύο φορές παραγοντική).

14. $I=\int e^{x}\cos 2xdx=\frac{1}{5}(e^{x}\cos 2x+2e^{x}\sin 2x)+c$.

15. $I=\int xe^{x}\sin xdx=\frac{1}{2}x(e^{x}\sin x-e^{x}\cos x)+\frac{1}{2}e^{x}\cos x+c$.

16. $I=\int e^{2x}\cos 3xdx$.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης