Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα

Ενότητα: Πραγματικές Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών (μέρος 2)

Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής

1. Σκοποί ενότητας

Παρουσιάζονται θέματα Διαφορικού Λογισμού και συγκεκριμένα οι πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών (μέρος 2) που είναι απαραίτητα για τον χρηματοοικονομικό και λογιστικό αναλυτή.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Μέγιστα και Ελάχιστα με Περιορισμό, Βελτιστοποίηση με δύο Περιορισμούς, Μελέτη Ακρότατων με χρήση του Η/Υ, Με χρήση του Maple, Με χρήση Λογιστικού Φύλου (Excel), Ομογενείς Συναρτήσεις, Μερικές Ελαστικότητες.

3. Μέγιστα και Ελάχιστα με Περιορισμό

Για να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)$ υπό την συνθήκη $g(x,y)=c$, αρχικά κατασκευάζουμε την συνάρτηση Lagrange $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot\left(c-g(x,y)\right)$ και εξετάζουμε την ύπαρξη κρίσιμων σημείων για την L.

- Η μήτρα $\overline{H}=\begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{pmatrix}$ ονομάζεται μήτρα της περιορισμένης Εσσιανής.

Κριτήριο:

- Αν $\overline{H}\left(x_0,y_0\right)>0$, τότε το $\left(x_0,y_0\right)$ είναι σημείο **τοπικού μεγίστου** για την $f(x,y)$ υπό την συνθήκη $g(x,y)=c$.
- Αν $\overline{H}\left(x_0,y_0\right)<0$, τότε το $\left(x_0,y_0\right)$ είναι σημείο **τοπικού ελαχίστου** για την $f(x,y)$ υπό την συνθήκη $g(x,y)=c$.
- Αν $\overline{H}\left(x_0,y_0\right)=0$, τότε το κριτήριο δεν οδηγεί σε συμπέρασμα.

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης. $f(x,y)=x^2+y^2$ υπό την συνθήκη $x+y=1$.

Λύση: Ορίζουμε την συνάρτηση $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\cdot\left(1-\left(x+y\right)\right)$.

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους 1ης τάξης:

$L_x(x,y,\lambda)=2x-\lambda$, $L_y(x,y,\lambda)=2y-\lambda$, $L_\lambda(x,y,\lambda)=-x-y+1$.

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία που προκύπτουν από την λύση του συστήματος των μερικών παραγώγων.

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda)=0 \\ L_y(x,y,\lambda)=0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\lambda=0 \\ 2y-\lambda=0 \\ -x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\lambda=0 \\ 2x+2y-2\lambda=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\lambda=0 \\ 2-2\lambda=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ \lambda=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

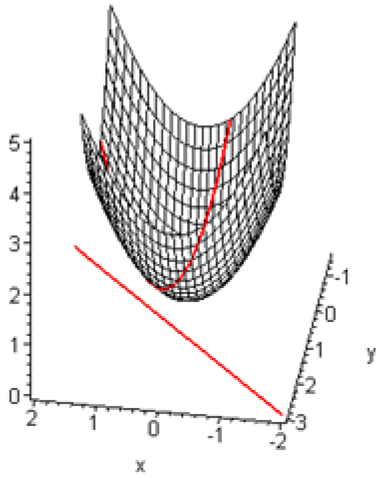
Υπολογίζουμε τις:

$L_{xx}(x,y,\lambda)=2$, $L_{yx}(x,y,\lambda)=0$, $L_{yy}(x,y,\lambda)=2$, $L_{xy}(x,y,\lambda)=0$.

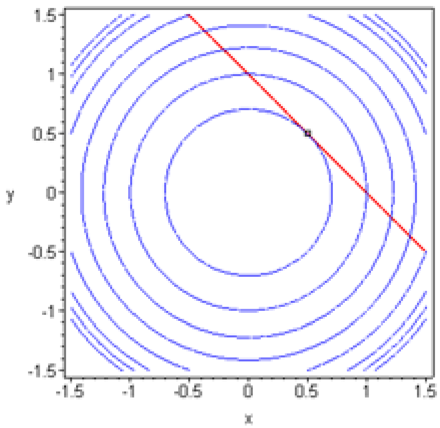
$g_x=-1$ και $g_y=-1$.

Η Εσσιανή περιορισμένη ορίζουσα είναι: $\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0$.

Άρα στο $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ έχω ελάχιστο.



Σχήμα 1. Γραφική παράσταση της $f(x,y) = x^2 + y^2$ και της συνθήκης $x + y = 1$ (όψη).



Σχήμα 2. Γραφική παράσταση της $f(x,y) = x^2 + y^2$ και της συνθήκης $x + y = 1$ (κάτοψη).

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης. $f(x,y) = x \cdot y$ υπό την συνθήκη $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.

Λύση: Ορίζουμε την συνάρτηση $L(x,y,\lambda) = xy + \lambda \cdot \left(1 - \left(\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2}\right)\right) = xy + \lambda - \lambda\dfrac{x^2}{8} - \lambda\dfrac{y^2}{2}$.

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους 1ης τάξης:

$L_x(x,y,\lambda)=y-\frac{2\lambda x}{8}$, $L_y(x,y,\lambda)=x-\lambda y$, $L_\lambda(x,y,\lambda)=1-\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}$.

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία που προκύπτουν από την λύση του συστήματος των μερικών παραγώγων.

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda)=0 \\ L_y(x,y,\lambda)=0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-\frac{2\lambda x}{8}=0 \\ x-\lambda y=0 \\ 1-\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{\lambda x}{4} \\ x=\lambda y \\ 1-\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{\lambda}{4}\lambda y \\ x=\lambda y \\ 1-\frac{(\lambda y)^2}{8}-\frac{\left(\frac{\lambda x}{4}\right)^2}{2}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\left(1-\frac{\lambda^2}{4}\right)=0 \\ x=\lambda y \\ 1-\frac{(\lambda y)^2}{8}-\frac{\left(\frac{\lambda x}{4}\right)^2}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \text{ ή } \lambda=\pm 2 \\ x=\lambda y \\ 1-\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=0 \end{cases}$$

, άρα (x,y)=(0,0) το οποίο δεν ανήκει στην έλλειψη, οπότε $y\neq 0$ και $\lambda=\pm 2$ αντικαθιστώντας έχουμε $(\pm 2,1),(\pm 2,-1)$.

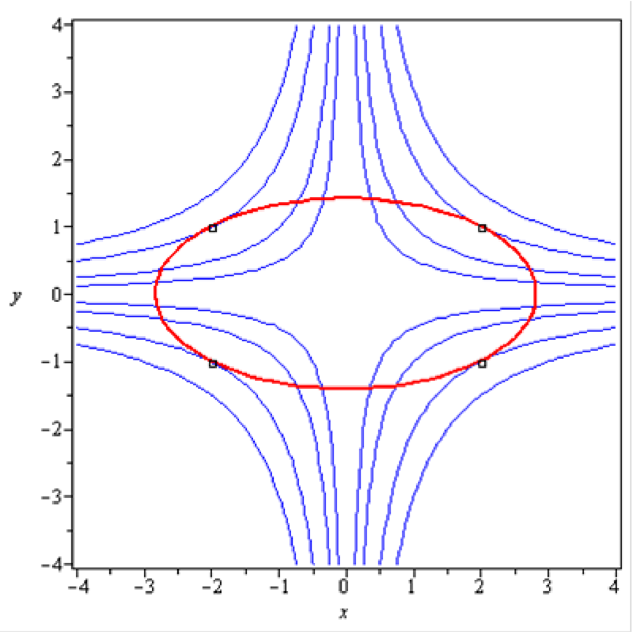
$L_{xx}(x,y,\lambda)=-\frac{\lambda}{x}$, $L_{yx}(x,y,\lambda)=1$, $L_{yy}(x,y,\lambda)=-\lambda$.

$g_x=\frac{x}{4}$, $g_y=y$.

Η Εσσιανή ορίζουσα είναι: $|\overline{H}|=\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{x}{4} & -y \\ -\frac{x}{4} & -\frac{\lambda}{4} & 1 \\ -y & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=\frac{1}{2}xy+\frac{1}{16}\lambda x^2+\frac{1}{4}\lambda y^2$.

Για το σημείο:

- Για $x(2,1)$ και λ=2 έχουμε: $|\overline{H}|=2>0$, άρα έχω μέγιστο.
- Για $x(-2,1)$ και λ=2 έχουμε: $|\overline{H}|=2>0$, άρα έχω μέγιστο.
- Για $x(-2,1)$ και λ=-2 έχουμε: $|\overline{H}|=-2<0$, άρα έχω ελάχιστο.
- Για $x(2,1)$ και λ=-2 έχουμε: $|\overline{H}|=-2<0$, άρα έχω ελάχιστο.



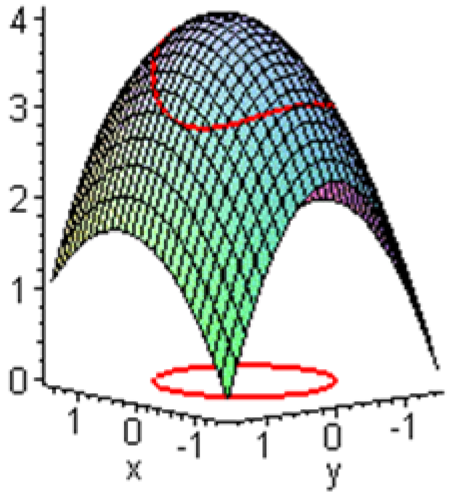
Σχήμα 3. Γραφική παράσταση της $f(x,y)=x\cdot y$, της συνθήκης $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ και των ακρότατων (κάτοψη).

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης. $f(x,y)=4-\frac{1}{2}x^2-y^2+\frac{3}{10}x$ υπό την συνθήκη $x^2+y^2=1$.

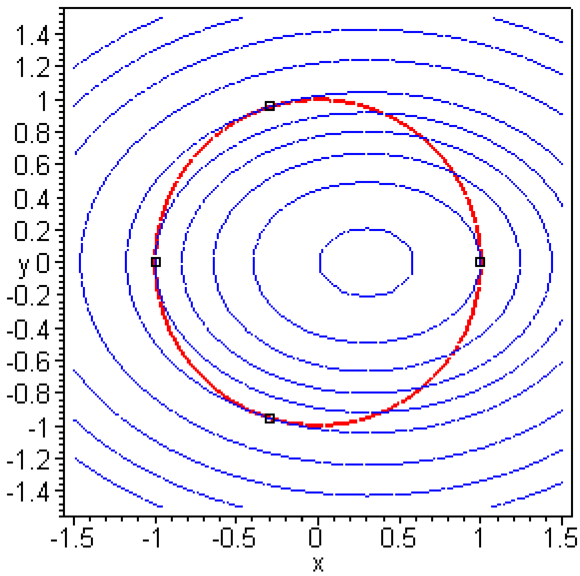
Λύση:

$soln := [\{a=-0.3500, x=1.0000, y=0.0000\}, \{a=-0.6500, x=-1.0000, y=0.0000\}, \{a=-1.0000, x=-0.3000, y=0.9539\}, \{a=-1.0000, x=-0.3000, y=-0.9539\}]$

Σχήμα 4. Λύση του προβλήματος με χρήση του Mathematica.



Σχήμα 5. Γραφική παράσταση της $f(x,y)=4-\frac{1}{2}x^2-y^2+\frac{3}{10}x$ και της συνθήκης $x^2+y^2=1$ (όψη).



Σχήμα 6. Γραφική παράσταση της $f(x,y)=4-\dfrac{1}{2}x^2-y^2+\dfrac{3}{10}x$ και της συνθήκης $x^2+y^2=1$ (κάτοψη).

4. Βελτιστοποίηση με δύο Περιορισμούς

Για να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y,z)$ υπό τις συνθήκες $g_1(x,y,z)=c_1$ και $g_2(x,y,z)=c_2$. Αρχικά κατασκευάζουμε την συνάρτηση Lagrange $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)= f(x,y)+\lambda_1\cdot\left(c_1-g_1(x,y,z)\right)+\lambda_2\cdot\left(c_2-g_2(x,y,z)\right)$ και εξετάζουμε την ύπαρξη κρίσιμων σημείων για την L.

- Η μήτρα $\overline{H}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ 0 & 0 & g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \\ g_{1x} & g_{2x} & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ g_{1y} & g_{2y} & L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ g_{1z} & g_{2z} & L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix}$ ονομάζεται μήτρα της περιορισμένης Εσσιανής.

Κριτήριο:

- Αν $\overline{H}\left(x_0,y_0,z_0\right)<0$, τότε στο $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ έχουμε σημείο **τοπικού μεγίστου**.
- Αν $\overline{H}\left(x_0,y_0,z_0\right)>0$, τότε στο $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ έχουμε σημείο **τοπικού ελαχίστου**.
- Αν $\overline{H}\left(x_0,y_0\right)=0$, τότε το κριτήριο δεν οδηγεί σε συμπέρασμα.

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ με τις συνθήκες $x+y+z=1$ και $x+y=1$.

Κατασκευάζουμε την συνάρτηση Lagrange:
$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1\cdot\left(1-\left(x+y+z\right)\right)+\lambda_2\cdot\left(1-\left(x+y\right)\right)$.
Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους 1ης τάξης:

$L_x(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=2x-\lambda_1-\lambda_2$, $L_y(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=2y-\lambda_1-\lambda_2$, $L_z(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=2z-\lambda_1$, $L_{\lambda_1}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=1-\left(x+y+z\right)$, $L_{\lambda_2}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=1-\left(x+y\right)$.

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία που προκύπτουν από την λύση του συστήματος των μερικών παραγώγων.

$$\begin{cases} L_x(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0 \\ L_y(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0 \\ L_z(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0 \\ L_{\lambda_1}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0 \\ L_{\lambda_2}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\lambda_1-\lambda_2=0 \\ 2y-\lambda_1-\lambda_2=0 \\ 2z-\lambda_1=0 \\ 1-\left(x+y+z\right)=0 \\ 1-\left(x+y\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \cdots \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=1/2 \\ y=1/2 \\ z=0 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_2=1 \end{cases}.$$

Η Εσσιανή ορίζουσα είναι: $\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ 0 & 0 & g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \\ g_{1x} & g_{2x} & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ g_{1y} & g_{2y} & L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ g_{1z} & g_{2z} & L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$.

Συνεπώς, έχουμε σημείο τοπικού ελαχίστου στο $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.
Εναλλακτικά, μπορούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα με τη χρήση Ηλεκτρονικού Υπολογιστή (Η/Υ).

```
In[10]:= f[x_, y_, z_] := x^2 + y^2 + z^2
         g1[x_, y_] := x + y + z - 1
         g2[x_, z_] := x + y - 1
         h[x_, y_, z_, λ1_, λ2_] := f[x, y, z] - λ1 g1[x, y] - λ2 g2[x, z]
         TraditionalForm[Column[
           pts = {x, y, z, λ1, λ2} /. FullSimplify@Solve[D[h[x, y, z, λ1, λ2], #] == 0 &/@
               {x, y, z, λ1, λ2}, {x, y, z, λ1, λ2}], Frame → All]]
Out[14]//TraditionalForm=
```

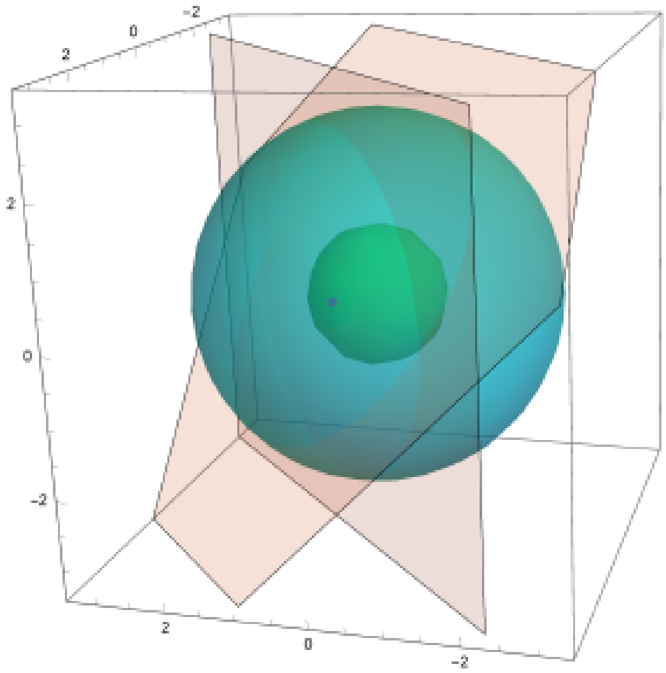
$\boxed{\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 1\right\}}$

```
In[8]:= FullSimplify@
         ToRadicals@Minimize[{f[x, y, z], g1[x, y] == 0, g2[x, z] == 0}, {x, y, z}]
```

Out[8]= $\left\{\frac{1}{2}, \left\{x \to \frac{1}{2}, y \to \frac{1}{2}, z \to 0\right\}\right\}$

```
In[9]:= Show[
         ContourPlot3D[{f[x, y, z] == 2 (2 + √2), f[x, y, z] == 1, g1[x, y] == 0, g2[x, z] == 0},
          {x, -3.3, 3.3}, {y, -3.3, 3.3}, {z, -3.3, 3.3},
          ContourStyle → {Directive[Cyan, Opacity[0.5]], Directive[Green, Opacity[0.5]],
            Directive[Orange, Opacity[0.15]], Directive[Orange, Opacity[0.15]]},
          Mesh → None], Graphics3D[{Magenta, PointSize[0.015], Point[pts]}]]
```

Out[9]=



Σχήμα 7. Επίλυση μέσω Mathematica. Η τελεία αντιστοιχεί στο σημείο τοπικού ελαχίστου.

5. Μέγιστα και Ελάχιστα με *m* Περιορισμούς

Για να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ υπό τις συνθήκες $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1$, $g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_2$, …, $g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_m$. Αρχικά κατασκευάζουμε την συνάρτηση Lagrange $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 \cdot \left(c_1 - g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) + \ldots + \lambda_m \cdot \left(c_m - g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)$ και εξετάζουμε την ύπαρξη κρίσιμων σημείων για την L.

Το κριτήριο πρώτης τάξης δίνει το ακόλουθο (n+m)x(n+m) σύστημα εξισώσεων:

$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, i = 1, \ldots, n$ και $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0, j = 1, \ldots, m$.

Το κριτήριο δεύτερης τάξης αφορά την πλαισιωμένη Εσσιανή μήτρα διαστάσεων (n+m)x(n+m):

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{1x_1} & g_{1x_2} & \cdots & g_{1x_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{2x_1} & g_{2x_2} & \cdots & g_{2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{mx_1} & g_{mx_2} & \cdots & g_{mx_n} \\ g_{1x_1} & g_{2x_1} & \cdots & g_{mx_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \cdots & L_{x_1x_n} \\ g_{1x_2} & g_{2x_2} & \cdots & g_{mx_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \cdots & L_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1x_n} & g_{2x_n} & \cdots & g_{mx_n} & L_{x_nx_1} & L_{x_nx_1} & \cdots & L_{x_nx_n} \end{pmatrix}.$$

Κριτήριο:
Αν $\left|\overline{H}\right|$ είναι η ορίζουσα της πλαισιωμένης Εσσιανής μήτρας και οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες ορίζουσές της $\left|\overline{H}_{m+1}\right|, \left|\overline{H}_{m+2}\right|, \ldots, \left|\overline{H}_{m+n}\right| = \left|\overline{H}\right|$ έχουν (στα σημεία στα οποία ικανοποιείται το κριτήριο πρώτης τάξης):

1. Εναλλασσόμενα πρόσημα, με το πρόσημο της πρώτης να είναι ίδιο με το πρόσημο του $\left(-1\right)^{m+1}$, τότε έχω τοπικό μέγιστο.
2. Όλες το ίδιο πρόσημο με αυτό του $\left(-1\right)^{m}$, τότε έχω τοπικό ελάχιστο.

6. Μελέτη Ακρότατων με χρήση του Η/Υ

6.1 Με χρήση του Maple

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης. $f(x,y)=x\cdot y$ υπό την συνθήκη $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

Ορίζουμε την συνάρτηση f(x,y) $\left(f:=(x,y)\rightarrow x\cdot y\right)$:

>f:= (x, y)-> x * y;

Ορίζουμε τον περιορισμό $\left(\mathrm{g}:=1-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}y^2\right)$:

>g:=1-(x^2/8+y^2/2);

Ορίζουμε την συνάρτηση του Lagrange $\left(\mathrm{L}:=xy+\lambda\left(1-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}y^2\right)\right)$:

>L:= f(x, y)+λ*(g);

Ορίζουμε τις αναγκαίες συνθήκες ($\mathrm{eq}1:=y-\frac{1}{4}\lambda x=0$, $\mathrm{eq}2:=x-\lambda y=0$, $\mathrm{eq}3:=1-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}y^2=0$):

>eq1:=diff (L, x) =0;

>eq2:=diff (L, y) =0;

>eq3:=diff (L, λ) =0;

Λύνουμε το σύστημα $\left(soln:=\begin{bmatrix}\{x=2,y=1,\lambda=2\},\{x=-2,y=-1,\lambda=2\},\\ \{x=-2,y=1,\lambda=-2\},\{x=2,y=-1,\lambda=-2\}\end{bmatrix}\right)$:

>soln:= [solve({eq1,eq2,eq3},{x, y, λ})];

Ορίζουμε την περιορισμένη Εσσιανή $\left(H:=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{4}x & -y\\ -\frac{1}{4}x & -\frac{1}{4}a & 1\\ -y & 1 & -a\end{bmatrix}\right)$:

H:=<<0,diff(g,x),diff(g,y)>|<diff(g,x),diff(L,x$2),diff(L,x,y)>|<diff(g,y),diff(L,x,y)>,diff(L,y$2)>;

>with(Linear Algebra):

Υπολογίζουμε την ορίζουσα:

```
>H:=Determinant(H);
```

$$H := \frac{1}{2}xy + \frac{1}{16}ax^2 + \frac{1}{4}ay^2$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα στα κρίσιμα σημεία:

```
>subs ({x=2, y=1, a=2}, H);

>subs ({x=-2, y=-1, a=2}, H);

>subs ({x=-2, y=1, a=-2}, H);

>subs ({x=2, y=-1, a=-2}, H);
```

Γενικά:

- Όνομα συνάρτησης:=(μεταβλητή1, μεταβλητή2,...)->τύπος
- Μήτρα :=<<στήλη> |<στήλη> |στήλη>>
- Diff(L, x, y)= $L_{xy}(x, y, \lambda)$
- Solve (eqns, vars) = Λύνει μια εξίσωση ή ένα σύστημα εξισώσεων.
- Determinant(μήτρα) =ορίζουσα
- Subs (x=α, έκφραση) = Κάνει αντικατάσταση σε μια έκφραση.

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ με τις συνθήκες $2x - y = 0$ και $y + z = 0$.

Λύση:

```
> f:=(x,y,z)->x^2+2*y-z^2;
```

$$f := (x, y, z) \to x^2 + 2y - z^2$$

```
> g1:=2*x-y;
```

$$\mathrm{g}1 := 2x - y$$

```
> g2:=y+z;
```

$$\mathrm{g}2 := y + z$$

```
> L:=f(x,y,z)+a1*(g1)+a2*g2;
```

$$L := x^2 + 2y - z^2 + a1\left(2x - y\right) + a2\left(y + z\right)$$

```
>eq1:=diff (L, x) =0;
```

$$\mathrm{eq}1 := 2x + 2a1 = 0$$

```
>eq2:=diff (L, y) =0;
```

$$\mathrm{eq}2 := 2 - a1 + a2 = 0$$

```
>eq3:=diff (L, z) =0;
```

$$\mathrm{eq}\,3 := -2z + a2 = 0$$

```
>eq4:=diff (L, a1) =0;
```

$$\mathrm{eq}\,4 := 2x - y = 0$$

```
>eq5:=diff (L, a2) =0;
```

$$\mathrm{eq}\,5 := y + z = 0$$

```
> soln:=[solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5},{x,y,z,a1,a2})];
```

$$soln := \left[\left\{a1 = -\frac{2}{3}, a2 = -\frac{8}{3}, x = \frac{2}{3}, y = \frac{4}{3}, z = -\frac{4}{3}\right\}\right]$$

```
>H:=<<0,0,diff(g1,x),diff(g1,y),diff(g1,z)>|<0,0,diff(g2,x),diff(g2,y),diff(g2,z)>|<diff(g1,x),diff(g2,x),diff(L,x$2),diff(L,y,x),diff(L,z,x)>|<diff(g1,y),diff(g2,y),diff(L,x,y),diff(L,y$2),diff(L,z,y)>|<diff(g1,z),diff(g2,z),diff(L,x,z),diff(L,y,z),diff(L,z$2)>>;
```

$$H := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> with(LinearAlgebra):
```

```
> H:=Determinant(H)
```

$$H := -6$$

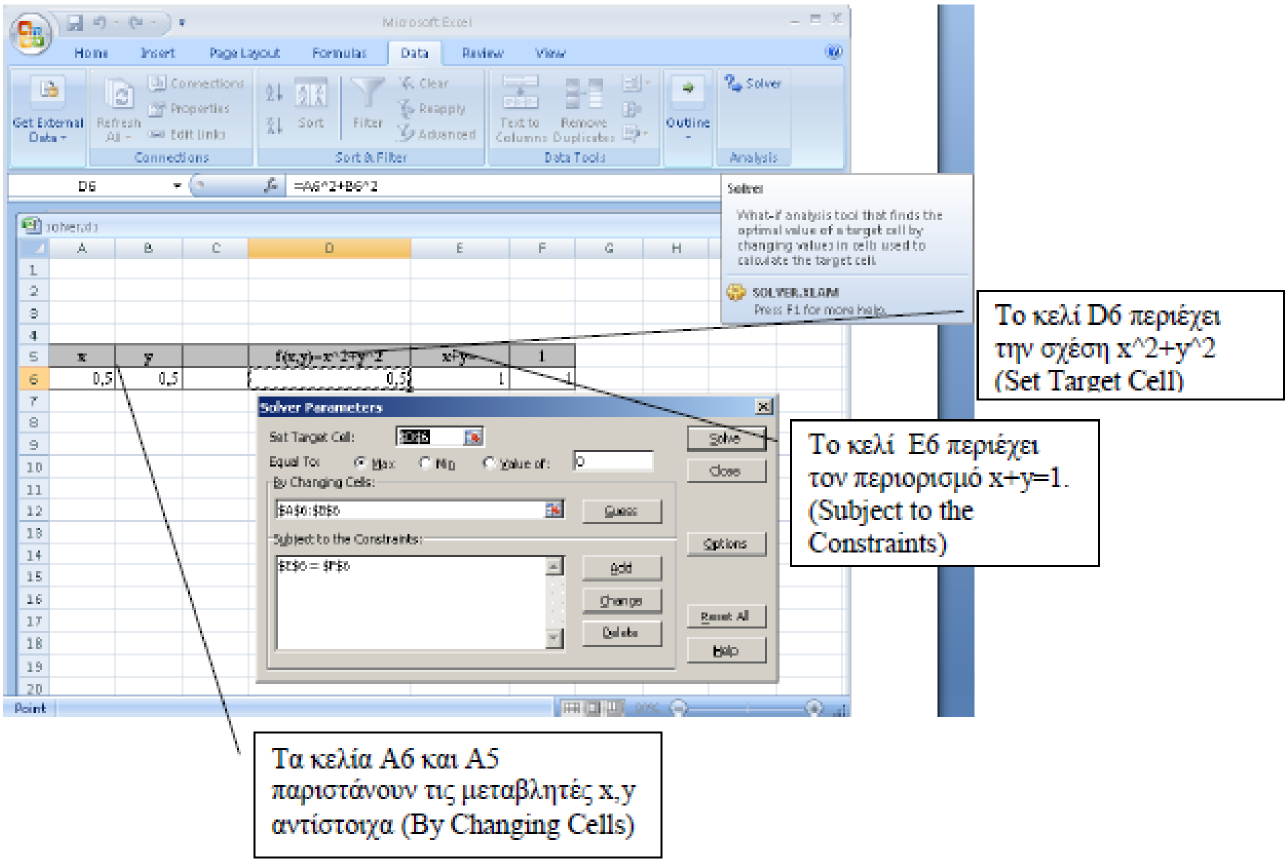
$\overline{H}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) < 0$, τότε στο $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ έχουμε σημείο **τοπικού μεγίστου.**

6.2 Με χρήση Λογιστικού Φύλου (Excel)

Για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης το Excel παρέχει το πρόσθετο πρόγραμμα Solver.

Το πρόγραμμα αυτό πρέπει να ενεργοποιηθεί πρώτα από τα πρόσθετα (Add-in).

Στην συνέχεια επιλέγουμε (Tools->Solver για το Office 2003 ή Data-> Solver για το Office 2007).



Σχήμα 8. Απόσπασμα από το Λογιστικό Φύλο (Excel) κατά τη χρήση του Solver.

7. Ομογενείς Συναρτήσεις

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to R \subseteq \mathbb{R}$ ορισμένη στο ανοικτό D. Η συνάρτηση f λέγεται **ομογενής (Homogeneous) βαθμού p** αν και μόνο αν $f\left(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n\right) = \lambda^p f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in \mathbb{R}^n$.

Θεώρημα (Euler):

Έστω μια συνάρτηση $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to R \subseteq \mathbb{R}$ ομογενής βαθμού p με συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους, τότε: $\sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \cdot x_i = p \cdot f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$.

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f\left(x,y,z\right) = 3x + 2y - 4z$ η συνάρτηση αυτή είναι γραμμική ομογενής 1^{ου} βαθμού. $f_x\left(x,y,z\right) = 3$, $f_y\left(x,y,z\right) = 2$, $f_z\left(x,y,z\right) = -4$.

Πράγματι: $xf_x + yf_y + zf_z = 3x + 2y - 4z$

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f\left(x,y\right) = 2x^2 + 4y^2$ η συνάρτηση αυτή είναι ομογενής 2^{ου} βαθμού (πράγματι $f\left(\lambda x, \lambda y\right) = 2\left(\lambda x\right)^2 + 4\left(\lambda y\right)^2 = 2\lambda^2 x^2 + 4\lambda^2 y^2 = \lambda^2\left(2x^2 + 4y^2\right) = \lambda^2 f\left(x,y\right)$).

$f_x\left(x,y\right) = 4x$, $f_y\left(x,y\right) = 8y$.

Πράγματι: $xf_x + yf_y = x \cdot 4x + y \cdot 8y = 4x^2 + 8y^2 = 2f\left(x,y\right)$.

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f\left(x,y\right) = 2x^2y^2 - 3y^3x$ η συνάρτηση αυτή είναι ομογενής ^{4ου} βαθμού.

(Πράγματι $f\left(\lambda x, \lambda y\right) = 2\left(\lambda x\right)^2\left(\lambda y\right)^2 - 3\left(\lambda y\right)^3 \lambda x = 2\lambda^2 x^2 \lambda^2 y - 3\lambda^3 y \lambda x = \lambda^4\left(2x^2 y - 3yx\right) = \lambda^4 f\left(x,y\right)$).

$f_x\left(x,y\right) = 4xy^2 - 3y^3$, $f_y\left(x,y\right) = 4x^2y - 9y^2x$.

Πράγματι: $xf_x + yf_y = x \cdot \left(4xy^2 - 3y^3\right) + y \cdot \left(4x^2y - 9y^2x\right) = 4x^2y^2 - 3xy^3 + 4x^2y^2 - 9y^3x = 4f\left(x,y\right)$.

8. Μερικές Ελαστικότητες

Έστω $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$.

$$\varepsilon_\iota = \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{x_i}{y} = \frac{\partial \ln\left(y\right)}{\partial \ln\left(x_i\right)}.$$

Η ελαστικότητα σε ένα σημείο μετράει την ποσοστιαία μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής y όταν έχω μικρή ποσοστιαία μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής x_i (οι υπόλοιπες ανεξάρτητες μεταβλητές παραμένουν σταθερές).

Παράδειγμα: Cobb-Douglas.

Συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas $Q = AK^{a}L^{b}$.

Q, K, L μεταβλητές (ποσότητα παραγωγής, ποσότητα κεφαλαίου, ποσότητα εργατικού δυναμικού) και $A > 0, 0 < a, b < 1$.

Οι μερικές παράγωγοι είναι:

$$Q_K = aAK^{a-1}L^{b}.$$

$$Q_L = bAK^{a}L^{b-1}.$$

Μερικές Ελαστικότητες:

$$\varepsilon_K = \frac{\frac{\partial Q}{Q}}{\frac{\partial K}{K}} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = aAK^{a-1}L^{b}\frac{K}{Q} = aAK^{a-1}L^{b}\frac{K}{AK^{a}L^{b}} = a.$$

$$\varepsilon_L = \frac{\frac{\partial Q}{Q}}{\frac{\partial L}{L}} = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = bAK^{a}L^{b-1}\frac{L}{Q} = bAK^{a}L^{b-1}\frac{L}{AK^{a}L^{b}} = b.$$

Η συνάρτηση είναι ομογενής βαθμού a+b.

$$Q\left(\lambda \mathrm{K}, \lambda L\right) = A\left(\lambda \mathrm{K}\right)^{a}\left(\lambda L\right)^{b} = A\lambda^{a}K^{a}\lambda^{b}L^{b} = \lambda^{a+b}\left(AK^{a}L^{b}\right) = \lambda^{a+b}\cdot Q\left(\mathrm{K}, L\right).$$

Το θεώρημα του Euler:

$$\left(aAK^{a-1}L^{b}\right)K + \left(bAK^{a}L^{b-1}\right)L = AK^{a}L \quad .$$

<u>Εφαρμογή</u>: Αν $Q=10K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$.

Οι μερικές ελαστικότητες είναι:

$\varepsilon_K=0.5$.

$\varepsilon_L=0.5$.

Θα βελτιστοποιήσουμε την συνάρτηση παραγωγής ως προς την συνθήκη:

$4L+10K=100$.

Η Λαγκρανζιανή συνάρτηση είναι:

$$\Lambda(K,L,\lambda)=10K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}+\lambda\cdot\left(100-(4L+10K)\right).$$

Αναγκαία Συνθήκη:

$$\begin{cases}\Lambda_K=0\\ \Lambda_L=0\\ \Lambda_\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5L^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}-4\lambda=0\\ 5L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}-10\lambda=0\\ 100-4\Lambda-10\mathrm{K}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=0.79\\ L=12,5\\ K=5\end{cases}$$

Η Εσσιανή περιορισμένη ορίζουσα είναι:

$$\overline{H}=\begin{pmatrix}0 & 4 & 10\\ 4 & -\frac{5}{2}L^{-\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}} & \frac{5}{2}L^{-\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}\\ g_y & \frac{5}{2}L^{-\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}} & -\frac{5}{2}L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{3}{2}}\end{pmatrix}.$$

$\overline{H}\left(12.5,5\right)>0$, άρα έχω μέγιστο.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.