Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα

Ενότητα: Διαφορικός Λογισμός

Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής

1. Σκοποί ενότητας

Παρουσιάζονται θέματα Διαφορικού Λογισμού που είναι απαραίτητα για τον χρηματοοικονομικό και λογιστικό αναλυτή.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Παράγωγος Συνάρτησης, Κανόνας Αλυσιδωτής Παραγώγισης (Chain Rule), Παραγώγιση Πεπλεγμένης Συνάρτησης, Παραγώγιση της Αντίστροφης Συνάρτησης, Διαφορικό, Εφαρμογές των Παραγώγων, Μονοτονία, Κοίλη-Κυρτή, Σημεία Καμπής, Μέγιστα – Ελάχιστα, Προσέγγιση Συνάρτησης, Κανόνας De l' Hospital, Ασύμπτωτες, Εφαρμογές στα οικονομικά, Σημείο Ισορροπίας, Γενικά περί συναρτήσεων στα οικονομικά, Καμπύλες Κόστους, Καμπύλες Εσόδων, Ελαστικότητες, Ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή – p (Price elasticity of demand), Ελαστικότητα της ζήτησης ως προς το εισόδημα, Μεγιστοποίηση Κέρδους.

3. Παράγωγος Συνάρτησης

Έστω $y = f(x)$ με πεδίο ορισμού το (a, b). Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή μεταβληθεί κατά Δx (δηλαδή από το x_0 σε $x_0 + \Delta x$), τότε η εξαρτημένη μεταβλητή θα μεταβληθεί κατά Δy = $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Η **μέση μεταβολή** του y ανά μονάδα μεταβολής του x είναι:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (Μέσος Ρυθμός Μεταβολής).

Ο **στιγμιαίος ρυθμός** μεταβολής είναι $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Ορισμός: Έστω η συνάρτηση $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a,b)$. Η συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη** (διαφορίσιμη) (differentiable) στο x_0, εάν το όριο $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο.

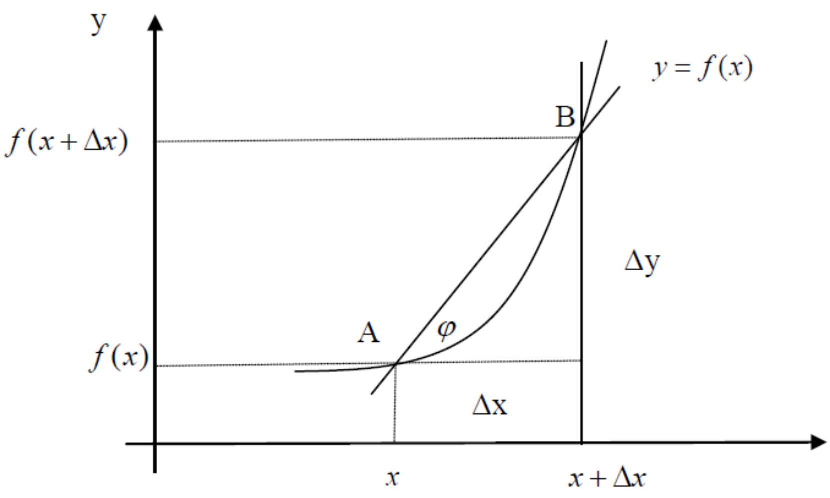
Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται $f'(x_0)$ ή $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Παρατήρηση: Η δεύτερη παράγωγος συμβολίζεται $\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$ κ.ο.κ..

- **Γεωμετρική Ερμηνεία.**

Η κλίση της ΑΒ θα είναι $\tan\phi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Κρατάμε το x σταθερό και αφήνουμε το Δx να τείνει στο 0 έτσι η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο Α θα είναι $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.



Σχήμα 1. Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου.

Θεώρημα: Έστω η συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Ορισμός: Έστω η συνάρτηση $f:D\to\mathbb{R}$ και $S=\left\{x\in D:\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\in\mathbb{R}\right\}$, τότε ορίζεται η συνάρτηση $f':S\to\mathbb{R}$ η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f.

Θεώρημα: Έστω η συνάρτηση $f:D\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο D, τότε η f είναι και συνεχής στο D.

Πίνακας 1. Παράγωγος Βασικών Συναρτήσεων.

α/α	x	u(x) μια διαφορίσιμη συνάρτηση του x
1	$\dfrac{d}{dx}(c)=0$, c=σταθερά	
2	$\dfrac{d}{dx}(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$	
3	$\dfrac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$	$\dfrac{d}{dx}(u^n)=n\cdot u^{n-1}\dfrac{du}{dx}$
4	$\dfrac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$, $\forall x\in\mathbb{R}$	$\dfrac{d}{dx}(\sin u)=\cos u\dfrac{du}{dx}$
5	$\dfrac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$, $\forall x\in\mathbb{R}$	$\dfrac{d}{dx}(\cos u)=-\sin u\dfrac{du}{dx}$
6	$\dfrac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$, $\forall x\in\mathbb{R}$	$\dfrac{d}{dx}(\tan u)=\sec^2 u\dfrac{du}{dx}$
7	$\dfrac{d}{dx}(e^x)=e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$	$\dfrac{d}{dx}(e^u)=e^u\dfrac{du}{dx}$
8	$\dfrac{d}{dx}(\ln x)=\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$	$\dfrac{d}{dx}(\ln u)=\dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$

Πίνακας 2. Κανόνες Παραγώγισης.

u(x) μια διαφορίσιμη συνάρτηση του x
$\dfrac{d}{dx}(c\cdot u)=c\cdot\dfrac{du}{dx}$
$\dfrac{d}{dx}(u+v)=\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dx}$
$\dfrac{d}{dx}(u\cdot v)=u\cdot\dfrac{dv}{dx}+v\cdot\dfrac{du}{dx}$
$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\cdot\dfrac{du}{dx}+u\cdot\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

3.1 Κανόνας Αλυσιδωτής Παραγώγισης (Chain Rule)

Αν η $f(u)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $u = g(x)$ και η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x, τότε η $(f \circ g)(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x και $(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, δηλαδή $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η παράγωγος της $y = (5x+1)^2$.

Είναι η σύνθεση της $y = u^2$ και $u = 5x+1$.

$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(5x+1)^2 = 2 \cdot (5x+1)\frac{d}{dx}(5x+1) = 2 \cdot (5x+1) \cdot 5$, που είναι το γινόμενο των $\frac{dy}{du} = 2u = 2(5x+1)$ και $\frac{du}{dt}x = \frac{d}{dx}(5x+1) = 5$.

3.2 Παραγώγιση Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Δεν είναι πάντα οι συναρτήσεις στην μορφή $y = f(x)$, άλλα στην μορφή $F(x,y) = 0$ (δηλαδή δεν είναι λυμένες ως προς y, όπως $x^2 + y^2 = 1$, η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου). Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η συνάρτηση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή.

Παράδειγμα: Να βρεθεί το $\frac{dy}{dx}$ εάν $y^2 - x = 0$.

$\frac{d}{dx}\left(y^2 - x\right) = \frac{d}{dx}(0)$.

$\frac{d}{dx}\left(y^2\right) - \frac{d}{dx}(x) = 0$.

$2y\frac{dy}{dx} - 1 = 0$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$.

3.3 Παραγώγιση της Αντίστροφης Συνάρτησης

Θεώρημα: Έστω $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Αν η f είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός της δεν μηδενίζεται στο (a,b), τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$.

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)\Leftrightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f'(x)}.$$

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $y=f\left(x\right)=x^n$ (n θετικός ακέραιος) είναι αύξουσα στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$.

Η $f(x)$ έχει μοναδική αντίστροφη την $x=y^{\frac{1}{n}}$ και η παράγωγος της είναι:

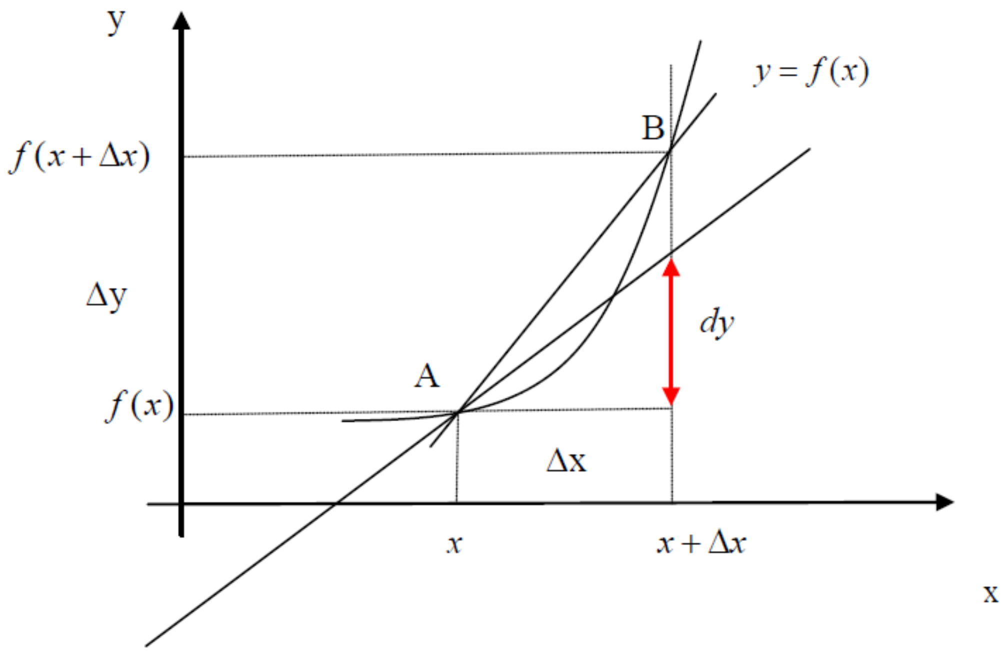
$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(x^n\right)}{dx}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=n\cdot x^{n-1}\Leftrightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{n\cdot x^{n-1}}\Leftrightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{n}\cdot x^{-n+1}.$$

Παράδειγμα: Έστω $f(x)=\sin x$, στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ η αντίστροφη της είναι $g(x)=\arcsin x$.

$$\frac{dy}{dx}=\cos x\Leftrightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos x}\Leftrightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\Leftrightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\Leftrightarrow g'\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3.4 Διαφορικό

Έστω $y=f\left(x\right)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Το διαφορικό dy της f ορίζεται να είναι: $dy=f'(x)dx$.



Σχήμα 2. Το διαφορικό dy της f.

Το διαφορικό δευτέρας τάξης : $d^2y=d\left(df(x)\right)=f'(x)dx^2$ κ.ο.κ..

Παράδειγμα: Να βρεθεί το διαφορικό της $y=2x^2+x$.

$$\frac{dy}{dx} = 4x+1 \Rightarrow dy = (4x+1)\,dx.$$

- Αν το x μεταβληθεί κατά μία μονάδα, δηλαδή αν $dx=1$, από την τιμή $x_0 = 20$, τότε $dy = (4x_0+1)dx = 81$ και $\Delta y = 2\cdot 20^2 + 20 - \left(2\cdot 21^2 + 21\right) = 83$.
- Αν το x μεταβληθεί κατά μισή μονάδα, δηλαδή αν $dx = 0.5$, από την τιμή $x_0 = 20$, τότε $dy = (4x_0+1)dx = 40.5$ και $\Delta y = 41$.

3.5 Εφαρμογές των Παραγώγων

3.5.1 Μονοτονία

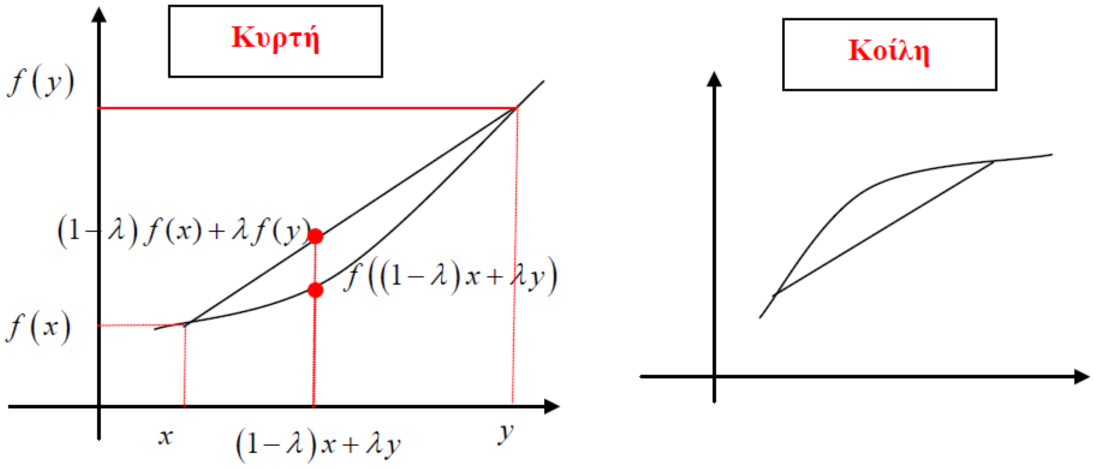
Θεώρημα:

1. Μια συνάρτηση f είναι **αύξουσα** σε ένα διάστημα I εάν $f'(x) > 0$ για όλα τα x στο I.
2. Μια συνάρτηση f είναι **φθίνουσα** σε ένα διάστημα I εάν $f'(x) < 0$ για όλα τα x στο I.

3.5.2 Κοίλη-Κυρτή, Σημεία Καμπής

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$ λέγεται **κυρτή** (convex) στο D, όταν για κάθε $x, y \in D$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, με $0 \le \lambda \le 1$ ισχύει $f\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \le (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$ λέγεται **κοίλη** (concave) στο D, όταν για κάθε $x, y \in D$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, με $0 \le \lambda \le 1$ ισχύει $f\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \ge (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.



Σχήμα 3. Γραφικές παραστάσεις κυρτής και κοίλης συνάρτησης.

Θεώρημα: Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο D και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του D.

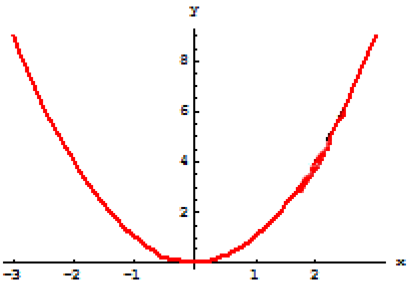
- Αν $f''(x) \ge 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του D, τότε η f είναι κυρτή στο D.
- Αν $f''(x) \le 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του D, τότε η f είναι κοίλη στο D.
- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του D, τότε η f είναι αυστηρώς κυρτή στο D.
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του D, τότε η f είναι αυστηρώς κοίλη στο D.

Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$ και x_0 εσωτερικό σημείο του D. Το σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ θα λέγεται **σημείο καμπής** (inflection point) της γραφικής παράστασης της f, αν η f είναι:

- Συνεχής στο x_0.
- Κυρτή αριστερά του x_0 και κοίλη δεξιά του x_0 (ή και αντίστροφα).
- Παραγωγίσιμη στο x_0 ή η παράγωγος στο x_0 απειρίζεται.

(Το σημείο όπου έχουμε αλλαγή πρόσημου της δεύτερης παραγώγου ονομάζεται **σημείο καμπής**).

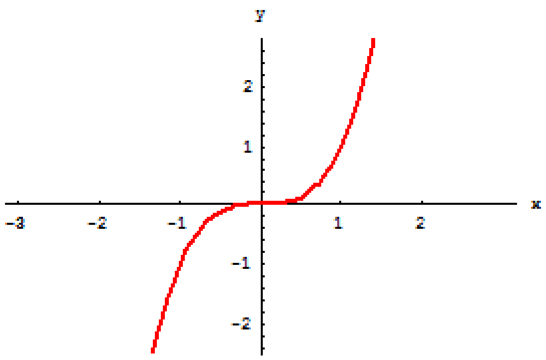
Παράδειγμα: Η $f(x) = x^2$. $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0$, άρα είναι κυρτή (κοίλη προς τα πάνω).



Σχήμα 4. Γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$.

Παράδειγμα: Η $f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f''(x) > 0$ αν $x > 0$, $f''(x) < 0$ αν $x < 0$.

- Στο 0 έχει σημείο καμπής.
- Είναι κυρτή στο $\left(0, +\infty\right)$.
- Κοίλη στο $\left(-\infty, 0\right)$.



Σχήμα 5. Γραφική παράσταση της $f(x) = x^3$.

3.5.3 Μέγιστα – Ελάχιστα

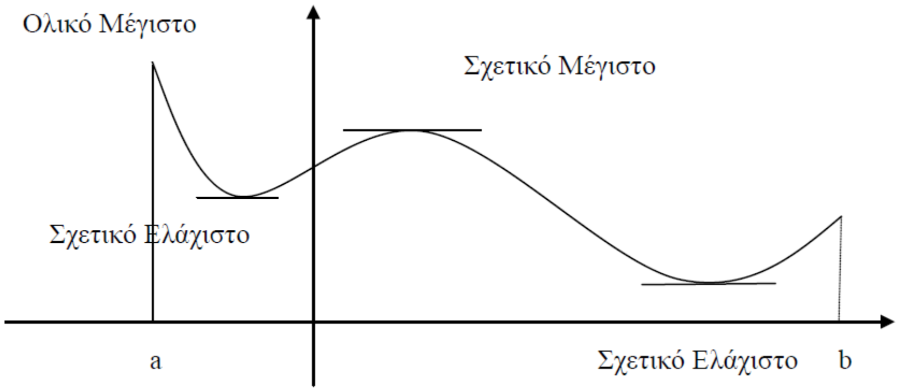
Θεώρημα: (Fermat) Αν μια συνάρτηση που ορίζεται σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$ έχει σχετικό μέγιστο ή ελάχιστο σ' ένα εσωτερικό σημείο $x = x_0$ του διαστήματος και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $f'(x_0) = 0$.

Θεώρημα: (Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου)

1. Αν $f'(x_0) = 0$ και $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, b), τότε η f έχει **σχετικό μέγιστο** στο x_0.
2. Αν $f'(x_0) = 0$ και $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, b), τότε η f έχει **σχετικό ελάχιστο** στο x_0.

Θεώρημα: (Κριτήριο Δευτέρας Παραγώγου)

1. Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$ σε ένα ανοικτό διάστημα $x_0 \in (a,b)$, τότε η f έχει σχετικό μέγιστο στο x_0.
2. Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x) > 0$ σε ένα ανοικτό διάστημα $x_0 \in (a,b)$, τότε η f έχει σχετικό ελάχιστο στο c.
3. Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x) = 0$ σε ένα ανοικτό διάστημα $x_0 \in (a,b)$, τότε δεν μπορώ να αποφανθώ.



Σχήμα 6. Μέγιστα και ελάχιστα (ολικά και σχετικά) μίας συνάρτησης.

Θεώρημα: Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό (a,b) τότε η f έχει **ολικό μέγιστο** και **ολικό ελάχιστο** στο $[a,b]$. Τα μόνα σημεία όπου η f μπορεί να έχει ολικό μέγιστο ή ελάχιστο είναι αυτά για τα οποία $f'(x) = 0$ ή τα ακραία σημεία a, b

Για να βρούμε τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης $y = f(x)$, εντοπίζουμε:

1. Τα σημεία όπου $f'(x) = 0$, **στάσιμα σημεία (stationary points)**.
2. Τα σημεία στα οποία η f' δεν υπάρχει

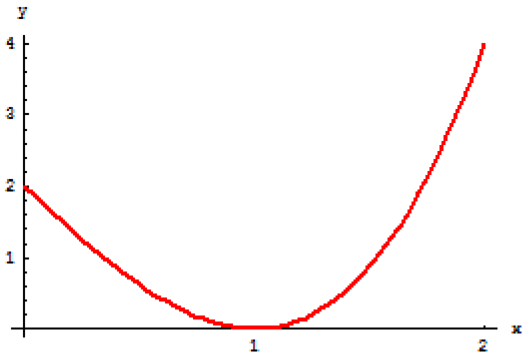
(τα σημεία των περιπτώσεων 1 και 2 ονομάζονται **κρίσιμα σημεία (critical points)**.)

3. Τα **ακραία σημεία** του πεδίου ορισμού.

Έπειτα χρησιμοποιούμε ένα δόκιμο κριτήριο και αποφαινόμαστε για το αν είναι μέγιστα ή ελάχιστα.

Παράδειγμα: Βρείτε το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης $f(x)=x^3-3x+2$ όταν $0\le x\le 2$.

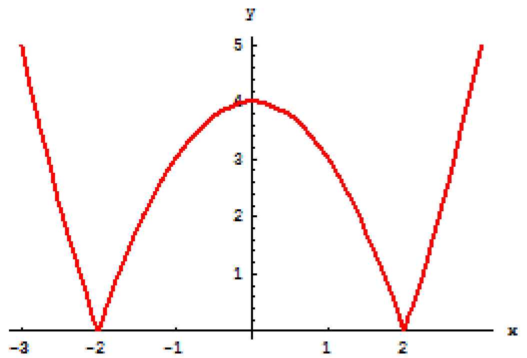
Ολικό μέγιστο έχουμε για $x=2$, $f(2)=4$, ενώ ολικό ελάχιστο έχουμε για $x=1$, $f(1)=0$.



Σχήμα 7. Γραφική παράσταση της $f(x)=x^3-3x+2$.

Παράδειγμα: Βρείτε το σχετικό και ολικό μέγιστο και το σχετικό και ολικό ελάχιστο της συνάρτησης $f(x)=\left|4-x^2\right|$ όταν $-3\le x\le 3$.

Ολικό ελάχιστο έχουμε για $x=-2$ και $x=2$, $f(-2)=f(2)=0$, ενώ ολικό μέγιστο έχουμε για $x=-3$ και $x=3$, $f(-3)=f(3)=5$ και σχετικό μέγιστο έχουμε για $x=0$, $f(0)=4$.



Σχήμα 8. Γραφική παράσταση της $f(x)=\left|4-x^2\right|$.

Πρόβλημα:

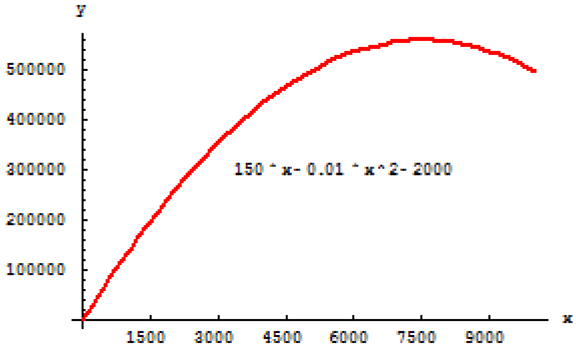
Ένας παραγωγός μπορεί να πουλήσει έναν αριθμό προϊόντων x την εβδομάδα στην τιμή $P=200-0.01x$, ενώ το κόστος για την παραγωγή του αριθμού x είναι $y=50x+2000$. Πόσα προϊόντα πρέπει να παράγει για να κερδίσει;

Τα συνολικά έσοδα σε μία εβδομάδα θα είναι $x\cdot P=200x-0.01x^2$.

Κέρδος= έσοδα-έξοδα, άρα $T=xP-y=150x-0.01x^2-20000$ και θέλω να βρω το μέγιστο της συνάρτησης Τ.

$\frac{dT}{dx}=150-0.02x$, άρα θέτω $\frac{dT}{dx}=0 \Rightarrow 150-0.02x=0 \Rightarrow x=7500$ είναι ένα κρίσιμο σημείο.

$\frac{d^2T}{dx^2}=-0.02<0$, άρα έχω μέγιστο, οπότε αν παράγει 7500 προϊόντα θα έχει το μέγιστο κέρδος, το οποίο ανέρχεται σε 560500 νομισματικές μονάδες.



Σχήμα 9. Γραφική παράσταση της συνάρτησης κέρδους.

3.6 Προσέγγιση Συνάρτησης

Θεώρημα: (Taylor) Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και υπάρχουν οι παράγωγοι μέχρι (n) – τάξεως και $x_0\in[a,b]$, τότε ισχύει: $f(x)=p(x)+R_n(x)$, όπου

$$p(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}.$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!}(x-x_0)^n,\text{ με } \xi=\xi(x)\in(x_0,x).$$

Το $p_n(x)$ καλείται πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο x_0 (n-1)-τάξης και το $R_n(x)$ υπόλοιπο n-τάξης.

Γραμμική προσέγγιση: $f(x)\approx f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)$.

Δευτεροβάθμια Προσέγγιση: $f(x)\approx f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$.

Παράδειγμα: Να βρεθούν η γραμμική προσέγγιση και η δευτεροβάθμια προσέγγιση της συνάρτησης $f(x)=e^x$.

Λύση:

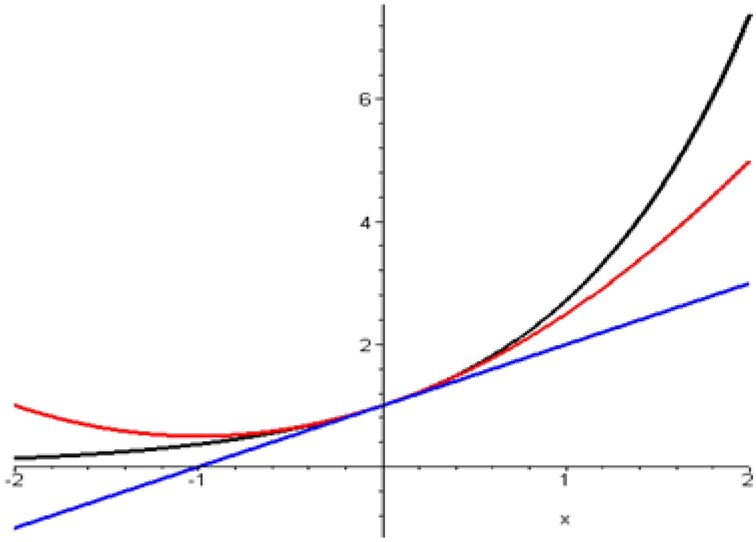
Γραμμική προσέγγιση με κέντρο το 0, $f(x)\approx f(0)+f^{'}(0)(x-0)=e^0+e^0x=1+x$ και άρα αν θέλω την τιμή $f(1)\approx=1+1=2$ (καλή προσεγγιστική τιμή είναι 2.71828), ενώ αν θέλω την τιμή στο $f(0.2)\approx=1+0.2=1.2$ (καλή προσεγγιστική τιμή είναι 1.2214)

Δευτεροβάθμια προσέγγιση με κέντρο το 0,

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 = e^0 + e^0 x + \frac{e^0}{2}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

$f(1) \approx 1 + 1 + \frac{1^2}{2} = 2.5$ (καλή προσεγγιστική τιμή είναι 2.71828).

$f(0.2) \approx 1 + 0.2 + \frac{0.2^2}{2} = 1.24$ (καλή προσεγγιστική τιμή είναι 1.2214).



Σχήμα 10. Γραφική παράσταση των προσεγγίσεων της $f(x) = e^x$.

3.7 Κανόνας De l' Hospital

Θεώρημα: Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες σε ένα ανοικτό διάστημα I, και έστω $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ εκτός από το x_0.

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, τότε: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ τότε: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

3.8 Ασύμπτωτες

Ορισμός: Αν x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του D και $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε η κάθετη ευθεία $x = x_0$ ονομάζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη**.

Ορισμός: Αν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, (αντίστοιχα $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$) τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράσταση της f στο $+\infty$. (αντίστοιχα στο $-\infty$).

Ορισμός: Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **πλάγια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$), αν και μόνο αν $\lambda=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in\mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις:

1. Οι πολυωνυμικές βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
2. Οι ρητές συναρτήσεις με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο κατά δύο τουλάχιστον μονάδες του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.
3. Αναζητώ ασύμπτωτες στα άκρα των διαστημάτων του Πεδίου Ορισμού στα οποία η f δεν ορίζεται.
   3.1. Στα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
   3.2. Στο $+\infty$, $-\infty$.

4. Εφαρμογές στα οικονομικά

4.1 Σημείο Ισορροπίας

Έστω $q_D = D(p)$ η **συνάρτηση ζήτησης** και $q_S = S(p)$ η **συνάρτηση προσφοράς** ενός αγαθού.

Το σημείο στο οποίο ισχύει $q_S = q_D$ ονομάζεται **σημείο ισορροπίας της αγοράς** (market equilibrium).

Η $z(p) = D(p) - S(p)$ είναι η **συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης** και εκφράζει την ποσότητα κατά την οποία η ζήτηση υπερβαίνει την προσφορά.

4.2 Γενικά περί συναρτήσεων στα οικονομικά

Αν η συνάρτηση $y = f(x)$ εκφράζει την σχέση δύο μεγεθών, τότε:

- Η $f(x)$ ονομάζεται **συνολική συνάρτηση** (total function).
- Η $\frac{dy}{dx}$ ονομάζεται **οριακή συνάρτηση** (marginal function) (εφόσον η είναι παραγωγίσιμη).
- Η $\frac{f(x)}{x}$ ονομάζεται **μέση συνάρτηση** (average function) και εκφράζει την $f(x)$ ανά μονάδα του x.

4.2.1 Καμπύλες Κόστους

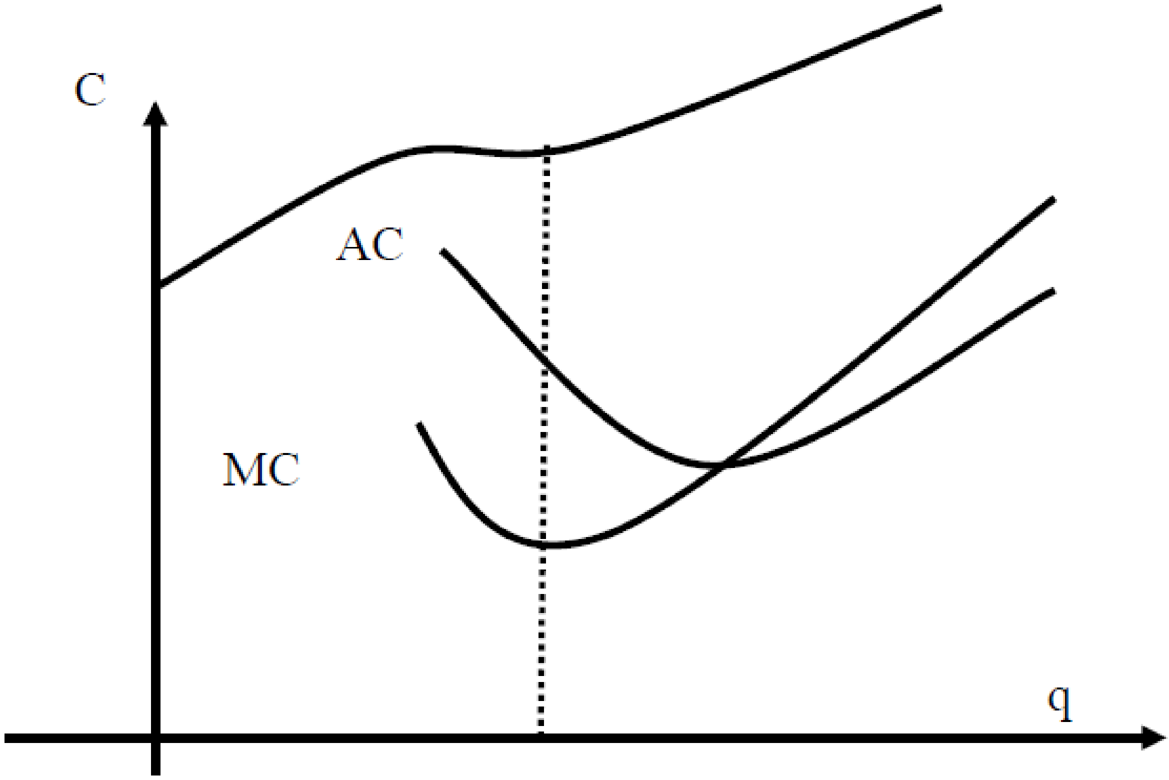
Έστω ότι έχουμε μια καμπύλη συνολικού κόστους $TC(q)$ όπου q είναι η ποσότητα παραγωγής, τότε:

- **Οριακό κόστος** (Marginal Cost- MC): $MC(q) = \frac{dTC(q)}{dq}$. Εκφράζει την μεταβολή του κόστους που οφείλετε στην μικρή μεταβολή (κατά μία μονάδα) της παραγόμενης ποσότητας.
- **Μέσο κόστος** (Average Cost- AC): $AC(q) = \frac{TC(q)}{q}$. Εκφράζει το κόστος ανά μονάδα προϊόντος.
- Η κλίση της καμπύλης του μέσου κόστους AC θα είναι: $\frac{d}{dq}\left(AC(q)\right) = \frac{\frac{d}{dq}TC(q)\cdot q - TC(q)}{q^2}$

$$= \frac{\frac{d}{dq}TC(q)}{q} - \frac{TC(q)}{q^2} = \frac{MC(q)}{q} - \frac{TC(q)}{q^2} = \frac{1}{q}\cdot\left(MC(q) - AC(q)\right)$$

  - Αν $MC(q) > AC(q)$, τότε $\frac{d}{dq}\left(AC(q)\right) > 0$, δηλαδή είναι γνησίως αύξουσα.
  - Αν $MC(q) < AC(q)$, τότε $\frac{d}{dq}\left(AC(q)\right) < 0$, δηλαδή είναι γνησίως φθίνουσα.

- Αν $MC\left(q^*\right)=AC\left(q^*\right)$, τότε $\frac{d}{dq}\left(AC\left(q^*\right)\right)=0$, και το μέσο κόστος έχει πιθανό ακρότατα στο q^* (το μέσο κόστος γίνεται ελάχιστο όταν το μέσο κόστος ισούται με το οριακό κόστος).
- Από την οικονομική θεωρία η $TC\left(q\right)$ είναι γνήσια αύξουσα $\frac{dTC(q)}{dq}>0 \Leftrightarrow MC(q)>0$, το κόστος αρχικά αυξάνει με φθίνοντα ρυθμό και στην συνέχεια με αύξοντα



Σχήμα 11. Γραφική παράσταση κόστους, μέσου κόστους και οριακού κόστους.

Παράδειγμα:

$TC=q^3+3q^2+6q$.

Τότε το μέσο κόστος είναι: $AC\left(q\right)=\frac{TC\left(q\right)}{q}=\frac{q^3+3q^2+6q}{q}=q^2+3q+6$.

Το οριακό κόστος $MC(q)=\frac{dTC(q)}{dq}=3q^2+6q+6$.

Αν $q=10$, τότε $TC\left(10\right)=1360$, $AC\left(10=136\right)$ και $MC(10)=366$.

4.2.2 Καμπύλες Εσόδων

Έστω ότι έχουμε μια καμπύλη **συνολικών εσόδων** (Total Revenue) $TR(q)$:

- **Οριακό έσοδο** (Marginal Revenue- MR): $MR(q) = \frac{dTR(q)}{dq}$. Εκφράζει την μεταβολή των εσόδων που οφείλετε στην μικρή μεταβολή (κατά μία μονάδα) της παραγόμενης ποσότητας.
- **Μέσο έσοδο** (Average Revenue- AR): $AR(q) = \frac{TR(q)}{q}$. Εκφράζει το έσοδο ανά μονάδα προϊόντος.

4.2.3 Ελαστικότητες

Η **ελαστικότητα (Elasticity)** «της y ως προς x» ορίζεται ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής της y προς την ποσοστιαία μεταβολή του x.

$$\varepsilon = -\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}.$$

Η ελαστικότητα μετρά την ποσοστιαία μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής η οποία προκύπτει από μια μεταβολή της ανεξάρτητης κατά 1%.

Αν η μεταβολή είναι απειροελάχιστα μικρή τότε, $\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$.

4.2.3.1 Ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή – p (Price elasticity of demand)

Έστω p η τιμή και q ποσότητα. Η καμπύλη ζήτησης θα είναι: $q = D(p)$.

$\varepsilon_d = -\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q}$ ή $\varepsilon_d = -\frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$.

- Όταν $|\varepsilon_d| \to \infty$, η ζήτηση είναι **τελείως ελαστική** (perfectly elastic).
- Όταν $|\varepsilon_d| > 1$, η ζήτηση είναι **ελαστική** (elastic).
  Αν η τιμή του μεταβληθεί κατά ένα ποσοστό, τότε η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται κατά ένα **μεγαλύτερο** πόσο προς την αντίθετη διεύθυνση.
- Όταν $|\varepsilon_d| = 1$, η ζήτηση έχεις **μοναδιαία ελαστικότητα** (unit elasticity).
  Αν η τιμή του μεταβληθεί κατά ένα ποσοστό, τότε η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται κατά το **ίδιο** ποσοστό προς την αντίθετη διεύθυνση.
- Όταν $0 < |\varepsilon_d| < 1$, η ζήτηση είναι **ανελαστική** (inelastic).
  Αν η τιμή του μεταβληθεί κατά ένα ποσοστό, τότε η ζητούμενη ποσότητα μεταβάλλεται κατά ένα **μικρότερο** πόσο προς την αντίθετη διεύθυνση.
- Όταν $|\varepsilon_d| = 0$, η ζήτηση είναι **τελείως ανελαστική** (perfect inelastic).

Όταν η ζήτηση είναι ανελαστική ($0<|\varepsilon_d|<1$), τότε:

- αν p $\nearrow$ τότε το TR $\nearrow$.
- αν p $\searrow$ τότε το TR $\searrow$.

Όταν η ζήτηση είναι ελαστική ($|\varepsilon_d|>1$) , τότε:

- αν p $\nearrow$ τότε το TR $\searrow$.
- αν p $\searrow$ τότε το TR $\nearrow$.

Σχέση ελαστικότητας ζήτησης και συνολικών εσόδων.

$$MR(q)=\frac{dTR(q)}{dq}=\frac{d}{dq}(q\cdot p)=\frac{d}{dq}(q)\cdot p+q\cdot\frac{d}{dq}(p)=p+q\cdot\frac{d}{dq}(p)=p\left(1+\frac{d}{dq}(p)\cdot\frac{q}{p}\right)=p\left(1-\frac{1}{\varepsilon_d}\right).$$

Άρα, $MR(q)=p\left(1-\frac{1}{\varepsilon_d}\right)$.

Ελαστικότητα με χρήση διαφορικών και λογαρίθμων.

Με χρήση του κανόνα της αλυσίδας μπορούμε να γράψουμε $\frac{d\ln q}{dp}=\frac{d\ln q}{dq}\frac{dq}{dp}=\frac{1}{q}\frac{dq}{dp}$ και $\frac{d\ln p}{dp}=\frac{1}{p}$, έτσι $\varepsilon_d=-\frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q}=-\frac{d(\ln q)}{d(\ln p)}$.

Παράδειγμα:

Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης για μήλα είναι: $q(p)=10-4p$, όπου το q μετριέται σε kg και το p σε λεπτά του ευρώ.

Έχουμε: $\frac{dq}{dp}=-4$, άρα η ζήτηση για μήλα μειώνεται κατά 4 kg για κάθε λεπτό αύξησης στην τιμή p ή η ζήτηση για μήλα αυξάνεται κατά 4 kg για κάθε λεπτό μείωσης στην τιμή p.

Αν η τιμές μετριόνταν σε ευρώ, τότε η ζήτηση για μήλα μειώνεται κατά 4 kg για κάθε 1 ευρώ αύξησης στην τιμή p ή η ζήτηση για μήλα αυξάνεται κατά 4 kg για κάθε 1 ευρώ μείωσης στην τιμή p.

Η ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή είναι: $\varepsilon_d=-\frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q}=4\frac{p}{q}$.

- Για p=1, q=8, έχουμε $\varepsilon_d=0.5\%$, που σημαίνει ότι αν η τιμή αυξηθεί κατά 1% τότε η ζητούμενη ποσότητα μειώνεται κατά 0,5% (ανελαστική) (ανεξάρτητη από τις μονάδες μέτρησης). Συνεπώς, αύξηση 1% του λεπτού (δηλαδή από 1 ευρώ σε 1,01 ευρώ) θα επιφέρει μείωση στην ζήτηση κατά $\varepsilon_d\cdot Q=0.005\cdot 8=0.04$ kg, και η ζήτηση θα είναι $8-0.04=7.96$ kg.

4.2.3.2 Ελαστικότητα της ζήτησης ως προς το εισόδημα

$\varepsilon_I = \frac{\Delta Q}{\Delta I}\cdot\frac{I}{Q}$ ή $\varepsilon_I = \frac{dQ}{dI}\cdot\frac{I}{Q}$, όπου I το εισόδημα.

- Όταν $\varepsilon_I > 0$, **κανονικά αγαθά**.
- Όταν $\varepsilon_I < 0$, **κατώτερα αγαθά**.
- Όταν $\varepsilon_I = 0$, **ουδέτερα αγαθά**.

4.2.4 Μεγιστοποίηση Κέρδους

Έστω ότι μια επιχείρηση παράγει ένα προϊόν και η συνάρτηση κόστους του είναι $C(q)$ όπου q είναι η ποσότητα παραγωγής, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και $\frac{dC}{dq} > 0$.

Θέλουμε να προσδιορίσουμε την ποσότητα q^* η οποία μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος. Έστω $TR(q)$ η συνάρτηση εσόδων, τότε η συνάρτηση κέρδους θα είναι $\pi(q) = TR(q) - C(q)$ η συνθήκη για την μεγιστοποίηση της $\pi(q)$ είναι:

$\frac{d}{dq}\pi(q) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dq}TR(q) - \frac{d}{dq}C(q) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dq}TR(q) = \frac{d}{dq}C(q) \boxed{\Leftrightarrow MR(q^*) = MC(q^*)}$ και

$\frac{d^2}{dq^2}\pi(q) < 0 \Leftrightarrow \frac{d^2}{dq^2}\left(R(q) - C(q)\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{d^2}{dq^2}R(q) < \frac{d^2}{dq^2}C(q) \Leftrightarrow \frac{d}{dq}MR(q) < \frac{d}{dq}MC(q)$.

Άρα το κέρδος μεγιστοποιείται όταν **το οριακό έσοδο είναι ίσο με το οριακό κόστος** και ο ρυθμός μεταβολής του οριακού εσόδου είναι μικρότερος από τον ρυθμό μεταβολής του οριακού κόστους.

Άσκηση:

Η επιχείρηση καθορίζει η ίδια την ποσότητα παραγωγής και την τιμή.

Έστω η συνάρτηση ζήτησης $p = 25 - 2q$ και η συνάρτηση κόστους $TC(q) = \frac{1}{3}q^3 - \frac{7}{2}q^2 + 15q + 100$.

Πότε έχω μέγιστο κέρδος;

Άσκηση:

Δεν υπάρχει δυνατότητα η επιχείρηση να επηρεάσει την τιμή του προϊόντος που παράγει και έτσι θεωρούμε την τιμή σταθερή $\overline{p}$.

Έστω η συνάρτηση κόστους $TC(q) = \frac{1}{3}q^3 - \frac{7}{2}q^2 + 15q + 100$ και $\overline{p} = 9$ χρηματικές μονάδες. Πότε έχω μέγιστο κέρδος;

Άσκηση: Έστω η συνάρτηση ζήτησης: $20q + 2p = 980$ και το μέσο κόστος $AC = \frac{14}{q} + 20$.

1. Να βρείτε το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη.
2. Να υπολογίσετε την ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα κέρδη.

Άσκηση: Έστω η συνάρτηση ζήτησης: $20q + 2p = 980$ και το ολικό κόστος είναι $TC = 12q + 3q^2 - q^3$.

1. Να βρείτε τα μέγιστα έσοδα.
2. Να βρείτε τα μέγιστα και τα ελάχιστα κέρδη.
3. Να υπολογίσετε την ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα κέρδη.

Άσκηση: Έστω η συνάρτηση ζήτησης: $q_d = 200 - 24p$ και η συνάρτηση προσφοράς $q_s = 80 + 12p$.

1. Να βρείτε το σημείο ισορροπίας.
2. Να υπολογίσετε τις ελαστικότητες ζήτησης και προσφοράς στο σημείο ισορροπίας και να ερμηνευθούν οικονομικά.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.