Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα

Ενότητα: Ορθοκανονικοποίηση, Ορίζουσες, Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής

1. Σκοποί ενότητας

Παρουσιάζονται θέματα Γραμμικής Άλγεβρας που είναι απαραίτητα για τον χρηματοοικονομικό και λογιστικό αναλυτή.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Ορθογώνιοι Πίνακες, Πίνακες με Ορθοκανονικές Στήλες, Παραλληλόγραμμοι πίνακες με ορθοκανονικές στήλες, Ορθοκανονικοποίηση Gramm – Schmidt, Ορίζουσες, Βασικές ιδιότητες της ορίζουσας, Παράγωγες ιδιότητες της ορίζουσας, Υπολογισμός της $\det(A)$: Ανάπτυξη σε συμπαράγοντες, Υπολογισμός του A^{-1}, Ορίζουσα = "Όγκος" παραλληλεπιπέδου, Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, Πώς βρίσκουμε τις ιδιοτιμές, Πώς βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα, Διαγωνιοποίηση και διαγώνια μορφή πίνακα, Διαγώνια μορφή συμμετρικών πινάκων, Φασματικό θεώρημα.

3. Ορθογώνιοι Πίνακες, Πίνακες με Ορθοκανονικές Στήλες

Έστω $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{R}^m$ με $\langle q_i, q_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$, δηλαδή τα $q_1, \dots, q_k$ έχουν μήκος 1 και είναι κάθετα μεταξύ τους. Τότε λέγονται «**ορθοκανονικά**».

Ένας $n \times n$ πίνακας Q λέγεται **ορθογώνιος** αν οι στήλες του είναι ορθοκανονικές.

$Q = [q_1 \mid q_2 \mid \dots \mid q_m]$ με $q_1, \dots, q_m$ ορθοκανονικά.

Τότε: $Q^T Q = \begin{bmatrix} \dots q_1^T \dots \\ \dots q_2^T \dots \\ \vdots \\ \dots q_m^T \dots \end{bmatrix} [q_1 \mid \dots \mid q_m] = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

Μπορεί να δείξει κανείς ότι αν $\{q_1, \dots, q_m\}$ ορθοκανονικά $\Rightarrow$ ανεξάρτητα και άρα ο Q είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ $Q^{-1} = Q^T$.

<u>Παράδειγμα:</u> Η στροφή κατά θ.

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow Q^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = Q^{-1}.$$

<u>Βασική ιδιότητα:</u> Ο μετασχηματισμός $x \mapsto Qx$ διατηρεί γωνίες και μήκη: $\|Qx\| = \|x\|$ και $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$, διότι:

$$\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^T Qy = x^T \underbrace{Q^T Qy}_{\mathrm{I}} = x^T y = \langle x, y \rangle.$$

Ενδιαφέρουσα εφαρμογή:

Για κάποιο $b \in \mathbb{R}^m$ βρες $x_1, \dots, x_m$ με $b = x_1 \cdot q_1 + \dots + x_m \cdot q_m$.

$$\text{Ψάχνω } x : Qx = b \Rightarrow x = Q^{-1} b = Q^T b = \begin{pmatrix} \langle q_1, b \rangle \\ \langle q_2, b \rangle \\ \vdots \\ \langle q_m, b \rangle \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_1 \\ \leftarrow x_2 \\ \\ \leftarrow x_m \end{matrix}.$$

Άρα $b = \underbrace{\langle q_1, b \rangle q_1}_{P_{q_1} b} + \dots + \underbrace{\langle q_m, b \rangle q_m}_{P_{q_m} b}$.

$b =$ άθροισμα των προβολών του στα q_i (μόνο όταν τα q_i είναι 1).

3.1 Παραλληλόγραμμοι πίνακες με ορθοκανονικές στήλες

$Q_{m\times n}$ με $n<m$.

$Q=\left[q_1\,|\ldots|\,q_n\right]$ με $q_i\in\mathbb{R}^m$, $q_1,\ldots,q_n$ ορθοκανονικά.

Τότε $Q^TQ=I_n$ και άρα ο Q^T είναι αριστερός αντίστροφος του Q, αλλά ο Q δεν είναι αντιστρέψιμος.

Τί είναι ο QQ^T;

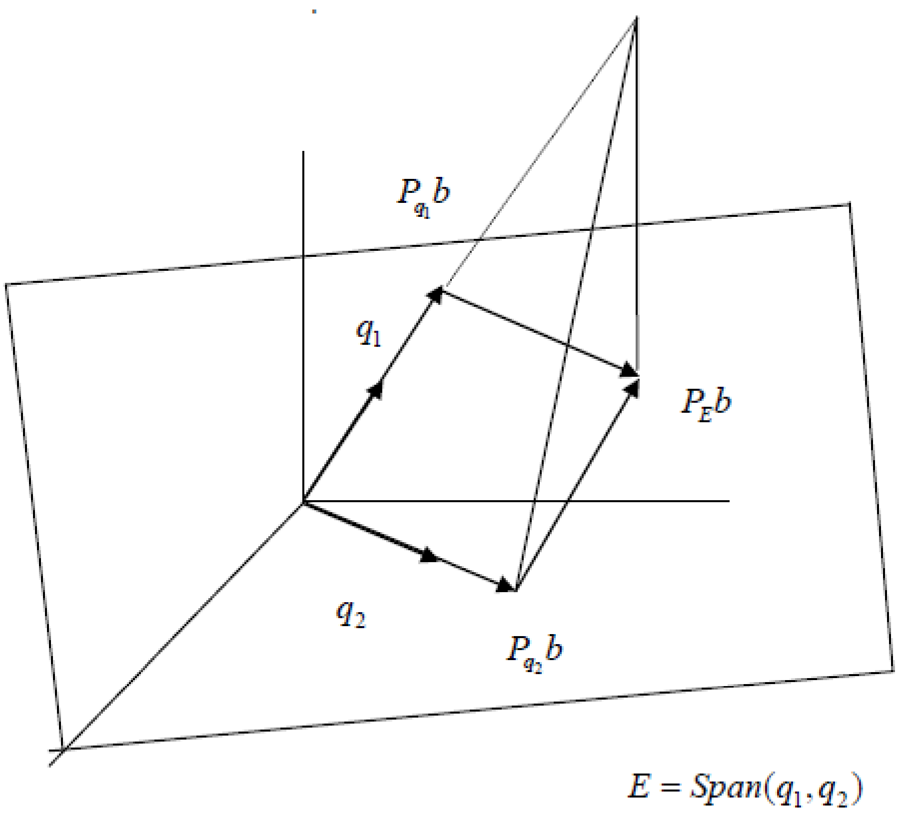
Ας υπολογίσουμε τον πίνακα προβολής P στο $Span(q_1,\ldots,q_n)$.

$P=Q(Q^TQ)^{-1}Q^T=QQ^T$.

Άρα $P_{R(Q)}b=QQ^Tb=Q\begin{pmatrix}\langle q_1,b\rangle\\ \vdots\\ \langle q_n,b\rangle\end{pmatrix}=\langle q_1,b\rangle q_1+\ldots+\langle q_n,b\rangle q_n=P_{q_1}b+\ldots+P_{q_n}b$.

(διαφορά με πριν: έχω **λιγότερα** q_i).

Παρατήρηση: Όταν τα $q_1,\ldots .q_n$ είναι ορθοκανονικά τότε η προβολή κάποιου b στο $Span(q_1,\ldots q_n)$ ταυτίζεται με το άθροισμα των προβολών του στα q_i. Αυτό δεν ισχύει αν τα q_i δεν είναι κάθετα μεταξύ τους.



Σχήμα 1. Απεικόνιση της προβολής του b στο $Span(q_1,\ldots q_n)$.

3.2 Ορθοκανονικοποίηση Gramm – Schmidt

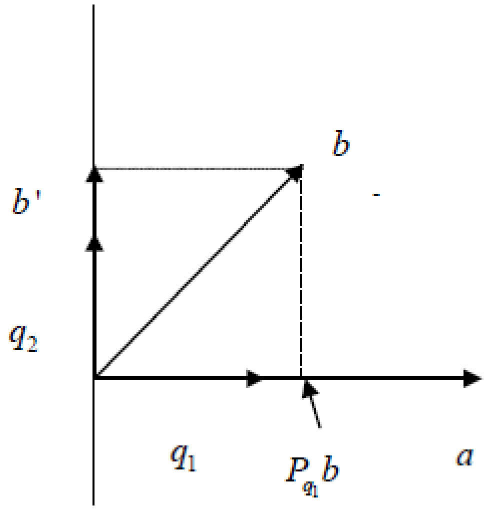
Πρόβλημα: Έχω υπόχωρο U με βάση $\{v_1,\dots,v_k\}$ και θέλω ορθοκανονική βάση του U : $\{q_1,\dots,q_k\}$.

Η διαδικασία Gramm – Schmidt ορθοκανονικοποιεί τα $\{v_1,\dots,v_k\}$ και παράγει τα $\{q_1,\dots,q_k\}$.

Ας τη γνωρίσουμε στο παράδειγμα $k=3$ και $a \equiv v_1$, $b \equiv v_2$, $c \equiv v_3$.

<u>1ο βήμα:</u> Διαιρώ το a με το μήκος του για να πάρω διάνυσμα μήκους 1: $q_1 = \dfrac{a}{\|a\|} = \dfrac{a}{\sqrt{\langle a,a\rangle}}$.

<u>2ο βήμα:</u> $b' = b - P_{q_1} b = b - \langle b, q_1\rangle q_1$ και $q_2 = \dfrac{b'}{\|b'\|}$.



Σχήμα 2. Απεικόνιση του δεύτερου βήματος της ορθοκανονικοποίησης Gramm – Schmidt.

Σε κάθε βήμα αφαιρώ από το v_k την προβολή του στα προηγούμενα $q_1,\dots,q_k$ που έχω φτιάξει μέχρι εκεί. Μετά διαιρώ με το μήκος του διανύσματος που προέκυψε.

<u>3ο βήμα:</u> $c' = c - P_{q_1} c \dots - P_{q_n} c = c - \langle q_1, c\rangle c - \dots - \langle q_2, c\rangle q_2$.

$q_3 \dfrac{c'}{\|c'\|}$.

$\vdots$

Παράδειγμα:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$q_1 = \frac{a}{\| a \|} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$b' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle b, q_1 \rangle q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$q_2 = \frac{b'}{\| b' \|} = \frac{b'}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$c' = c - \langle c, q_1 \rangle q_1 - \langle c, q_2 \rangle q_2 = c - \sqrt{2} q_1 - \sqrt{2} q_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$q_3 = \frac{c'}{\| c' \|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Ορίζουσες

Ορισμός: Έστω σύνολο $S=\{1,2,...,n\}$ **μετάθεση των n στοιχείων του S** ονομάζεται κάθε διατεταγμένη n-άδα στην οποία κάθε στοιχείο του S εμφανίζεται ακριβώς μια φορά.

$\sigma=\sigma(1)\sigma(2)...\sigma(n)$.

Παράδειγμα: Εάν S = { 1, 2 , 3 }, θα έχουμε τις ακόλουθες 6 δυνατές μεταθέσεις:

(1,2,3) , (1,3,2) , (2,1,3) , (2,3,1) , (3,1,2) , (3,2,1)

Γενικά, μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει n! μεταθέσεις.

Ορισμός: Μια μετάθεση του συνόλου $S=\{1,2,...,n\}$ παρουσιάζει **αντιστροφή** εάν κάποιο στοιχείο προηγείται στην σ κάποιου μικρότερού του. (Δηλαδή αν για $i<j$ έχουμε $\sigma(i)>\sigma(j)$).

Μία μετάθεση του συνόλου S ονομάζεται **περιττή** (άρτια), εάν σε αυτή παρατηρείται περιττός (άρτιος) αριθμός αντιστροφών.

Το πρόσημο μιας μετάθεσης σ του Τ, συμβολίζεται με $\operatorname{sgn}(\sigma)$ και ορίζεται ως εξής:

$$\operatorname{sgn}(\sigma)=\begin{cases}+1, & \text{εάν η σ είναι άρτια}\\ -1, & \text{εάν η σ είναι περιττή}\end{cases}.$$

Παράδειγμα: Εάν Τ = { 1,2,3 }, στη μετάθεση (3,2,1) έχουμε 3 αντιστροφές, γιατί το σ(1)=3 προηγείται του σ(2)=2 και του σ(3)=1 και το σ(2)=2 του σ(3)=1 και άρα το πρόσημο της είναι -1.

Ορισμός: Ονομάζουμε ορίζουσα μιας $n\times n$ μήτρας $A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ τον αριθμό

$$\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{\sigma(1)1}\cdot a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n},$$

όπου το άθροισμα θεωρείται πάνω σε όλες τις μεταθέσεις $S=\{1,2,...,n\}$.

Συμβολίζεται $\det(A)$, $|A|$ ή $\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$.

Παράδειγμα: Η ορίζουσα της $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

Λύση: $|A|=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$.

Η ορίζουσα ($\det$) είναι μία συνάρτηση που απεικονίζει ένα $n \times n$ πίνακα A σε ένα πραγματικό αριθμό.

$A_{n\times n} \to \det(A) \in \mathbb{R}$.

Την απεικόνιση αυτή θέλουμε να την ορίσουμε με τρόπο που να μας δίνει ένα είδος "γενικευμένου όγκου" του πίνακα. Τι εννοούμε;

Στην περίπτωση $n = 2$, οι δύο γραμμές του πίνακα δίνουνε ένα παραλληλόγραμμο. Θέλουμε η $\det(A)$ να μας δίνει το **εμβαδόν** αυτού του παραλληλογράμμου.

Στην περίπτωση $n = 3$, οι τρείς γραμμές του πίνακα μας δίνουνε ένα παραλληλεπίπεδο. Θέλουμε η $\det(A)$ να μας δίνει τον **όγκο** αυτού του παραλληλεπιπέδου.

Για $n > 3$, θέλουμε η $\det(A)$ να μας δίνει ένα είδος "**γενικευμένου όγκου**" του n-διάστατου σχήματος που δίνουν οι γραμμές του πίνακα.

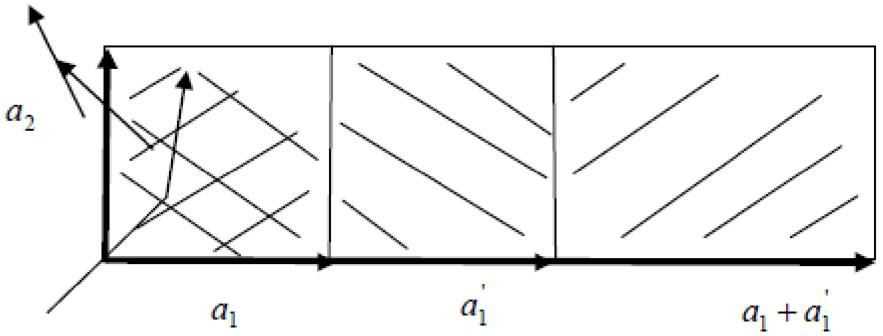
4.1 Βασικές ιδιότητες της ορίζουσας

Για να μπορεί η $\det$ να ισούται με κάτι τέτοιο, πρέπει να απαιτήσουμε από αυτήν τις εξής **"βασικές ιδιότητες**" τις οποίες **έχει ο όγκος**:

- Η $\det$ είναι γραμμική σε κάθε γραμμή του πίνακα (ξεχωριστά):

$$\det\begin{bmatrix} \underline{\alpha_1^T + \alpha_1'^T} \\ \underline{\alpha_2^T} \\ \underline{\cdots} \\ \underline{\alpha_n^T} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \cdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \alpha_1'^T \\ \alpha_2^T \\ \\ \alpha_n^T \end{bmatrix} \text{ και } \det\begin{bmatrix} \underline{\lambda \cdot \alpha_1^T} \\ \underline{\alpha_2^T} \\ \underline{\cdots} \\ \underline{\alpha_n^T} \end{bmatrix} = \lambda \cdot \det\begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \cdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix}$$

Για να σιγουρευτείτε ότι αυτές τις ιδιότητες πρέπει να τις έχει ο "όγκος" πάρτε την περίπτωση όπου $n = 2$ και $\alpha_1 \perp \alpha_2,\ \alpha_1' \perp \alpha_2$.



Σχήμα 3. Απεικόνιση του "όγκου" στην περίπτωση όπου $n = 2$ και $\alpha_1 \perp \alpha_2,\ \alpha_1' \perp \alpha_2$.

- Θέλουμε η $\det$ να δίνει ένα όγκο με “προσανατολισμό”: $\det\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}\alpha_2^T\\ \alpha_1^T\end{bmatrix}$.
- Η εναλλαγή γραμμών προκαλεί εναλλαγή προσήμου.

Ο όγκος του σχήματος που δίνεται από τα μοναδιαία διανύσματα $\begin{pmatrix}1\\0\\...\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\...\\0\end{pmatrix},...,\begin{pmatrix}0\\0\\...\\1\end{pmatrix}$ θέλουμε να ισούται με 1, άρα $\det$ (ταυτοτικού)=1. Θα δούμε ότι αυτές οι “βασικές ιδιότητες” φτάνουν για να **ορίσουν πλήρως** την $\det$.

4.2 Παράγωγες ιδιότητες της ορίζουσας

Από τις **“βασικές ιδιότητες”** μπορούμε να συμπεράνουμε μία προς μία τις εξής **“παράγωγες ιδιότητες”** (χωρίς απόδειξη):

- Αν δύο γραμμές του A είναι ίδιες τότε $\det(A) = 0$.
- Οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών (πρόσθεση πολλαπλάσιου μιας γραμμής σε μια άλλη) δεν αλλάζουν την $\det$.
- Αν ο A έχει μία μηδενική γραμμή, τότε $\det(A) = 0$.
- Αν ο A είναι τριγωνικός τότε $\det(A) =$ γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου του A.
- A ιδιόμορφος $\Leftrightarrow \det(A) = 0$.
- A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
- $\det(A) = \det(A^T)$.
- Αν $P \cdot A = L \cdot D \cdot U$ τότε $\det = \pm$ γινόμενο των οδηγών.

  Έχουμε:

  + αν ο P κάνει “ζυγές” εναλλαγές γραμμών.

  – αν ο P κάνει “μονές” εναλλαγές γραμμών.

4.3 Υπολογισμός της $\det(A)$: Ανάπτυξη σε συμπαράγοντες

Έστω M_{ij} ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας που σχηματίζεται όταν από τον A σβήσουμε ολόκληρη την $i-$ γραμμή και $j-$ στήλη.

Συμπαράγοντας A_{ij} του A ονομάζεται η $A_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την $\det(A)$ αναπτύσσοντας την κατά την $i-$ γραμμή (διαλέγουμε ένα i σταθερό): $\det(A) = \alpha_{i1} \cdot A_{i1} + \alpha_{i2} \cdot A_{i2} + ... + \alpha_{in} \cdot A_{in}$.

Παρομοίως μπορούμε να υπολογίσουμε την $\det(A)$ κατά την $j-$στήλη (για κάποιο σταθερό j).

Ο παρακάτω τύπος ανάγει το πρόβλημα του υπολογισμού της $\det$ ενός $n\times n$ πίνακα, στον υπολογισμό n $\det$ ($(n-1)\times(n-1)$ πινάκων). Συνήθως αναπτύσσουμε κατά μία γραμμή ή στήλη που έχουν πολλά μηδενικά: π.χ.

$$\det\left(\begin{array}{cc|cc} \underline{0} & \underline{2} & \underline{0} & \underline{0} \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \end{array}\right) \underbrace{=}_{1} -2\cdot\det\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \underline{2} & \underline{3} & \underline{1} \end{array}\right) \underbrace{=}_{2} -2\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 .$$

1. Κατά πρώτη γραμμή.
2. Κατά τελευταία στήλη.

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\cdot\det(d) - b\cdot\det(c) = a\cdot d - b\cdot c .$$

4.4 Υπολογισμός του A^{-1}

Αποδεικνύεται ότι :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\cdot\det\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & .. & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ (Προσοχή: Αλλαγή γραμμών & στηλών του A_{ij}). Εδώ χρειαζόμαστε υπολογισμό ($1\times\det(n\times n)$, $n^2\times\det((n-1)\times(n-1))$,...).

π.χ. $n=2$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a\cdot d - c\cdot b}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

4.5 Ορίζουσα = "Όγκος" παραλληλεπιπέδου

Ορίσαμε την ορίζουσα απαιτώντας να ικανοποιεί τις τρείς βασικές ιδιότητες, "ελπίζοντας" να φτιάξουμε μια συνάρτηση που να δίνει τον όγκο. Εδώ θα δούμε ότι αυτό πράγματι επιτεύχθηκε.

Έστω A ο πίνακας με γραμμές $a^1,\dots,a^n$ και έστω $P(a^1,\dots,a^n)$ ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που δίνεται από τα $a^1,\dots,a^n$. Θα δείξουμε ό,τι $|\det(A)| := P(a^1,\dots,a^n)$.

Θέτουμε $l_i := \|a^i\|$:

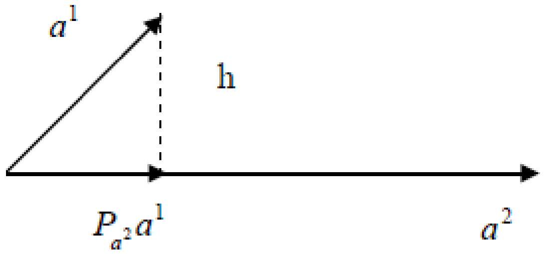
Τα $a^1,...,a^n$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Τότε $P\left(a^1,...,a^n\right)=l_1\cdot l_2\cdot...\cdot l_n$. Επιπλέον

$A\cdot A^T=\begin{pmatrix} l_1^2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & l_n^2 \end{pmatrix}$ και $\det\left(A\cdot A^T\right)=l_1^2\cdot...\cdot l_n^2$. Τότε $\left|\det(A)\right|=\sqrt{\det\left(A\cdot A^T\right)}=l_1\cdot...\cdot l_n=P\left(a^1,...,a^n\right)$.

Όχι ορθογώνια μεταξύ τους, $n=2$.

$P\left(a^1,a^2\right)=\left\|a^2\right\|\cdot h=P\left(a^2,a^1-P_{a^2}\left(a^1\right)\right)$ και $\det(A)\cdot\det\begin{pmatrix} a^{1T} \\ a^{2T}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} a^1-\lambda\cdot a^2 \\ a^{2T}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} a^1-P_{a^2}\left(a^1\right)^T \\ a^{2T}\end{pmatrix}$.

Από την πρώτη περίπτωση έχουμε ότι το τελευταίο ισούται με $P\left(a^2,a^1-P_{a^2}\left(a^1\right)\right)$ που πριν είδαμε ότι ισούται με $P\left(a^1,a^2\right)$. Άρα συνολικά $\det(A)=P\left(a^1,a^2\right)$.



Σχήμα 4. Απεικόνιση των α_1, α_2 και $P_{a^2}a^1$.

Όχι ορθογώνια, οποιοδήποτε n.

Όπως στη δεύτερη περίπτωση φαίνεται ότι ούτε η $P(...)$ ούτε η $\det(...)$ αλλάζουν αν **διαδοχικά** από κάθε γραμμή αφαιρούμε την προβολή της στις προηγούμενες γραμμές. Αυτό όμως είναι η διαδικασία Gramm-Schmidt που μας φέρνει στην ορθογώνια περίπτωση δηλαδή την πρώτη.

5. Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε κυρίως με μετασχηματισμούς γραμμών $A \to U$, απλοποιήσεις δηλαδή που αφήνουν αναλλοίωτο το **μηδενόχωρο** του A, εκείνα δηλαδή τα x που στην $x \to A \cdot x$ απεικονίζονται στο 0.

Στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε πιο πολύ με την "εικόνα" της $x \to A \cdot x$: **Τι απεικονίζεται που**; Ιδιαίτερα μας ενδιαφέρει το ερώτημα: Υπάρχουν x τέτοια ώστε το x και το $A \cdot x$ να είναι συγγραμμικά; Αυτό θα αποδειχτεί κλειδί και μας οδηγεί στις Ιδιοτιμές και τα Ιδιοδιανύσματα.

Ψάχνουμε λοιπόν ζευγάρια $\lambda, x \neq 0$ τέτοια ώστε (μπορεί $\lambda = 0$): $A \cdot x = \lambda \cdot x$.

Οι τιμές του λ που έχουν αυτή την ιδιότητα λέγονται "**Ιδιοτιμές** του A" και τα αντίστοιχα x λέγονται "**Ιδιοδιανύσματα** του A στις ιδιοτιμές $\lambda = ...$".

Παράδειγμα:

Αν D διαγώνιος = $\begin{pmatrix} d_1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & d_n \end{pmatrix}$ τότε $D \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \leftarrow j \text{ position} \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_j} = d_j \cdot e_j$ άρα ο D έχει ιδιοτιμές τα

$d_1, ..., d_n$ και σε κάθε d_j το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το $e_j = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \leftarrow j \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_j}$.

Ορισμός: Ένας αριθμός $\lambda \in \mathrm{K} = (\mathbb{C} \ \eta \ \mathbb{R})$ ονομάζεται **ιδιοτιμή της μήτρας Α**, αν υπάρχει διάνυσμα στήλη Χ με:

$A \cdot X = \lambda \cdot X$ **.**

Κάθε $X \neq \bigcirc$ ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα της μήτρας Α** που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Ισοδύναμα έχουμε $(A - \lambda \cdot I) \cdot X = \bigcirc$ όπου Ι είναι η $n \times n$ μοναδιαία μήτρα.

Ορισμός: Έστω $A \in M_n$ ονομάζουμε **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** της μήτρας Α, το πολυώνυμο $p_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I|$.

Η εξίσωση $p_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow |A-\lambda\cdot I| = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση της μήτρας A**.

Ορισμός: Το σύνολο τον ιδιοτιμών μιας μήτρας ονομάζεται **φάσμα** της μήτρας και συμβολίζεται $\sigma(A)$.

Ορισμός: Η ποσότητα $\rho(\mathrm{A}) = \max\{|\lambda_i|\}$ ονομάζεται **φασματική ακτίνα** της A.

Παρατηρήσεις:

- Αν $\lambda_i > 0$ για κάθε i, τότε η μήτρα A είναι **θετικά ορισμένη.**
- Αν $\lambda_i > 0$ για κάθε i, τότε η μήτρα A είναι **θετικά ορισμένη.**
- Αν $\lambda_i \geq 0$ για κάθε i, τότε η μήτρα A είναι **θετικά ημι-ορισμένη.**
- Αν $\lambda_i \geq 0$ για κάθε i, τότε η μήτρα A είναι **θετικά ημι-ορισμένη.**
- Αν μερικές $\lambda_i > 0$ ενώ μερικές $\lambda_i < 0$, τότε η μήτρα A είναι **απροσδιόριστη.**

Πρόταση: Έστω $A \in M_n$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του, τότε ισχύει:

1. $trA = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ (ίχνος της μήτρας A).
2. $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

Ορισμός: Έστω $A \in M_n$ θα λέμε ότι η μήτρα A είναι **όμοια** με τη μήτρα $B \in M_n$ ($A \sim B$) αν υπάρχει ομαλός πίνακας P ($|P| \neq 0$) τέτοιος ώστε $B = P^{-1}AP$.

5.1 Πώς βρίσκουμε τις ιδιοτιμές;

Έστω λ_0 ιδιοτιμή του A $\Leftrightarrow$ $\exists x \neq 0$: $A \cdot x = \lambda_o \cdot x$ $\Leftrightarrow \exists x \neq 0$: $(A - \lambda_o \cdot I) \cdot x = 0$.

$\Leftrightarrow$ Ο μηδενόχωρος του $A - \lambda_o \cdot I$ δεν είναι μόνο το μηδενικό στοιχείο.

$\Leftrightarrow$ Ο πίνακας $A - \lambda_o \cdot I$ είναι ιδιόμορφος $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda_o \cdot I) = 0$.

Επομένως: Ιδιοτιμές του A είναι εκείνα τα λ που λύνουν την εξίσωση $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$.

Το $\det(A - \lambda \cdot I)$ είναι ένα πολυώνυμο n-στου βαθμού στο λ και λέγεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**. $\det(A - \lambda \cdot I) = C_n \cdot \lambda^n + C_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + C_0$.

Π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\det(A - \lambda \cdot I) = (a-\lambda) \cdot (d-\lambda) - b \cdot c = \lambda^2 - (a+d) \cdot \lambda + a \cdot d - b \cdot c.$$

Για να βρούμε λοιπόν τις ιδιοτιμές ενός πίνακα, υπολογίζουμε την $\det(A - \lambda \cdot I)$ και βρίσκουμε τις λύσεις της $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$, δηλαδή τις ρίζες του πολυωνύμου.

Η Άλγεβρα μας διδάσκει ότι ένα πολυώνυμο n-στου βαθμού έχει πάντα ακριβώς n ρίζες : $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (**ενδεχομένως μιγαδικές**). Κάποιες από αυτές μπορεί να είναι διπλές, τριπλές κλπ ρίζες. Έστω λοιπόν ότι έχουμε ρίζες $\lambda_i, i = 1, \ldots, r$ (διαφορετικές μεταξύ τους) η κάθε μια με πολλαπλότητα k_i, με $k_1 + \ldots + k_r = n$. Τότε η άλγεβρα μας διδάσκει ότι μπορούμε να γράψουμε το πολυώνυμο ως $\det(A - \lambda \cdot I) = C_n \cdot (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$.

Τα k_i ονομάζονται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_i.

5.2 Πώς βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα;

Έστω λ_0 ιδιοτιμή του A.

Παρατήρηση:

Αν υπάρχουν δύο ιδιοδιανύσματα x_1, x_2 στο λ_0 τότε:
$A \cdot (x_1 + x_2) = A \cdot x_1 + A \cdot x_2 = \lambda_0 \cdot x_1 + \lambda_0 \cdot x_2 = \lambda_0 \cdot (x_1 + x_2)$ και το $(x_1 + x_2)$ είναι ιδιοδιάνυσμα της λ_0.
Παρομοίως με πολλαπλάσια. Άρα:

Τα Ιδιοδιανύσματα μιας ιδιοτιμής λ_0 είναι υπόχωρος, τον οποίο ονομάζουμε **Ιδιόχωρο** της λ_0. Η διάσταση αυτού του ιδιόχωρου λέγεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της λ_0.

Έχουμε: $x \in$ Ιδιόχωρο της $\lambda_0 \Leftrightarrow A \cdot x - \lambda_0 \cdot x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda_0 \cdot I) \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \in \aleph(A - \lambda_0 \cdot I)$.

Επομένως: Ιδιόχωρος της $\lambda_0 = \aleph(A - \lambda_0 \cdot I)$.

Για να τον βρούμε λοιπόν σχηματίζουμε τον $A - \lambda_0 \cdot I$ και βρίσκουμε βάση του μηδενόχωρου του, δηλαδή κάνουμε Αλγόριθμο Gauss,…,ελεύθερες / βασικές μεταβλητές.

Προσοχή: Αν δε βρούμε ελεύθερες μεταβλητές, τότε το λ_0 που πήραμε δεν είναι ιδιοτιμή ή κάναμε λάθος στις πράξεις.

Ορίζουμε: πλήθος ελεύθερων μεταβλητών = γεωμετρική πολλαπλότητα της $\lambda_0 \geq 1$.

Ισχύει γενικώς (χωρίς απόδειξη): Γεωμετρική πολλαπλότητα της $\lambda_i \leq$ αλγεβρική πολλαπλότητα της λ_i, για κάθε ιδιοτιμή λ_i.

Περίληψη:

Υπολόγισε $\det(A - \lambda \cdot I)$=πολυώνυμο. Βρες τις ρίζες του $\lambda_1, ..., \lambda_r$ ($r \leq n$).

Για κάθε λ_i, λύσε το σύστημα $(A - \lambda_0 \cdot I) \cdot x = 0$ για να βρεις τον Ιδιόχωρο της λ_i.

Π.χ. $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $A - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix}$.

$$\det(A - \lambda \cdot I) = (4 - \lambda) \cdot (-3 - \lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

$$\lambda_{12} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma}}{2 \cdot \alpha} = \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}.$$

Ενώ τα ιδιοδιανύσματα θα είναι:

Της –1: $A - (-1) \cdot I = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Της 2: $A - 2 \cdot I = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ενδιαφέρον θεώρημα: $A_{m \times n}$ και $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ιδιοτιμές του A. Τότε:

$\lambda_1 + ... + \lambda_n = \alpha_{11} + ... + \alpha_{nn} := tr(A) =$ίχνος$(A)$.

$\lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n = \det(A)$.

5.3 Διαγωνιοποίηση και διαγώνια μορφή πίνακα

Θεώρημα: Έστω $\mathrm{A}_{n\times n}$. Εάν ο A έχει n ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $x_1,...,x_n$ τότε $A = S\cdot\Lambda\cdot S^{-1}$,

όπου $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$, με λ_i τις ιδιοτιμές του A και $S = \left[(x_1) \quad (x_2) \quad ... \quad (x_n)\right]$ ο πίνακας που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα.

Αν ο A έχει n ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα λέγεται διαγωνιοποιήσιμος και η $A = S\cdot\Lambda\cdot S^{-1}$ λέγεται διαγώνια μορφή του.

Παρατήρηση:

Δεν έχουν όλοι οι πίνακες n ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Π.χ. Ο $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ έχει $\det(A-\lambda\cdot I) = \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2$. Έχει λοιπόν την ιδιοτιμή 3 με **αλγεβρική πολλαπλότητα 2** αλλά έχει μόνο ένα ανεξάρτητο διάνυσμα.

$(A-3\cdot I)\cdot x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot x := 0 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, άρα **γεωμετρική πολλαπλότητα** του 3 = $\dim(\aleph(A-3\cdot I)) =$ **1<2.**

Θεώρημα: Εάν ο πίνακας A έχει τις διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές $\lambda_1,...,\lambda_k$, τότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικά λ_i είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα.

Επομένως: Για να είναι **διαγωνιοποιήσιμος** ένας **πίνακας** πρέπει για κάθε ιδιοτιμή του να ισχύει: Αλγεβρική πολλαπλότητα της λ_i = Γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_i, για κάθε ιδιοτιμή λ_i, $i = 1,...,r$.

Διότι τότε θα έχουμε k_i ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα από κάθε ιδιοτιμή και εφόσον το θεώρημα διασφαλίζει ότι θα είναι και όλα μαζί ανεξάρτητα θα έχουμε συνολικά $k_1 + ... + k_r = n$ ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Για να ελέγξουμε λοιπόν αν ένας πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος πρέπει για κάθε λ_i να βρούμε τον ιδιόχωρο $\aleph(A-\lambda_i\cdot I)$ και να βεβαιωθούμε ότι η διάσταση του ισούται με την αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i.

Ειδική περίπτωση: Αν έχω n διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές και άρα $k_1 = ... = k_n = 1$**,** τότε ο πίνακας θα είναι προφανώς διαγωνιοποιήσιμος.

5.4 Διαγώνια μορφή συμμετρικών πινάκων

Παρατήρηση: Έστω $K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ο οποίος συμβολίζει μια στροφή κατά 90° όπου κανένα διάνυσμα δεν μένει ακίνητο.

$\det(K - \lambda \cdot I) = \lambda^2 + 1$ δεν έχει ιδιοτιμές $\in \mathbb{R}$ αλλά μιγαδικές $\pm i$.

$(K - i \cdot I) \cdot x = 0 \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$.

$(K + i \cdot I) \cdot x = 0 \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

Πραγματικοί πίνακες μπορεί να έχουν μιγαδικές ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα, όχι όμως οι συμμετρικοί.

Οι ιδιοτιμές/ιδιοδιανύσματα συμμετρικών πινάκων έχουν τις εξής ιδιότητες:

- Αν λ ιδιοτιμή $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ τα ιδιοδιανύσματα $\in \mathbb{R}^n$.
- Αν $\lambda \neq \mu$ ιδιοτιμές με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $x, y \Rightarrow x \perp y$.
- Αν λ ιδιοτιμή του A με αλγεβρική πολλαπλότητα$= \rho \Rightarrow$ και η γεωμετρική πολλαπλότητα $= \rho \Rightarrow$ Συμμετρικοί πίνακες είναι διαγωνιοποιήσιμοι.

5.5 Φασματικό θεώρημα

Αν A συμμετρικός $\Rightarrow$Θα υπάρχουν Λ διαγώνιος και U ορθοκανονικός τέτοιοι ώστε $A = U \cdot \Lambda \cdot U^T$.

Ο $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας των ιδιοτιμών. Ο $U = [q_1 | q_2 | \ldots | q_n]$ περιέχει τα ιδιοδιανύσματα σε αντίστοιχη σειρά.

Προσοχή: Αν θέλω να φτιάξω τον U, πρέπει για κάθε ιδιοτιμή λ_i με αλγεβρική πολλαπλότητα k_i να βρω βάση του $\aleph(A - \lambda_i \cdot I)$ (θα έχει k_i ανεξάρτητα διανύσματα) **και μετά αυτή τη βάση να την ορθοκανονικοποιήσω με Gramm-Schmidt** και αυτό για κάθε ιδιοτιμή ξεχωριστά. (Για διαφορετικές ιδιοτιμές τα ιδιοδιανύσματα είναι αυτόματα κάθετα.).

Χρήσιμη ισότητα:

$U \cdot \Lambda \cdot U^T = \lambda_1 \cdot q_1 \cdot q_1^T + \ldots + \lambda_n \cdot q_n \cdot q_n^T$.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης