Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα

Ενότητα: Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής

1. Σκοποί ενότητας

Παρουσιάζονται θέματα Γραμμικής Άλγεβρας που είναι απαραίτητα για τον χρηματοοικονομικό και λογιστικό αναλυτή.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί, Ο μετασχηματισμός $x \to Ax$, Σύνθεση συναρτήσεων, Προβολές και Προσεγγίσεις Ελαχίστων Τετραγώνων, Το πρόβλημα για n=1, για n=2, για οποιοδήποτε n, Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων.

3. Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Έστω δύο σύνολα X και Y. Μια **συνάρτηση ή απεικόνιση ή μετασχηματισμός** f του X στο Y (Γράφουμε $f : X \to Y$) είναι μια αντιστοίχηση ενός στοιχείου $y \in Y$ **για κάθε στοιχείο** $x \in X$. (Σε κάθε $x \in X$ αντιστοιχούμε μόνο ένα $y \in Y$).

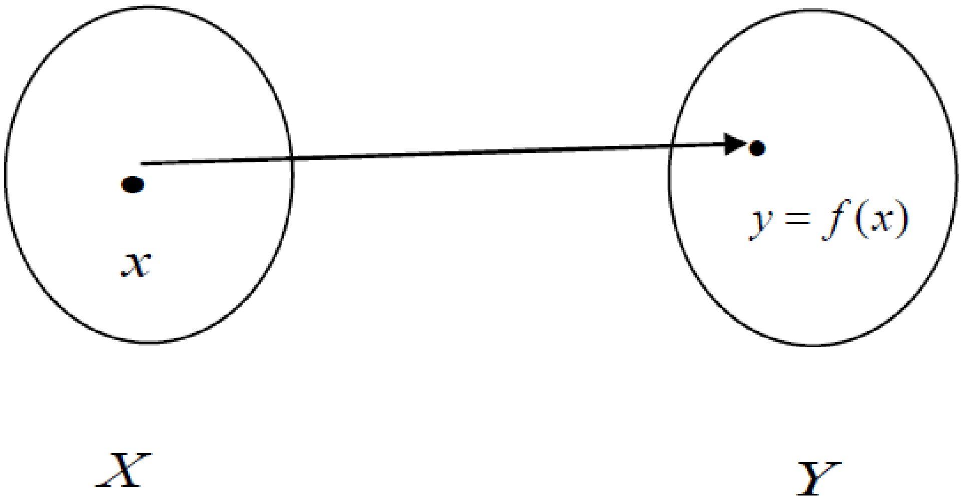
Γράφουμε:

$f : x \to y$ ή $y = f(x)$.

Το y ονομάζεται **εικόνα** του x.

Το X ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της f και το Y **πεδίο τιμών** της f.

Κάποιες φορές ζωγραφίζουμε την αντιστοίχηση με βελάκια.



Σχήμα 1. Απεικόνιση πεδίου ορισμού και πεδίου τιμών της συνάρτησης f.

Το σύνολο $f(x) = \{y \in Y \mid \exists x \in X$ με $y = f(x)\} \subset Y$ ονομάζεται **εικόνα** της f.

(Είναι τα $y \in Y$ στα οποία καταλήγει ένα τουλάχιστον βελάκι).

3.1 Ο μετασχηματισμός $x \to Ax$

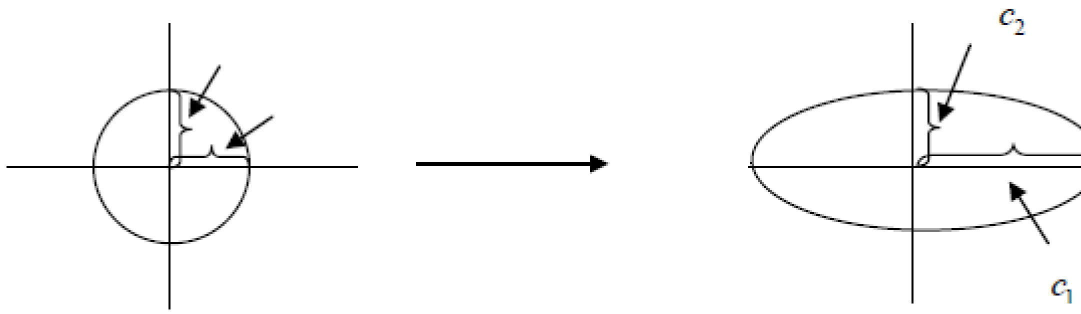
Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε μπορώ να ορίσω ένα μετασχηματισμό $f = (f_A)$, $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ως εξής: Στο $x \in \mathbb{R}^n$ αντιστοιχώ το $y = Ax \in \mathbb{R}^m$.

$$f_A : \underbrace{x}_{\mathbb{R}^n} \to y = f(x) := \underbrace{Ax}_{\mathbb{R}^m} .$$

Δηλαδή, η εικόνα του x είναι το γινόμενό του με τον A.

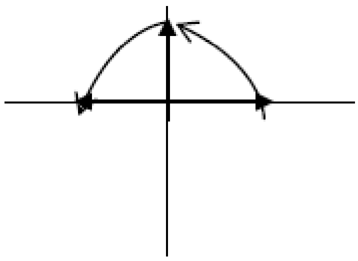
Παραδείγματα:

- $A = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x_1 \\ c_2 x_2 \end{pmatrix}$. Ο A διαστέλλει τον $\mathbb{R}^2$ κατά c_1 στην κατεύθυνση του πρώτου άξονα και κατά c_2 στην κατεύθυνση του δεύτερου.



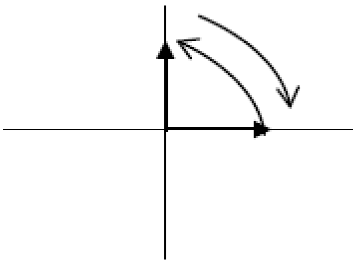
Σχήμα 2. Απεικόνιση της μεταβολής που επιφέρει ο A στον $\mathbb{R}^2$.

- $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ τότε $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ο A περιστρέφει τον $\mathbb{R}^2$ κατά 90°.



Σχήμα 3. Απεικόνιση της μεταβολής που επιφέρει ο A στον $\mathbb{R}^2$.

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ τότε $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Αντανάκλαση στην ευθεία 45°.



Σχήμα 4. Απεικόνιση της μεταβολής που επιφέρει ο A στον $\mathbb{R}^2$.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Προβολή στον άξονα των x_1.

Μια απεικόνιση $f: X \to Y$ λέγεται **«επί»** αν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ τέτοιο που $f(x) = y$, αν δηλαδή η εικόνα της f, $f(x)$ ταυτίζεται με το Y. (Καταλήγει βελάκι σε κάθε στοιχείο του Y).

Έχουμε:

Η $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι «επί» $\Leftrightarrow$ το $Ax = y$ έχει λύση για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$

$\Leftrightarrow$ ο $R(A) = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \dim\left(R(A)\right) = \dim\left(\mathbb{R}^m\right)$ $\Leftrightarrow$ $r = m$ όπου r η τάξη του πίνακα.

Άρα η f_A είναι «επί» $\Leftrightarrow$ $r = m$.

Η παραπάνω επιχειρηματολογία δείχνει και ότι:

$f_A(X) = R(A)$, δηλαδή ο $R(A)$ είναι η εικόνα της f_A.

Μια απεικόνιση $f: X \to Y$ λέγεται **«μονοσήμαντη»** αν κάθε $x \in X$ απεικονίζεται σε διαφορετικό $y \in Y$, δηλαδή, αν x και $x' \in X$ έχουν την ίδια εικόνα, πρέπει να ταυτίζονται: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. (Αν σε κάποιο $y \in Y$ καταλήγει βελάκι, θα είναι μόνο ένα).

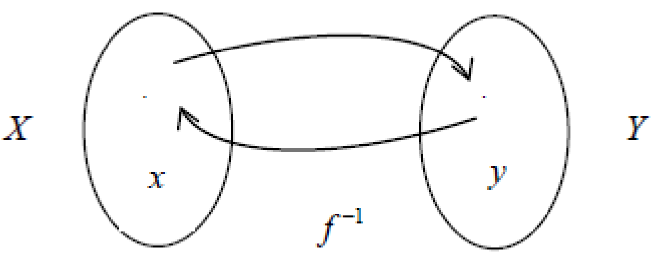
Η $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι μονοσήμαντη $\Leftrightarrow$ $x \mapsto Ax$ (από $Ax = Ax' \Rightarrow x = x'$) $\Leftrightarrow$

(από $A(x - x') = 0 \Rightarrow x - x' = 0$) $\Leftrightarrow$ δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές $\Leftrightarrow$
$N(A) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(N(A)) = 0$ $\Leftrightarrow$ $r = n$.

Άρα: η f_A είναι «μονοσήμαντη» $\Leftrightarrow$ $r = n$.

Μια απεικόνιση $f: X \to Y$ λέγεται **«αμφιμονοσήμαντη»** αν είναι «επί» και «μονοσήμαντη». Τότε μπορώ να ορίσω την αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: Y \to X$, ως εξής:

Αν $y = f(x)$ τότε $f^{-1}(y) = x$ ή $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$.



Σχήμα 5. Απεικόνιση της f^{-1}.

Για να αντιστρέφεται η f_A χρειάζομαι «επί» ($r = m$) και «μονοσήμαντη» ($r = n$). Άρα $r = m = n$ και επομένως ο A είναι αναγκαστικά μη – ιδιόμορφος.

Ερώτηση: Υπάρχει $B_{n\times n}$ τέτοιος που «να δίνει» την f_A^{-1}; **Δηλαδή,** $f_A^{-1}(y) = f_B y = B\cdot y$ που σημαίνει: Θέλω B: $B\cdot Ax = x$.

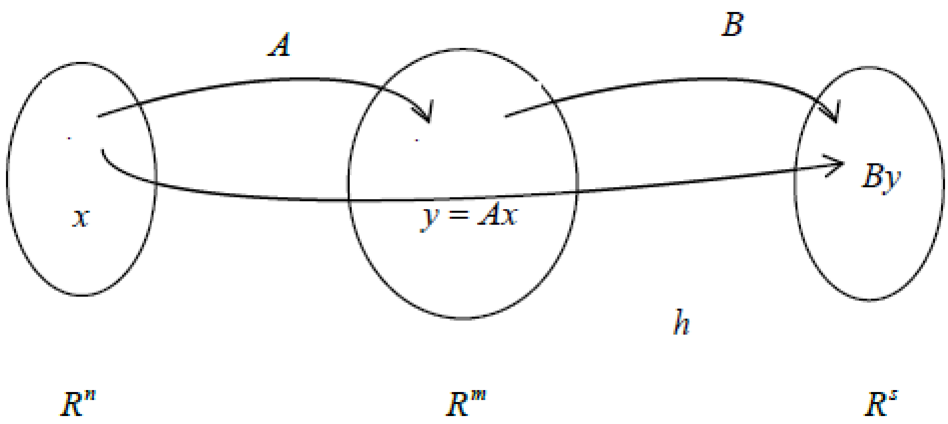
Απάντηση: ΝΑΙ $B = A^{-1}$. Η αντίστροφη συνάρτηση f_A^{-1} δίνεται από τον αντίστροφο πίνακα $f_{A^{-1}}$.

$f_A^{-1}(y) = f_A^{-1} y := A^{-1}\cdot y$ και όντως αν $y = Ax$ τότε $A^{-1}\cdot y = A^{-1}\cdot Ax = x$.

3.2 Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω $\begin{array}{c} f_A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ x \mapsto Ax \\ A_{m\times n} \end{array}$ και $\begin{array}{c} f_B:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s \\ y \mapsto By \\ B_{s\times m} \end{array}$.

Ορίζουμε την σύνθεση των συναρτήσεων f_A και f_B ως μια καινούρια συνάρτηση $h = f_B \circ f_A$ με $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ και $h(x) := f_B\left(f_A(x)\right)$.



Σχήμα 6. Απεικόνιση της σύνθεσης των συναρτήσεων.

Ποιος πίνακας «δίνει» την h; Δηλαδή, υπάρχει C τέτοιος που $h(x) = f_c(x) = C\cdot x$;

ΝΑΙ: $h(x) = f_B\left(f_A(x)\right) = f_B(A\cdot x) = B\cdot(A\cdot x)$. Άρα $C = B\cdot A$.

Η σύνθεση συναρτήσεων δίνεται από τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

<u>Ορισμός:</u> Ένας μετασχηματισμός f μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων V, W, $f:V\to W$ λέγεται γραμμικός αν:

- $f(0) = 0$.
- $f(x+y) = f(x) + f(y) \;\; \forall x,y\in V$.
- $f(\lambda x) = \lambda f(x) \;\; \forall x\in V,\; \lambda\in\mathbb{R}$.

Παρατήρηση: Για ένα $m\times n$ πίνακα A η απεικόνιση f_A είναι γραμμική:

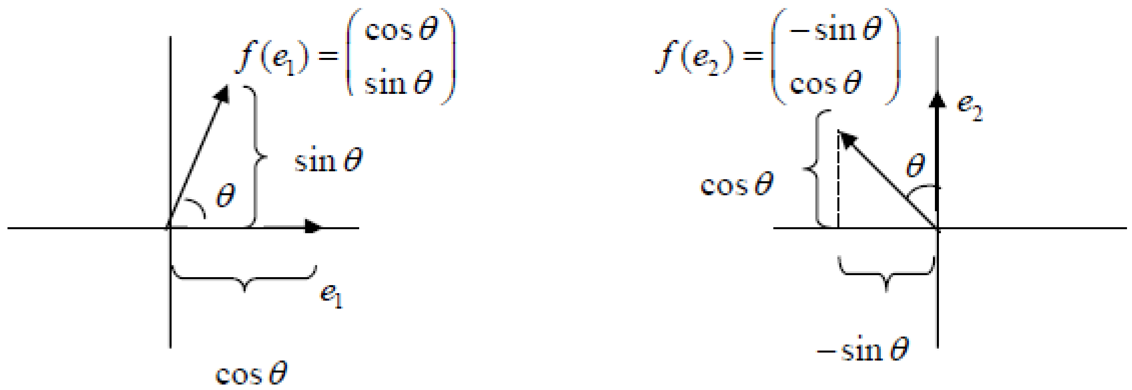
- $A\cdot 0 = 0$.
- $A(x+y) = Ax + Ay$.
- $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

Πρόταση (χωρίς απόδειξη): Έστω **οποιοσδήποτε** γραμμικός μετασχηματισμός $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τότε θα υπάρχει $A_{m\times n}$ τέτοιος που $f(x) = Ax$, δηλαδή $f \equiv f_A$.

Αν γνωρίζουμε τις εικόνες $y_i = f(e_i)$ των στοιχείων της κανονικής βάσης $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - i$ τότε **ο πίνακας A κατασκευάζεται ως** $A = \left[y_1 | y_2 | \ldots | y_n \right]$.

(Κάθε γραμμικό μετασχηματισμό «τον δίνει» ένας πίνακας).

Παράδειγμα: Η απεικόνιση f «στροφή κατά γωνία θ».



Σχήμα 7. Απεικόνιση της συνάρτησης f «στροφή κατά γωνία θ».

Άρα $A = \left[f(e_1) | f(e_2) \right] = \left[\begin{array}{c|c} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right]$ και η απεικόνιση προβολή στην L_a, $P_a(x) = \dfrac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle}\cdot a$.

$$f(e_1) = \frac{\langle a, e_1\rangle}{\langle a, a\rangle}\cdot a = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1^{\,2}}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}} \\ \dfrac{a_1 a_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}} \end{pmatrix} \text{ και } f(e_2) = \frac{\langle a, e_2\rangle}{\langle a, a\rangle}\cdot a = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1 a_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}} \\ \dfrac{a_2^{\,2}}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}} \end{pmatrix}.$$

Άρα $A = \dfrac{1}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}}\begin{bmatrix} a_1^{\,2} & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^{\,2} \end{bmatrix}$. Συνεπώς, $P_a(x) = \dfrac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle}\cdot a = \dfrac{a^T x}{a^T a}\cdot a = \dfrac{a a^T}{a^T a}\cdot x = A\cdot x$.

4. Προβολές και Προσεγγίσεις Ελαχίστων Τετραγώνων

Έστω ένα σύστημα με «πολλές» εξισώσεις και λίγους αγνώστους $Ax = b$ με $A_{m\times n}$ και $m \gg n$ ($\gg$: κατά πολύ μεγαλύτερο). Γνωρίζουμε ότι ένα σύστημα έχει λύση αν $b \in R(A)$.

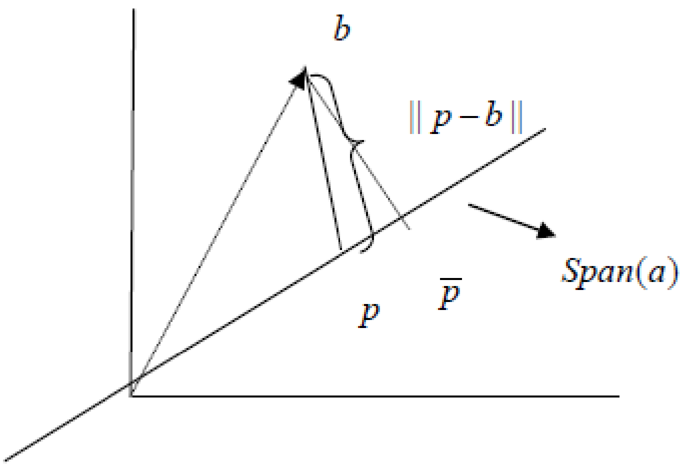
4.1 Το πρόβλημα για n=1

Έτσι π.χ. αν $n = 1$, δηλ. ο A είναι μια στήλη a, δηλαδή $A = a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ και $x \in \mathbb{R}$, το σύστημα έχει λύση αν $b \in Span(a)$.

Μπορώ να κάνω «κάτι» αν $b \notin Span(a)$;

Ιδέα: Αφού $Ax - b = 0$ αδύνατο, βρες τουλάχιστον $\overline{x}$ τέτοιο ώστε το $A\overline{x} - b$ να είναι όσο πιο «κοντά στο 0» γίνεται, δηλαδή να ελαχιστοποιείται το $\| A\overline{x} - b \|$. Βρες $\overline{x} : \| A\overline{x} - b \| \leq \| Ax - b \| \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Αν θέσω $p = Ax$ τότε $p \in Span(a)$ και αν $\overline{p} = A\overline{x}$ τότε και $\overline{p} \in Span(a)$. Το πρόβλημά μου, λοιπόν, μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί: Βρες $\overline{p} \in Span(a) : \| \overline{p} - b \| \leq \| p - b \| \ \forall p \in Span(a)$ ή περιφραστικά: Βρες εκείνο το σημείο $\overline{p}$ της ευθείας $Span(a)$ που να ελαχιστοποιεί την απόστασή του από το b (συγκρινόμενο με την απόσταση του b με άλλα σημεία p της $Span(a)$).



Σχήμα 8. Απεικόνιση της προβολής $\overline{p}$ του b στην ευθεία $Span(a)$.

Γεωμετρική λύση: $\overline{p}$ η προβολή του b στο $Span(a)$.

Αλγεβρική λύση: Θέτω $E(x) = \| Ax - b \|^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2$.

$$\frac{dE(x)}{dx} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} 2a_i(a_i x - b_i) = 0 \Leftrightarrow x\sum a_i^2 - \sum a_i b_i = 0 \Rightarrow \overline{x} = \frac{\sum a_i b_i}{\sum a_i^2} = \frac{< a,b >}{< a,a >}$$

και $\overline{p} = A\overline{x} = \dfrac{< a,b >}{< a,a >} \cdot a = P_a x$.

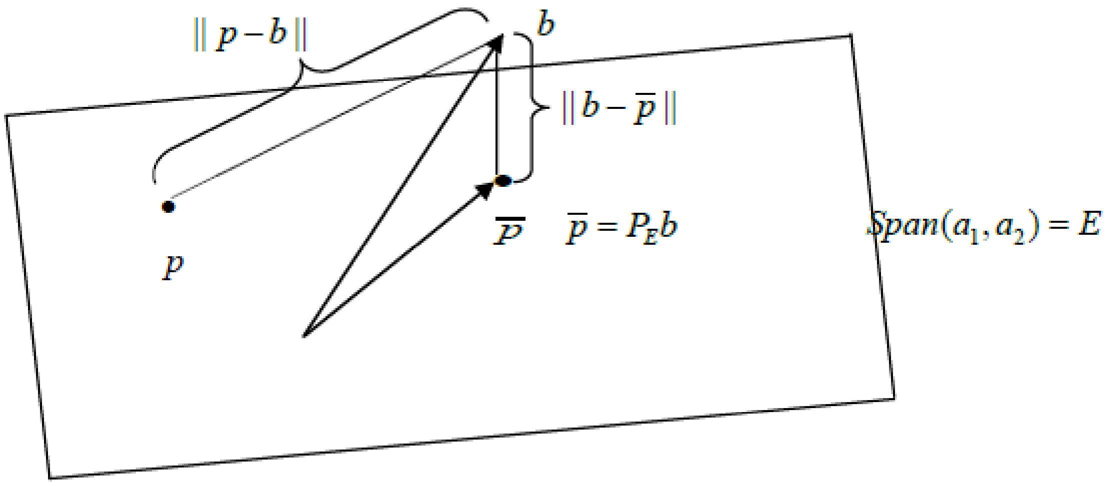
4.2 Ίδιο πρόβλημα για n=2

$A=\left[a_1 \mid a_2\right],\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Βρες $\overline{x}=\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix}: \| A\overline{x}-b \| \leq \| Ax-b \| \ \forall x \in \mathbb{R}^2$.

Καθώς $Ax = x_1a_1 + x_2a_2 \in Span(a_1, a_2) =: E$ και θέτοντας $\overline{p} = A\overline{x} \in E$ και $p = Ax \in E$ το πρόβλημα γράφεται ισοδύναμα:

Βρες $\overline{p} \in E = Span(a_1, a_2): \| \overline{p}-b \| \leq \| p-b \| \ \forall p \in E$ ή βρες εκείνο το σημείο $\overline{p}$ του E που να έχει ελάχιστη απόσταση από το b (συγκρινόμενο με την απόσταση του b από άλλα σημεία p του E).



Σχήμα 9. Απεικόνιση της προβολής $\overline{p}$ του b στο επίπεδο $Span(a_1, a_2)$.

4.3 Ίδιο πρόβλημα για οποιοδήποτε n

Γενικώς: $Ax = x_1a_1 + \ldots + x_na_n \in R(A) = Span(a_1, \ldots a_n)$.

Βρες $\overline{p} \in R(A): \| \overline{p}-b \| \leq \| p-b \| \ \forall p \in R(A)$ με $\overline{p} = A\overline{x}$ και $p = Ax$.

Βρες εκείνο το σημείο $\overline{p} \in R(A)$ που να ελαχιστοποιεί την απόσταση από το b.

Απάντηση: Θα είναι η προβολή του b στο $R(A)$, δηλαδή εκείνο το σημείο $\overline{p} \in R(A)$ με $b-\overline{p} \perp$ σε κάθε στοιχείο του $R(A)$.

Διότι: Έστω $p \in R(A)$ θα δείξουμε $\| b-p \|^2 \geq \| b-\overline{p} \|^2$.

$$\| b-p \|^2 = \| b-\overline{p}+\overline{p}-p \|^2 = \left\langle (b-\overline{p})+(\overline{p}-p), (b-\overline{p})+(\overline{p}-p) \right\rangle =$$

$$= \| b-\overline{p} \|^2 + \| \overline{p}-p \|^2 + 2\underbrace{\left\langle b-\overline{p}, \overline{p}-p \right\rangle}_{0} \geq \| b-\overline{p} \|^2.$$

$\left\langle b-\overline{p}, \overline{p}-p \right\rangle = 0$ εκ κατασκευής διότι $\overline{p}-p \in R(A)$.

Υπολογισμός των $\overline{p}$, $\overline{x}$:

$$\left.\begin{array}{l} b-A\overline{x} \perp \ \textit{σε κάθε στοιχείο του} R\ (A) \\ \Leftrightarrow b-A\overline{x} \perp a_1 \Rightarrow a_1{}^T(b-A\overline{x})=0 \\ \Leftrightarrow b-A\overline{x} \perp a_2 \Rightarrow a_2{}^T(b-A\overline{x})=0 \\ \vdots \\ \Leftrightarrow b-A\overline{x} \perp a_n \Rightarrow a_n{}^T(b-A\overline{x})=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow A^T \cdot (b-A\overline{x})=0 \Leftrightarrow A^T A\overline{x}=A^T b.$$

- Η λύση $\overline{x}$ ικανοποιεί την εξίσωση $(A^T A)\overline{x}=A^T b$.
- Εάν οι στήλες του A είναι ανεξάρτητες $\Rightarrow A^T A$ αντιστρέψιμος και $\overline{x}=(A^T A)^{-1}A^T b$.
- Τότε και η προβολή του b στο $R(A)$ $P_{R(A)}b$ υπολογίζεται ως $\overline{p}=P_{R(A)}b=A\overline{x}=A(A^T A)^{-1}A^T b$.

Ο πίνακας $P=A(A^T A)^{-1}A^T$ ονομάζεται **πίνακας προβολής** στο $R(A)$. Έχει την ιδιότητα ότι οποιοδήποτε $b\in\mathbb{R}^m$ πολλαπλασιάσω με τον P θα πάρω την προβολή του b στο $R(A)$.

Ερώτηση – Άσκηση: Έστω U ένας υπόχωρος και τα $\{v_1,\ldots,v_r\}$ μια βάση του. Να βρεθεί πίνακας Γ τέτοιος που Γx να είναι για κάθε x το πλησιέστερο στο x σημείο του U.

<u>Απάντηση:</u> Ο Γ πρέπει να είναι ο πίνακας προβολής στο U. Για να τον βρω πρέπει να σχηματίσω πίνακα A, τέτοιο που $U=R(A)$. Ο $A=\left[v_1|\ldots|v_r\right]$ έχει αυτή την ιδιότητα. Άρα έχουμε $\Gamma=A(A^T A)^{-1}A^T$.

<u>Ιδιότητες:</u> Αν P πίνακας προβολής τότε:

- $P^2=P$ (Αν προβάλλω δύο φορές είναι σαν να πρόβαλα μία).
- $P^T=P$ (P συμμετρικός).
- Ισχύει και το ανάποδο: Ένας συμμετρικός πίνακας με $P^2=P$ θα είναι πίνακας προβολής σε κάποιο υπόχωρο.

<u>Απόδειξη:</u> $P^2=P\cdot P=A(A^T A)^{-1}A^T A(A^T A)^{-1}A^T=A(A^T A)^{-1}A^T=P$ και

$P^T=\left[A(A^T A)^{-1}A^T\right]^T=A^{T^T}\left((A^T A)^{-1}\right)^T A^T=A(A^T A)^{-1}A^T=P$, διότι $A^T A$ συμμετρικός.

Παράδειγμα 1: $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\\0&0\end{bmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $R(A)=Span\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\right)$.

$P=?$, $P_{R(A)}b=?$, $\overline{x}=?$

$\begin{bmatrix}1&2\\1&3\\0&0\end{bmatrix}$.

$A^T A=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5\\5&13\end{bmatrix}$.

Τύπος στο 2×2: $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$.

Άρα $(A^T A)^{-1}=\dfrac{1}{26-25}\begin{bmatrix}13&-5\\-5&2\end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix}1&1&0\\2&3&0\end{bmatrix}$.

$(A^T A)^{-1}A^T=\begin{bmatrix}13&-5\\-5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix}3&-2&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$ και $P=A\left((A^T A)^{-1}A\right)=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\leftarrow P$.

$P_{R(A)}b=Pb=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$.

$\overline{x}=\left[(A^T A)^{-1}A^T\right]b=\begin{bmatrix}3&-2&0\\-1&1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\leftarrow\overline{x}$.

Δηλαδή $P_{R(A)}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = A\overline{x} = \overline{x}_1 a_1 + \overline{x}_2 a_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Παράδειγμα 2:</u> Έστω $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Να υπολογιστεί ο πίνακας προβολής Γ στο $Span(v)$.

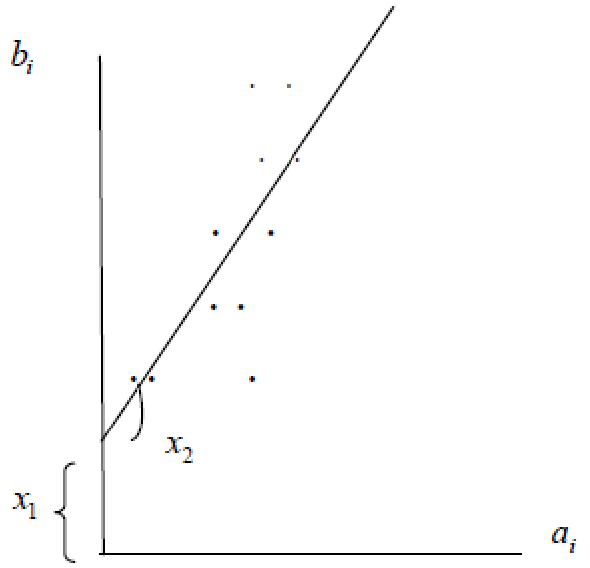
Με $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\Gamma = V(V^T V)^{-1} V^T = v(v^T v)^{-1} v^T = \frac{1}{v^T v} v v^T = \frac{1}{1+1+4+4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

4.4 Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων

Έστω ότι έχω n μετρήσεις a_i, b_i π.χ. b_i πίεση και a_i θερμοκρασία.

Οι μετρήσεις αυτές σε διάγραμμα διασποράς αερίου βρίσκονται κοντά σε ευθεία (άγνωστη) και υποψιάζομαι ότι οι δύο ποσότητες συνδέονται με μια γραμμική σχέση την οποία **θέλω να εκτιμήσω**.



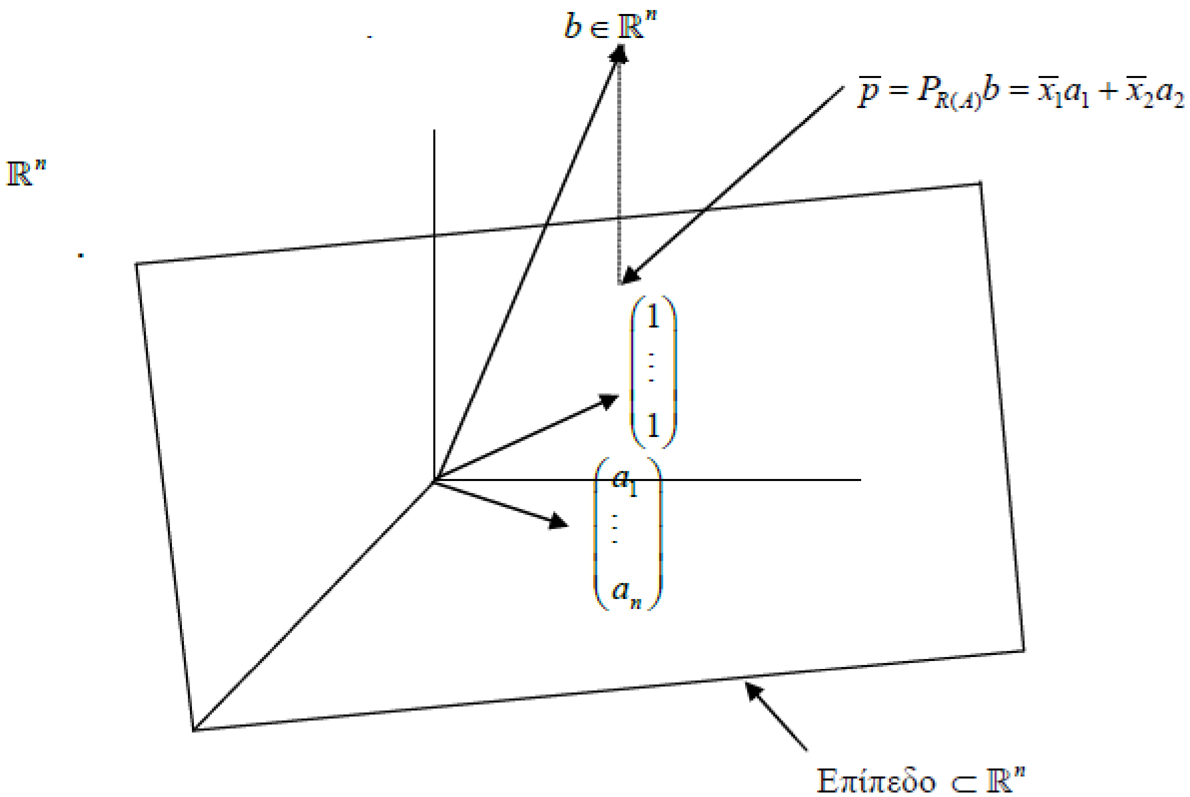
Σχήμα 10. Απεικόνιση ευθείας ελαχίστων τετραγώνων $b_i = x_1 + x_2 a_i + \varepsilon_i$.

Πώς; **Ιδέα:** Βρες εκείνη την ευθεία (εκείνα τα x_1, x_2) που να είναι «κοντά στα σημεία», δηλαδή $b_i - x_1 - x_2 a_i$ μικρό ή καλύτερα «ελάχιστο».

π.χ. $* = \sum_{i=1}^{n}(b_i - x_1 - x_2 a_i)^2$ ελάχιστο.

Αλλά, $* = \left\| \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\|^2$ και * ελαχιστοποιείται για $\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b$ με $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{pmatrix}$.

Σημειώστε ότι η λύση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων συνδέεται με την προβολή του $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ στο $Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$.



Σχήμα 11. Απεικόνιση της προβολής του b στο επίπεδο.

Θα έχουμε $\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{bmatrix} m & \Sigma a_i \\ \Sigma a_i & \Sigma a_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma b_i \\ \Sigma a_i b_i \end{pmatrix} = \dfrac{1}{m\Sigma a_i^2 - (\Sigma a_i)^2} \begin{bmatrix} \Sigma a_i^2 & -\Sigma a_i \\ -\Sigma a_i & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma b_i \\ \Sigma a_i b_i \end{pmatrix} = \ldots.$

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.