Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα

Ενότητα: Διανυσματικοί Χώροι και Υπόχωροι: Βάσεις και Διάσταση

Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής

1. Σκοποί ενότητας

Παρουσιάζονται θέματα Γραμμικής Άλγεβρας που είναι απαραίτητα για τον χρηματοοικονομικό και λογιστικό αναλυτή.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Διανυσματικοί χώροι και υπόχωροι, Υπόχωροι, Χώρος στηλών ενός m x n πίνακα, Ο Μηδενόχωρος του A (m x n), Η λύση m εξισώσεων με n αγνώστους, Λύσεις του Ax=0, Λύσεις του Ax=b, Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση, Γραμμική Ανεξαρτησία, Παράγοντας έναν υπόχωρο, Διάσταση.

3. Διανυσματικοί χώροι και υπόχωροι

Ορισμός: Αν V είναι ένα μη κενό σύνολο, τότε κάθε απεικόνιση του $V \times V$ στο V ονομάζεται **εσωτερική πράξη** του V.

$+ \ : \ V \times V \to V$

Ορισμός: Αν $\mathbb{F}$ και V είναι δύο μη κενά σύνολα, τότε κάθε απεικόνιση του καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{F} \times V$ στο V λέγεται **εξωτερική πράξη** στο V με συντελεστές από το σύνολο $\mathbb{F}$.

$\bullet \ : \ \mathbb{F} \times V \to V$

Ορισμός: Ένα σύνολο V στο οποίο έχει οριστεί μια εσωτερική πράξη $+$ και μια εξωτερική πράξη $\bullet$ με συντελεστές από το σύνολο $\mathbb{F}$, λέγεται **γραμμικός ή διανυσματικός χώρος** πάνω στο σώμα $\mathbb{F}$, όταν:

Πίνακας 1. Ιδιότητες εσωτερικής και εξωτερικής πράξης.

α/α	Ως προς την εσωτερική πράξη $+$ ισχύουν:	Ως προς την εξωτερική πράξη $\bullet$ ισχύουν:
1	$u+v=v+u$	$(a+\beta)\cdot u = a\cdot u+\beta\cdot u$
2	$(u+v)+k=u+(v+k)$	$a\cdot(u+v)=a\cdot u+a\cdot v$
3	$\exists\ \bigcirc_V \in V\ :\ u+\bigcirc_V=u\ \ \forall\ u\in V$	$a\cdot(\beta\cdot u)=(a\beta)\cdot u$
4	$\forall\ u\in V\ \ \exists\ u'\in V : u+u'=\bigcirc_V$	$1\cdot u=u\ \ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{F}, \forall u,v,k\in V$

Τα σημεία του διανυσματικού χώρου V τα λέμε **σημεία ή διανύσματα**.

Συμβολικά ο $(V,+,\bullet)$ είναι γραμμικός χώρος.

Παράδειγμα 1. Ο Γραμμικός Χώρος των διανυσμάτων:

$\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων n-άδων $\left(x_1,\ \ x_2,\ \ \ldots\ \ ,x_n\right)$ με $x_i \in \mathbb{R},\quad i=1\ldots n$.

Πρόσθεση: (εσωτερική πράξη).

Αν $x=\left(x_1,\ \ x_2,\ \ \ldots\ \ ,x_n\right)\in\mathbb{R}^n,\ y=\left(y_1\ \ y_2\ \ \ldots\ \ y_n\right)\in\mathbb{R}^n$ τότε:

$x+y=\left(x_1+y_1,\ \ x_2+y_2,\ \ \ldots\ \ x_n+y_n\right).$

- Προσεταιριστική.
- Αντιμεταθετική.
- Ουδέτερο στοιχείο: $\bigcirc=(0,0,\ldots,0)$.
- Αντίθετο : $-x=\left(-x_1,\ \ -x_2,\ \ \ldots\ \ ,-x_n\right)\in\mathbb{R}^n$.

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός: (εξωτερική πράξη).

Αν $x=\left(x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad , x_n\right)\in\mathbb{R}^n$ και $a\in\mathbb{R}$, τότε $a\cdot x=\left(ax_1, \quad ax_2, \quad \ldots \quad , ax_n\right)\in\mathbb{R}^n$

Ισχύουν οι (1-4) του παραπάνω ορισμού.

Ο $\mathbb{R}^n$ με τις δύο αυτές πράξεις είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$.

Πρόταση: Αν V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$, τότε ισχύουν :

1. $\forall a\in\mathbb{F}$, $a\cdot\bigcirc_V=\bigcirc_V$
2. $\forall x\in V$, $0\cdot u=\bigcirc_V$
3. $\forall a\in\mathbb{F}, \forall u\in V \quad a\cdot u=\bigcirc_V \Rightarrow a=0$ ή $u=\bigcirc_V$
4. $\forall a\in\mathbb{F}, \forall u\in V \quad \left(-a\right)\cdot u=-\left(a\cdot u\right)$
5. $\forall a,\beta\in\mathbb{F}, \forall u\in V\setminus\left\{\bigcirc_V\right\} \quad a\cdot u=\beta\cdot u\Rightarrow a=\beta$ (νόμος της διαγραφής)
6. $\forall a\in\mathbb{F}^*, \forall u,v\in V\setminus\left\{\bigcirc_V\right\} \quad a\cdot u=a\cdot v\Rightarrow u=v$ (νόμος της διαγραφής)

Οι $\mathbb{R}^n$ που γνωρίσαμε είναι σύνολα εφοδιασμένα με πρόσθεση $(x,y\in\mathbb{R}^n\Rightarrow x+y:=\ldots\in\mathbb{R}^n)$ και πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό $(x\in\mathbb{R}^n\Rightarrow\lambda x:=\ldots\in\mathbb{R}^n)$.

Για αυτές τις πράξεις ισχύει ένα σύνολο **κανόνων:**

1. $x+y=y+x$.
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$.
3. $\exists 0$ δηλαδή $x+0=0+x=x$.
4. $\forall x \ \exists(-x):\ x+(-x)=0$.
5. $1\cdot x=x$.
6. $\lambda\cdot(\mu\cdot x)=(\lambda\cdot\mu)\cdot x$.
7. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$.
8. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$

Ορισμός: Ένα σύνολο V εφοδιασμένο με μια πράξη + (πρόσθεση) και ένα πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό, τέτοιους ώστε να ισχύουν οι παραπάνω κανόνες λέγεται **διανυσματικός χώρος**.

Η έννοια του διανυσματικού χώρου είναι τόσο γενική που συμπεριλαμβάνει χώρους όπως: $\{$ το σύνολο των ακολουθιών $\{a_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ $\}$ ή $\{$ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\}$ ή $\{$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $\}$ ή $\{$ το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού $\leq k$ $\}$. Εδώ όμως θα περιοριστούμε στους $\mathbb{R}^n$ ως διανυσματικούς χώρους.

3.1 Υπόχωροι

Ορισμός: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $U \subseteq V$ με $U \neq \varnothing$ και U έχει τις εξής ιδιότητες:

- Αν $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$.
- Αν $x \in U \Rightarrow \lambda \cdot x \in U \quad \forall \lambda$.

Τότε ο U ονομάζεται υπόχωρος του V.

Σημείωση:

- Το $0 \in U$, διότι $0 \cdot x = 0 \in U$.
- Ο πιο μικρός υπόχωρος του V είναι ο $U = \{0\}$.
- Ο πιο μεγάλος υπόχωρος του V είναι ο V.

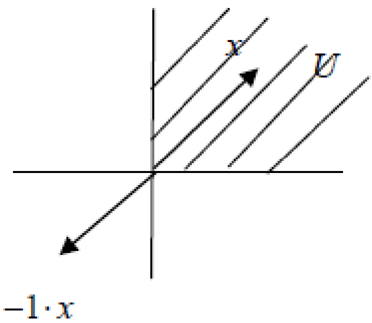
Παραδείγματα:

Είναι υπόχωροι οι παρακάτω;

- στον R^2:

$U = \{x : x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0\}$.

ΟΧΙ διότι αν $x \in U$ τότε $(-1) \cdot x \notin U$.

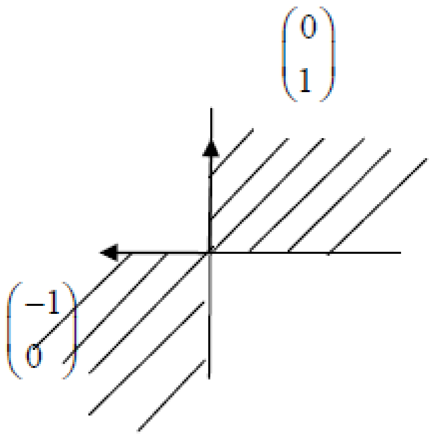


Σχήμα 1. Γραφική απεικόνιση του υπόχωρου U.

- R^2:

$$U = \left\{ x \left| \begin{matrix} x_1 \geq 0 \text{ ή } x_2 \geq 0 \\ x_1 \leq 0 \text{ ή } x_2 \leq 0 \end{matrix} \right. \right\}.$$

ΟΧΙ διότι $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U$.



Σχήμα 2. Γραφική απεικόνιση του υπόχωρου U .

- $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ ευθεία που διέρχεται από 0:

ΝΑΙ διότι: $L = Span(v)$ $\Big|$ αν $\left.\begin{array}{l} x \in L \Rightarrow x = \lambda v \\ x' \in L \Rightarrow x' = \lambda' v \end{array}\right\} \Rightarrow x + x' = (\lambda + \lambda')v$ και $\mu \cdot x = \mu \cdot \lambda v = (\mu\lambda) \cdot v \in L$.

- $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ ευθεία που δε διέρχεται από 0:

ΟΧΙ διότι δεν περιέχει το 0.

- Στον $\mathbb{R}^3$: επίπεδο που διέρχεται από 0:

$E = Span(v, w)$ **ΝΑΙ** (βλέπε παρακάτω) και γενικότερα στον R^n .

Αν $U = Span(v_1, \ldots, v_k)$ τότε U υπόχωρος.

Απόδειξη: Αν $x \in U \Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots \lambda_k :\ x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$.

$x' \in U \Rightarrow \lambda'_1, \ldots \lambda'_k :\ x' = \lambda'_1 v_1 + \ldots + \lambda'_k v_k \Rightarrow x + x' = (\lambda_1 + \lambda'_1)v_1 + \ldots + (\lambda_k + \lambda'_k)v_k \in U$ και $\mu \cdot x = \lambda_1 \mu \cdot v_1 + \ldots + \lambda_k \mu \cdot v_k \in U$.

3.2 Χώρος Στηλών ενός m x n πίνακα

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Ψάχνουμε όλα τα $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ για τα οποία ισχύει ότι το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση. Αλλά τότε:

$\exists x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$: $b = Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2$, δηλαδή $b \in Span(a_1, a_2)$.

Στο παράδειγμά μου, λοιπόν, τα b με αυτή την ιδιότητα είναι τα σημεία του επιπέδου που περνά από το 0, το $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Γενικώς: Αν A ένας $m \times n$ πίνακας τότε **χώρος στηλών** του είναι το σύνολο των $b \in \mathbb{R}^m$ για τα οποία υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ με $Ax = b$.

Ο χώρος αυτός ταυτίζεται με το $Span$ των στηλών του πίνακα. Συμβολίζεται με $R(A)$:

$$R(A) := Span(a_1, \ldots a_n) \subset \mathbb{R}^m.$$

Είναι υπόχωρος, καθώς γράφεται ως $Span$ κάποιων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^m$.

3.3 Ο Μηδενόχωρος του A (m x n)

Ορισμός: Το σύνολο των $x \in \mathbb{R}^n$ με $Ax = 0$ λέγεται Μηδενόχωρος του A. Είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη (Είναι υπόχωρος):

- Αν $\left.\begin{matrix} x \in N(A) \Rightarrow Ax = 0 \\ x' \in N(A) \Rightarrow Ax' = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(x + x') = 0 \Rightarrow x + x' \in N(A)$.
- $x \in N(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A \cdot (\lambda x) = \lambda \cdot Ax = 0 \Rightarrow \lambda x \in N(A)$.

π.χ. αν $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix}$ το $Ax = 0 \Leftrightarrow 5x_1 + 4x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{4}{5}x_2$. Άρα ο $N(A)$ αποτελείται από όλα τα $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ της μορφής $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Είναι δηλαδή μια ευθεία που περνά από το 0 και το $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.4 Ο Χώρος Γραμμών του A (m x n)

Ο χώρος γραμμών ενός πίνακα A αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς που μπορούν να κατασκευαστούν από τις γραμμές του. Προφανώς ο χώρος γραμμών του A έχει την ίδια διάσταση και την ίδια βάση με τον χώρο γραμμών του κλιμακωτού πίνακα U που προκύπτει από τον A μέσω του αλγορίθμου Gauss.

3.5 Ο Αριστερός Μηδενόχωρος του Α (m x n)

Ο αριστερός μηδενόχωρος του Α είναι ο μηδενόχωρος του A^T, δηλαδή $N\left(A^T\right)$. Αν ο Α είναι m x n, ο A^T είναι n x m και ο αριστερός μηδενόχωρος του Α προκύπτει από τις λύσεις του $y^T A = 0$, όπου το διάνυσμα y έχει διάσταση m.

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, με m=n=2 (δύο γραμμές και δύο στήλες) και r=1 (ένας οδηγός).

Χώρος στηλών: Όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Μηδενόχωρος: Όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Χώρος γραμμών: Όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Αριστερός μηδενόχωρος: Όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. Η λύση m εξισώσεων με n αγνώστους

Ψάχνουμε **το σύνολο** των λύσεων ενός συστήματος $Ax = b$ όπου $A_{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Όπως και στην $n\times n$ περίπτωση οι λύσεις δεν αλλάζουν αν κάνω μετασχηματισμούς γραμμών στον A και στο b ταυτόχρονα.

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Gauss φθάνουμε τώρα όχι σε άνω τριγωνικό U, αλλά σε «κλιμακωτό» U, όπου η μη-θεραπεύσιμη περίπτωση (συναντάω 0 από τα οποία δεν μπορώ να απαλλαγώ) είναι ο κανόνας.

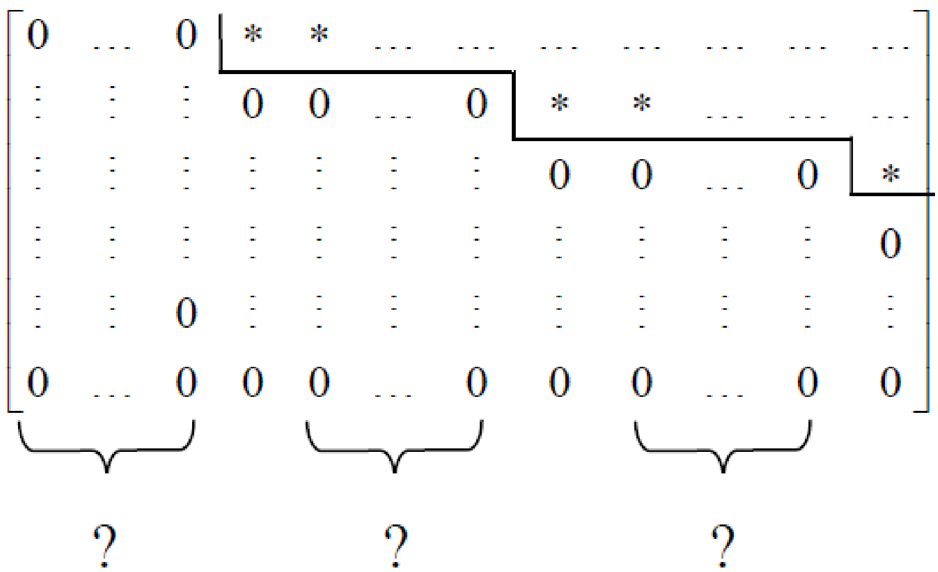
Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\gamma'_2=\gamma_2-2\gamma_1 \\ \gamma'_3=\gamma_2+\gamma_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma''_3=\gamma'_3-2\gamma'_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Οι οδηγοί δεν είναι πια πάνω στη διαγώνιο, αλλά το πλησιέστερο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής, τέτοιο που τα πλησιέστερα μηδενικά να έχουν από κάτω τους στήλη μηδενικών.

Κατά τα άλλα λειτουργώ όπως στην $n\times n$ περίπτωση, σε κάθε βήμα προσθέτω πολλαπλάσια της γραμμής του οδηγού στις από κάτω της, ώστε να μηδενιστούν τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό.

Έτσι φθάνω σε κλιμακωτό πίνακα του οποίου η γενική μορφή έχει ως εξής:



Σχήμα 3. Μορφή κλιμακωτού πίνακα.

Με γενικά χαρακτηριστικά:

- Πρώτες έρχονται οι μη-μηδενικές γραμμές και τελευταίες οι γραμμές που είναι γεμάτες μηδέν.
- Το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής γραμμής ονομάζεται οδηγός.
- Κάτω από κάθε οδηγό έχει στήλη μηδενικών.
- Κάθε οδηγός στα δεξιά του οδηγού προηγούμενων γραμμών.

4.1 Λύσεις του Ax=0

Δηλαδή $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Το σύστημα λέγεται τότε «ομογενές».

Κατ' αρχάς $Ax = 0 \Leftrightarrow Ux = 0$, όπου U ο κλιμακωτός στον οποίο φθάνουμε με αλγόριθμο Gauss.

$$Ux = 0: \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Κάθε μεταβλητή αντιστοιχεί σε μία στήλη του U . Οι μεταβλητές που αντιστοιχούν σε **στήλη που δεν έχει οδηγό** ονομάζονται **ελεύθερες**, οι άλλες **βασικές**. Εδώ: βασικές: x_1, x_3, ελεύθερες: x_2, x_4.
- Κάθε μη-μηδενική γραμμή του U αντιστοιχεί σε μία εξίσωση. Λύσε τις έτσι ώστε σε όλες να εκφράζονται **οι βασικές μεταβλητές συναρτήσει των ελεύθερων**. (Δηλαδή: αριστερά του "=" **μόνο** βασικές, δεξιά του "=" **μόνο** ελεύθερες).

Εδώ: $3x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{3}x_4$.

$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -3x_2 - x_4$.

- Λύσεις: Τα x της μορφής: Οι ελεύθερες ως έχουν, οι βασικές συναρτήσει των ελεύθερων.

  Εδώ: Όλα τα x που γράφονται ως:

$$x = \begin{pmatrix} -3x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -\frac{1}{3}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

. Οι ελεύθερες βρίσκονται στη δεύτερη και στην τέταρτη γραμμή.

Άρα $\{$ λύσεις της $Ax = 0$ $\} = Span\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Γενικώς:

- Φτιάχνω τόσα διανύσματα $v_1,\dots v_k$ όσα έχω ελεύθερες μεταβλητές.
- Σε καθένα από αυτά έχω «θέσεις» ελεύθερων και βασικών μεταβλητών. Τις ελεύθερες τις γεμίζω με 0/1 έτσι ώστε σε κάθε v_j να έχω ένα "1" και κάθε ελεύθερη να έχει κάπου ένα «1».
- Για κάθε v_j έχω δώσει τιμές στις ελεύθερες. Με αυτές τις τιμές μπαίνω στις εξισώσεις και βρίσκω τις τιμές των βασικών.
- Τέλος: $\{$ λύσεις της $Ax=0$ $\} = Span(v_1,\dots,v_k)$.

π.χ. 1 εξίσωση: $x_2+2x_3+x_4=0 \Rightarrow x_2=-2x_3-x_4$.

Βασική: x_2, ελεύθερες: x_1,x_3,x_4.

$$\Rightarrow \{\text{ λύσεις της } Ax=0 \ \} = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

4.2 Λύσεις του Ax=b

Με τους ίδιους μετασχηματισμούς γραμμών στο b όπως στο A, το b μεταβάλλεται σε κάποιο c.

$[A|b]\to[U|c]$.

Στην περίπτωσή μας: $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}b_1\\b_2-2b_1\\b_3+b_1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}b_1\\b_2-2b_1\\b_3-2b_2+b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$.

Κατ' αρχάς: Για να υπάρχουν λύσεις πρέπει το b να είναι τέτοιο ώστε για το c που προκύπτει οι συντεταγμένες που αντιστοιχούν στις μηδενικές γραμμές του U να είναι ίσες με 0.

Εδώ: $c_3=b_3-2b_2+b_1=0$.

Γενικώς: Αν r οδηγοί $\Rightarrow m-r$ μηδενικές γραμμές. Άρα χρειάζομαι:

$c_{r+1}=c_{r+2}=c_m=0$.

Αν αυτοί οι περιορισμοί πληρούνται έχω λύσεις. Ποιες είναι αυτές;

π.χ. $b=\begin{pmatrix}1\\5\\5\end{pmatrix}\Rightarrow c=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$.

- Πάλι λύνω τις εξισώσεις που αντιστοιχούν στις μη-μηδενικές γραμμές του U ώστε να εκφράσω τις βασικές συναρτήσει των ελεύθερων.

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+3x_3+2x_4&=1 \\ 3x_3+1x_4&=3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_3&=1-\frac{1}{3}x_4 \\ x_1&=-2-3x_2-x_4 \end{aligned}.$$

- Άρα λύσεις τα x της μορφής:

$$x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2-3x_2-x_4\\ x_2\\ 1-\frac{1}{3}x_4\\ x_4 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{ειδική}}\underbrace{+x_2\begin{pmatrix} -3\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ -\frac{1}{3}\\ 1 \end{pmatrix}}_{+λύσεις\ της\,Ax=0}.$$

Άρα: $\{$ οι λύσεις της $Ax=b$ $\}$ = $x_{ειδική}$ + $\{$ λύσεις της $Ax=0$ $\}$

Σημείωση: Το ρόλο της $x_{ειδικής}$ εδώ τον έπαιξε η λύση για την οποία ελεύθερες μεταβλητές = 0. Ωστόσο **οποιαδήποτε** άλλη λύση της $Ax=b$ μπορεί να παίξει το ρόλο της $x_{ειδικής}$.

Σημείωση: Οι λύσεις της $Ax=b$ είναι ο κατά $x_{ειδική}$ «μετατοπισμένος» μηδενόχωρος του A.

$\Rightarrow$ Οι λύσεις της $Ax=b$ **δεν είναι** υπόχωρος.

Συμπεράσματα:

Έστω $r=$ αριθμός οδηγών $\Rightarrow n-r$ ελεύθερες μεταβλητές και $m-r$ μηδενικές γραμμές του U.

Αν $m-r=0$, δεν υπάρχουν μηδενικές γραμμές του U. Άρα: δεν υπάρχουν περιορισμοί στην ύπαρξη λύσης. Οπότε έχω λύση για κάθε $b\in\mathbb{R}^m$.

Αν $m-r>0$, αν κάποιο c_j με $j>r$ είναι $c_j\neq 0$ $\Rightarrow$ **δεν έχω λύση**. Αν $c_{r+1}=\ldots=c_m=0$ $\Rightarrow$ **υπάρχουν λύσεις**.

Αν υπάρχουν λύσεις:

Αν $m-r=0$, δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές. Αν $N(A)=\{0\}$ υπάρχει μία ακριβώς λύση. $\{$ λύσεις του $Ax=b$ $\}$ = $\{x_{ειδική}\}$.

Αν $m-r>0$, $\{$ λύσεις του $Ax=b$ $\}$ = $\{x_{ειδική}\}+\underbrace{Span(v_1,\ldots,v_{n-r})}_{N(A)}$.

5. Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

5.1 Γραμμική Ανεξαρτησία

Έστω k στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου V: $v_1,...,v_k \in V$. Τότε για οποιαδήποτε $\lambda_1,...,\lambda_k \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_\kappa v_k \in V$.

Επίσης:

Αν $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0$.

Ανεξαρτησία των $\{v_1,...,v_k\}$ έχουμε αν αυτός **είναι ο μόνος** γραμμικός συνδυασμός τους που ισούται με 0.

Ορισμός: $\{v_1,...,v_k\} \in V$ ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$ αν από $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_\kappa v_k = 0$ έπεται ότι: $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$.

Παρατήρηση: $\{v_1,...,v_k\}$ ανεξάρτητα ισοδυναμεί με: Δε μπορώ να γράψω ένα από αυτά ως γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων.

π.χ. αν $v_1 = \mu_2 v_2 + ... + \mu_k v_k \Rightarrow v_1 - \mu_2 v_2 - ... - \mu_k v_k = 0$ ενώ $\mu_j \neq 0$.

Παραδείγματα:

- $x, y \in \mathbb{R}^n$ εξαρτημένα $\Leftrightarrow x, y$ συγγραμμικά.
- $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ εξαρτημένα $\Leftrightarrow$ κάποιο από αυτά ανήκει στο επίπεδο που δίνουν τα άλλα δύο και το 0: π.χ. $z \in span(x, y)$.
- Αν κάποιο από τα $v_i = 0$, τότε εξαρτημένα.
- Οι στήλες τριγωνικού πίνακα με μη μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο είναι ανεξάρτητες:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + ... + \lambda_n \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

  Τελευταία εξίσωση $\Rightarrow \lambda_n = 0$.

  Αντικαθιστώ αυτό στην προτελευταία $\Rightarrow \lambda_{n-1} = 0$.

Συνεχίζουμε τη διαδικασία για όσα βήματα απαιτούνται από το πρόβλημα.

- Παρομοίως για τις γραμμές τριγωνικού πίνακα.
- Καθώς και για τις γραμμές (ή τις στήλες) κλιμακωτού που **περιέχουν οδηγούς**.

Οι r γραμμές με οδηγούς κλιμακωτού είναι ανεξάρτητες.

Οι r στήλες με οδηγούς κλιμακωτού είναι ανεξάρτητες.

Μέθοδος για να ελέγξω αν $v_1,...,v_k \in R^n$ είναι ανεξάρτητα

Σχηματίζω τον $n \times n$ πίνακα $V = [v_1 | ... | v_k]$ και βρίσκω το μηδενόχωρο $N(V)$. Αν αυτός αποτελείται μόνο από $\{0\}$, τα $v_1,...,v_k$ είναι ανεξάρτητα. (Δηλαδή όταν δεν έχω ελεύθερες μεταβλητές).

Διότι:

$Vx = 0 \Rightarrow x = 0$ ισοδυναμεί με:

$x_1 v_1 + ... + x_n v_n = 0 \Rightarrow x_1 = ... = x_n = 0$.

που είναι ακριβώς ο ορισμός της ανεξαρτησίας.

5.2 Παράγοντας έναν υπόχωρο

Ορισμός: Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{v_1,...,v_k\} \in U$ **παράγει** έναν υπόχωρο U όταν οποιοδήποτε στοιχείο του U γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1,...,v_k$.

Τότε θα έχουμε:

$U = Span(v_1,...,v_k)$.

Παρατήρηση: Ένα στοιχείο του U μπορεί να γράφεται **με (ενδεχομένως) διαφορετικούς τρόπους** ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1,...,v_k$.

π.χ.

- Έστω $v \,\&\, w$ δύο συγγραμμικά διανύσματα και $U = Span(v, w)$. Τότε οποιοδήποτε $x \in U$ γράφεται είτε ως πολλαπλάσιο του v, είτε ως πολλαπλάσιο του w (είτε και με άλλους άπειρους τρόπους).
- Παρομοίως αν v, w, z ανήκουν στο ίδιο επίπεδο που περνά από 0 και $U = Span(v, w, z)$.

Ορισμός: Βάση ενός υπόχωρου U ονομάζεται ένα σύνολο διανυσμάτων $\{v_1,...,v_k\} \in U$ που έχουν τις εξής δύο ιδιότητες:

1. Είναι ανεξάρτητα.
2. Παράγουν τον U.

Σημείωση: Ένα $v \in U$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης.

Για κάθε υπόχωρο υπάρχουν άπειρες βάσεις.

π.χ.

- Αν U ένα επίπεδο: τότε οποιαδήποτε δύο μη – συγγραμμικά διανύσματα είναι βάση του.
- Οι στήλες ενός μη – ιδιόμορφου $n\times n$ πίνακα είναι βάση του $\mathbb{R}^n$:

  Διότι: Το $Ax=b$ έχει πάντα λύση (άρα παράγουν τον υπόχωρο) και το $Ax=0$ μόνο τη μηδενική (άρα είναι ανεξάρτητες).

5.3 Διάσταση

Πρόταση και ορισμός: Δύο βάσεις ενός υπόχωρου έχουν τον **ίδιο αριθμό** διανυσμάτων, τη **διάσταση** του U (που επομένως χαρακτηρίζει τον U). Γράφουμε $\dim(U)$.

Αποδεικνύεται ότι:

Αν η διάσταση του $V=k$, τότε:

- Αν έχω περισσότερα από k διανύσματα: θα είναι εξαρτημένα.
- Αν έχω λιγότερα από k, δεν θα παράγουν τον V.
- Αν έχω περισσότερα από k, και αυτά παράγουν τον V, τότε αποκλείοντας μερικά (κατάλληλα) φθάνω σε βάση.
- Αν έχω λιγότερα από k και αυτά είναι ανεξάρτητα, τότε μπορώ να συμπληρώσω σε βάση.
- Αν έχω ακριβώς k, τότε ανεξαρτησία $\Rightarrow$ παραγωγή και παραγωγή $\Rightarrow$ ανεξαρτησία. Αν έχω τη μία ιδιότητα θα έχω και την άλλη.

Παράδειγμα: Βάση N(A)

Λύσε $Ax=0 \Leftrightarrow Ux=0$, r οδηγοί.

Βάση: Τα $m-r$ διανύσματα που προκύπτουν αν θέσω τις ελεύθερες μεταβλητές διαδοχικά 0 και 1.

Διότι: Προφανώς παράγουν τον $N(A)=N(U)$. (Έτσι κατασκευάστηκαν).

Επίσης, η ανεξαρτησία εξασφαλίζεται από το ότι για κάθε ελεύθερη μεταβλητή το “1” εμφανίζεται μόνο σε ένα από τα v_k, τα άλλα έχουν “0”.

$$c_1\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{v_1}+c_2\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{v_2}+c_3\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{v_3}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}c_1=0\\c_2=0\\c_3=0\end{matrix}.$$

Έχουμε:

$$\dim N(A)=m-r$$
$$N(A)\subset R^n$$

Παράδειγμα: Βάση του χώρου στηλών του A: R(A)

$$\pi.\chi.\ A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & 6 & 9 & 5\\ -1 & -3 & 3 & 0\end{bmatrix} \longrightarrow U=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

=3*πρώτη =πρώτη + (1/3)*τρίτη =3*πρώτη =πρώτη + (1/3)*τρίτη

Σχήμα 4. Οι μετασχηματισμοί με τους οποίους προκύπτει η βάση του χώρου στηλών.

$R(A)\neq R(U)$, αλλά οι εξαρτήσεις στις στήλες τους ίδιες.

Ιδιαιτέρως: Ανεξάρτητες είναι οι στήλες του A αν και οι αντίστοιχες του U είναι ανεξάρτητες.

Αν κάποιες στήλες του A εξαρτημένες $\exists x\neq 0$, με $x_r=0$ για τις στήλες που δε με ενδιαφέρουν τέτοιο ώστε $Ax=0$.

Ισοδύναμα, αν οι ίδιες στήλες του U είναι εξαρτημένες, $Ux=0$.

Πάρε ως **βάση του R(A)** τις στήλες του A που αντιστοιχούν στις στήλες του U που έχουν οδηγούς.

Εδώ: 1η & 3η $\Rightarrow$ βάση $R(A)$: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\9\\3\end{pmatrix}\right\}$.

Έχουμε:

$\dim R(A)=r$
$R(A)\subset R^m$

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Οικονομικό Πανεπιστήμιον Αθηνών, Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος, 2015. Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος. «Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://opencourses.aueb.gr/modules/document/?course=LOXR100 .

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης