Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα

Ενότητα: Ο χώρος $\mathbb{R}^n$

Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής

1. Σκοποί ενότητας

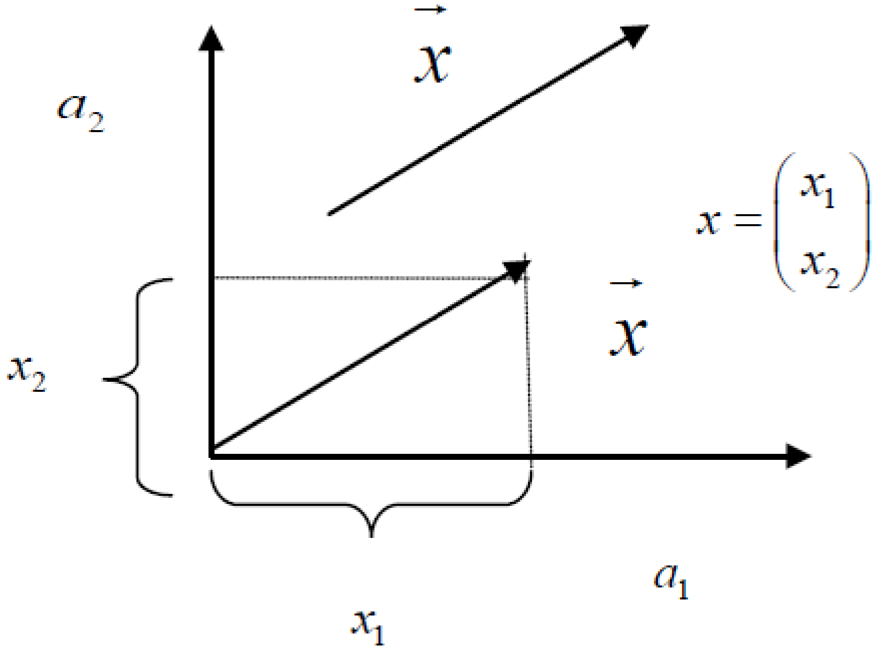
Παρουσιάζονται θέματα Γραμμικής Άλγεβρας που είναι απαραίτητα για τον χρηματοοικονομικό και λογιστικό αναλυτή.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Διανύσματα και ο $\mathbb{R}^n$, Ο $\mathbb{R}^n$, Κανόνες πράξεων στον $\mathbb{R}^n$, Ευθείες και επίπεδα στον $\mathbb{R}^n$, Ευθεία στον $\mathbb{R}^2$, Ευθεία που διέρχεται από το μηδέν, Ευθεία που δε διέρχεται από το μηδέν, Ευθεία στον $\mathbb{R}^n$, Επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$, Επίπεδο που διέρχεται από το μηδέν, Επίπεδο που δε διέρχεται από το μηδέν, Επίπεδο στον $\mathbb{R}^n$, Εσωτερικό γινόμενο και ορθογωνιότητα στον $\mathbb{R}^n$, Εσωτερικό γινόμενο, Κανόνες πράξεων, Μήκος, Ιδιότητες, Ορθογωνιότητα, Εφαρμογή: Προβολή σε ευθεία, Εφαρμογή: Η ανισότητα Cauchy-Schwartz, Τριγωνική ανισότητα.

3. Διανύσματα και ο $\mathbb{R}^n$

Ας θεωρήσουμε το επίπεδο και ένα σύστημα συντεταγμένων με άξονες a_1, a_2 καθώς και τα διανύσματα $\vec{x}$ στο επίπεδο.



Σχήμα 1. Απεικόνιση διανύσματος στο επίπεδο.

Ας θυμηθούμε ότι διανύσματα που προκύπτουν το ένα από το άλλο με παράλληλη μετατόπιση, έχουν δηλαδή ίδια φορά και μήκος, δε διακρίνονται αλλά **θεωρούνται ένα και το αυτό διάνυσμα**. Μπορούμε, λοιπόν, πάντα να διαλέγουμε ένα διάνυσμα ως «κανονικό εκπρόσωπο» όλων όσων ταυτίζονται με αυτό, και αυτό θα είναι το διάνυσμα που έχει ως **σημείο εκκίνησης την αρχή των αξόνων**. Για να προσδιορίσουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ αρκεί λοιπόν να γνωρίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο καταλήγει το διάνυσμα, σημείο το οποίο ονομάζουμε $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

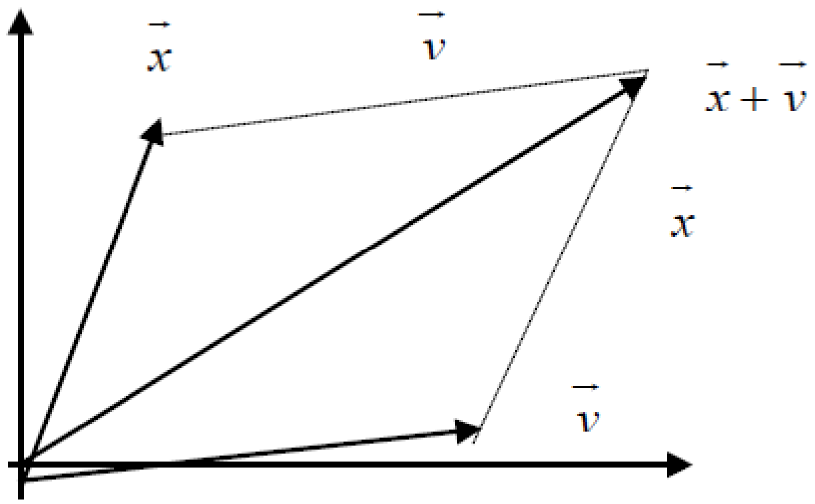
Σε κάθε διάνυσμα λοιπόν αντιστοιχεί ένα σημείο και σε κάθε σημείο του επιπέδου ένα διάνυσμα (το διάνυσμα που πάει από την αρχή των αξόνων στο σημείο αυτό).

Όσον αφορά τις μεταξύ τους πράξεις:

Στα μεν διανύσματα έχω δύο πράξεις:

Πολλαπλασιασμό διανύσματος με πραγματικό αριθμό, όπου το $\lambda\vec{x}$ ορίζεται ως το διάνυσμα με «(λ)-πλάσιο» μήκος και ίδια φορά με το $\vec{x}$ αν $\lambda > 0$ και αντίθετη αν $\lambda < 0$.

Πρόσθεση μεταξύ διανυσμάτων όπου το $\vec{x} + \vec{y}$ προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου:



Σχήμα 2. Απεικόνιση πρόσθεσης διανυσμάτων στο επίπεδο.

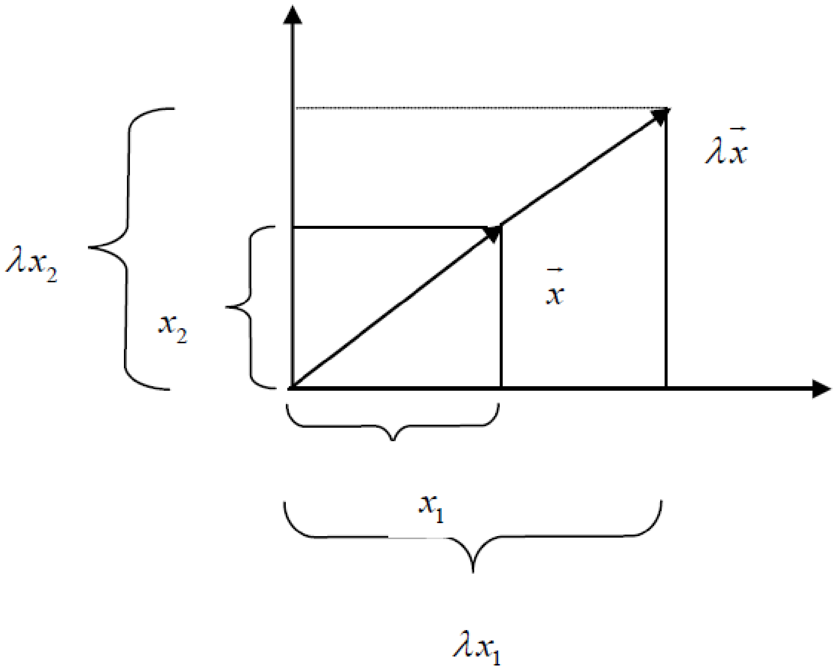
Αντιστοίχως μπορώ να ορίσω πράξεις για τα σημεία $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ του επιπέδου και να ορίσω ότι τα σημεία του επιπέδου εξοπλισμένα με αυτές τις πράξεις αποτελούν τον $\mathbb{R}^2$:

Ορισμός: $\mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο των δυάδων $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ πραγματικών αριθμών $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, (με σύμβολα $\mathbb{R}^2 := \left\{ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$) εφοδιασμένων με τις παρακάτω πράξεις:

- **Πρόσθεση:** Αν $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ και $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ορίζω το άθροισμα $x+y$ ως $x+y := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
- **Πολλαπλασιασμό με πραγματικό:** Αν $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε ορίζω το γινόμενο λx ως $\lambda x := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, δηλ. πολλαπλασιάζω και προσθέτω **κατά συντεταγμένη**.

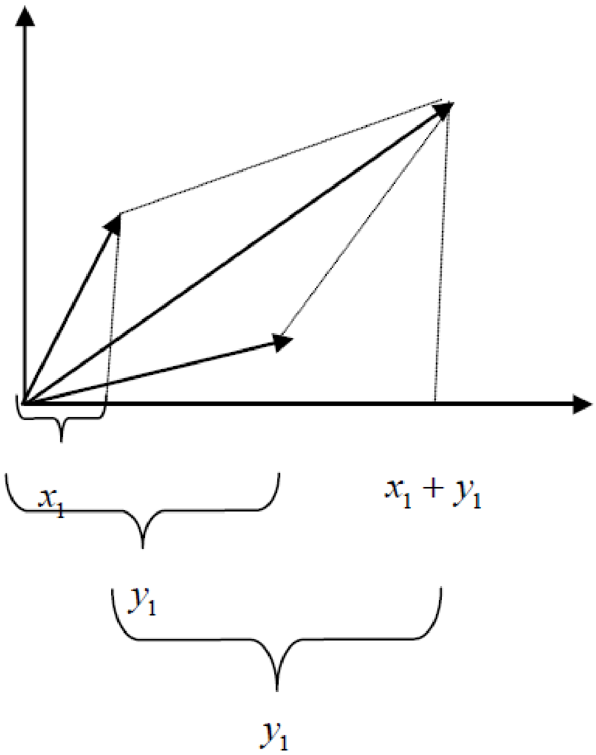
Οι πράξεις στον $\mathbb{R}^2$ έχουν οριστεί έτσι ώστε **η αντιστοιχία** που είδαμε μεταξύ διανυσμάτων και στοιχείων του $\mathbb{R}^2$ (σημείων του επιπέδου) **να διατηρείται και στα αποτελέσματα των εκάστοτε μεταξύ τους πράξεων**.

Έτσι μπορεί να διαπιστώσει κανείς εύκολα ότι, αν $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ το σημείο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\vec{x}$, τότε το $\lambda x=\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$ είναι το σημείο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\lambda \vec{x}$.



Σχήμα 3. Απεικόνιση πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού με διάνυσμα.

Το ίδιο ισχύει για το άθροισμα. Το σημείο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\vec{x}+\vec{y}$ (που προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου) είναι ακριβώς το $\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}$.



Σχήμα 4. Απεικόνιση πρόσθεσης διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^2$.

Αφού λοιπόν **υπάρχει μια πλήρης αντιστοιχία** ανάμεσα στα διανύσματα και στα σημεία του επιπέδου (στοιχεία του $\mathbb{R}^2$) καθώς και στο τι μπορώ να κάνω με αυτά (πράξεις), **μπορώ να τα ταυτίσω**, δηλαδή να τα βλέπω σαν δύο όψεις του ίδιου πράγματος, να μη διακρίνω πια μεταξύ διανυσμάτων και $\mathbb{R}^2$.

Οι δύο όψεις είναι η **γεωμετρική** (διανύσματα) και η **αλγεβρική** (στοιχεία του $\mathbb{R}^2$), δηλαδή αυτή στην οποία κάνω πράξεις με σύμβολα και αριθμούς.

Η **γεωμετρική όψη** των πραγμάτων με βοηθάει να φανταστώ καλύτερα ορισμένες ιδιότητες ή καταστάσεις και έτσι να τις κατανοώ καλύτερα.

Η **αλγεβρική θεώρηση** όμως έχει το πλεονέκτημα ότι μπορώ **πιο εύκολα να γενικεύσω** και να επεκτείνω αυτά που κάνουμε με διανύσματα σε χώρους περισσότερων διαστάσεων, όπως στον $\mathbb{R}^n$, στους οποίους δεν έχω γεωμετρική εποπτεία (δεν μπορώ να «δω» πάνω από 3 διαστάσεις).

Ωστόσο η γεωμετρική εποπτεία του $\mathbb{R}^2$ και του χώρου ($\mathbb{R}^3$) μας βοηθάει (με αναλογίες) να καταλάβουμε ιδιότητες των χώρων περισσότερων διαστάσεων, να αποκτήσουμε μια στοιχειώδη γεωμετρική κατανόηση των όσων αποδεικνύουμε αλγεβρικά σε αυτούς τους χώρους.

3.1 Ο $\mathbb{R}^n$

Η αλγεβρική θεώρηση μας επιτρέπει άμεσα να ορίσουμε τέτοιους χώρους κατ’ αναλογία του ορισμού του R^2 :

Ορισμός: Για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό $n \in N$ ορίζουμε τον $\mathbb{R}^n$ ως το σύνολο των (διατεταγμένων) n-άδων πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}^n := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ (κατά σύμβαση γράφουμε αυτές τις n-άδες (συντεταγμένες του x) ως στήλες).

- **Πρόσθεση:** Για $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ και $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ορίζω το άθροισμα $x + y$ ως εκείνο το στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ που έχει ως συντεταγμένες το άθροισμα των συντεταγμένων των x και y :

  $$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

- **πολλαπλασιασμός με πραγματικό:** Αν $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$ και $\lambda \in R$, τότε $\lambda \cdot x := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$.

Προσθέτουμε και πολλαπλασιάζουμε κατά συντεταγμένες.

Ποιος είναι ο $\mathbb{R}^3$;

3.2 Κανόνες πράξεων στον $\mathbb{R}^n$

Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ και $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Επίσης για $x \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε $-x := \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$.

Έχουμε:

- $x + y = y + x$.
- $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- $x + 0 = x$ (υπάρχει μηδέν της πρόσθεσης).
- $x + (-x) = 0$.
- $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$.
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Οι παραπάνω σχέσεις αποδεικνύονται εύκολα. Περνάμε σε συντεταγμένες και εκεί χρησιμοποιούμε αντίστοιχες ιδιότητες πραγματικών αριθμών.

π.χ. η απόδειξη της τελευταίας σχέσης:

$$(\lambda + \mu)x = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)x_1 \\ \vdots \\ (\lambda + \mu)x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x_1 \\ \vdots \\ \mu x_n \end{pmatrix} = \lambda x + \mu x .$$

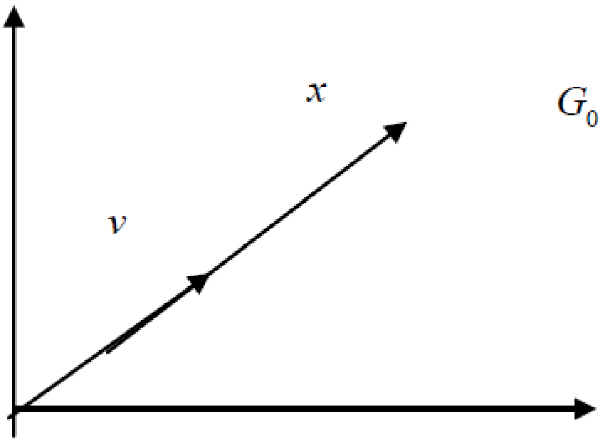
4. Ευθείες και επίπεδα στον $\mathbb{R}^n$

4.1 Ευθεία στον $\mathbb{R}^2$

Η ευθεία είναι ένα σύνολο σημείων x. Θέλουμε να περιγράψουμε αυτό το σύνολο με τη μορφή μιας εξίσωσης σημείων/ διανυσμάτων. Να πούμε δηλαδή ότι η ευθεία είναι όλα εκείνα τα σημεία του επιπέδου που ικανοποιούν την τάδε εξίσωση (σημείων/ διανυσμάτων).

4.1.1 Ευθεία που διέρχεται από το μηδέν

Για να ορίσω μια ευθεία G_0 που διέρχεται από την αρχή των αξόνων χρειάζεται άλλο ένα προκαθορισμένο σημείο $v \in \mathbb{R}^2$ από το οποίο διέρχεται η ευθεία. Όλα τα υπόλοιπα σημεία x της ευθείας θα είναι ακριβώς **εκείνα τα x που γράφονται ως πολλαπλάσια του v**.
$x \in G_0 \Leftrightarrow \exists \lambda : x = \lambda v$.



Σχήμα 5. Απεικόνιση της ευθείας G_0 και των x που γράφονται ως πολλαπλάσια του v.

Άρα για να είναι ευθεία που διέρχεται από το 0, η G_0 πρέπει να υπάρχει
$v \in \mathbb{R}^2 : G_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \middle| \exists \lambda : x = \lambda v \right\}$.

Η παραπάνω σχέση διαβάζεται ως εξής: v ανήκει ($\in$) στον R δύο ($\mathbb{R}^2$) τέτοιο ώστε (:) G μηδέν (G_0) είναι ίσο με το σύνολο ($\{...\}$) των σημείων x που ανήκουν στον R δύο για τα οποία (|) υπάρχει ($\exists$) λ τέτοιο ώστε x ίσον με λ επί v.

Σε αυτή την εξίσωση το ρόλο του v μπορεί να τον παίξει και οποιοδήποτε άλλο (αυθαίρετα επιλεγμένο) σημείο της ευθείας.

Το σύνολο των πολλαπλασίων ενός στοιχείου / διανύσματος / σημείου $v \in \mathbb{R}^2$ το γράφουμε και ως $\mathrm{Span}(\mathrm{v})$. Δηλαδή:

$$G_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \middle| \exists \lambda : x = \lambda v \right\} = Span(v)$$

Δείτε ότι για κάθε συγκεκριμένη τιμή του λ παίρνω και ένα άλλο συγκεκριμένο σημείο x της G_0. Όταν αφήσω το λ να «τρέχει» στους πραγματικούς αριθμούς τότε το x τρέχει πάνω στη G_0.

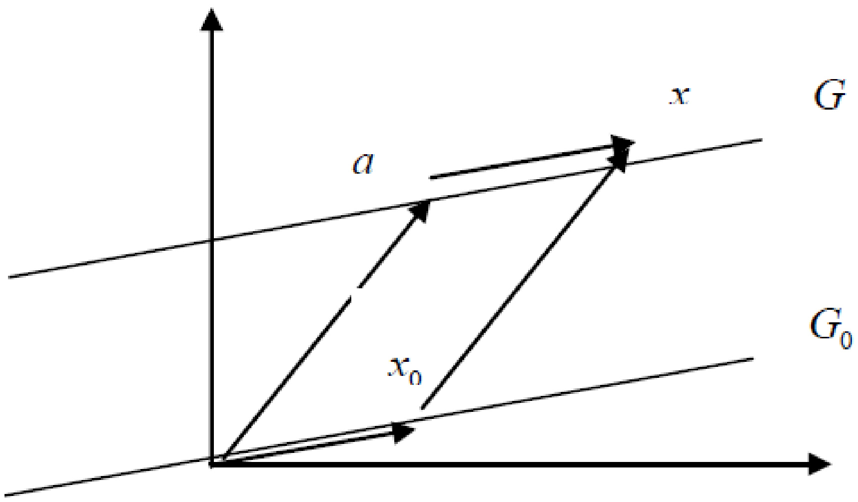
4.1.2 Ευθεία που δε διέρχεται από το μηδέν

Ας προσδιορίσω μια ευθεία G που δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων ως εκείνη που διέρχεται από κάποιο προκαθορισμένο σημείο $a \in \mathbb{R}^2$ και είναι παράλληλη κάποιας G_0 που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Τότε όλα τα υπόλοιπα σημεία x της ευθείας G θα είναι ακριβώς **εκείνα τα x που γράφονται ως άθροισμα κάποιο σημείου** $x_0 \in G_0$. Άρα:

$G = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \middle| \exists x_0 \in G_0 : x = a + x_0 \right\}$.

Καθώς τα σημεία της G_0 είναι τα πολλαπλάσια κάποιου $v \in \mathbb{R}^2$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε αυτή την ιδιότητα στη παραπάνω εξίσωση:

$G = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \middle| \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = a + \lambda v \right\}$.



Σχήμα 6. Απεικόνιση των ευθειών G και G_0.

Τα παραπάνω μπορούν να γραφτούν και ως εξίσωση συνόλων ως:

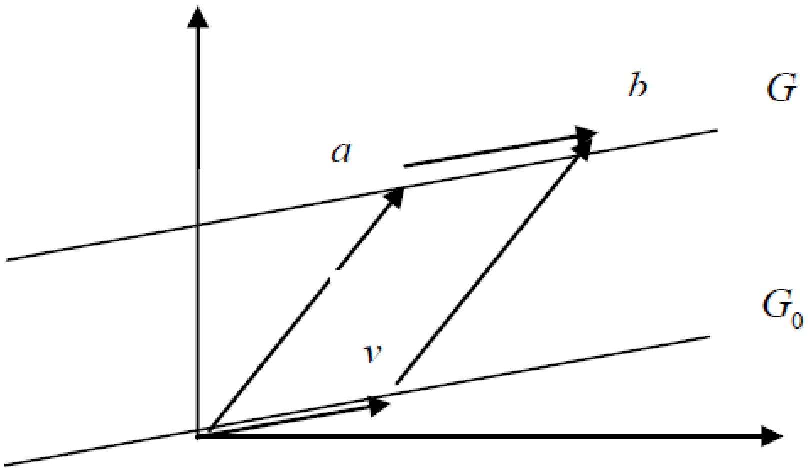
$G = a + G_0 = a + Span(v)$.

Δηλαδή: κάθε σημείο της G προκύπτει ως άθροισμα κάποιου σημείου της G_0 με το α. Αυτό σημαίνει ότι η G **προκύπτει από μετατόπιση της** G_0.

Το ρόλο του α σε αυτές τις εξισώσεις μπορεί να τον παίξει οποιοδήποτε άλλο στοιχείο $a' \in G$. Δηλαδή έχουμε:

$G = a' + G_0$ για οποιοδήποτε $a' \in G$.

Εάν προτιμάμε τώρα να προσδιορίσουμε εναλλακτικά την ευθεία G ως εκείνη που διέρχεται από δύο σημεία $a, b \in \mathbb{R}^2$, τότε αυτή θα πρέπει να είναι παράλληλη της ευθείας που διέρχεται από το 0 και το $v = b - a$.



Σχήμα 7. Απεικόνιση του εναλλακτικού προσδιορισμού της ευθείας G .

Άρα:

$G=\left\{x\in\mathbb{R}^2 \middle| \exists\lambda : x=a+\lambda(b-a)\right\}$.

Αν προτιμώ, μπορώ να πάρω σε αυτό τον ορισμό οποιαδήποτε δύο (μη ταυτόσημα) σημεία της G a',b' στη θέση των a,b .

4.1.3 Ευθεία στον $\mathbb{R}^n$

Το υποσύνολο $G\subset\mathbb{R}^n$ ονομάζεται ευθεία αν υπάρχουν $a,b\in\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε όλα τα σημεία x της G να γράφονται ως $x=a+\lambda(b-a)$, για κάποιο λ .

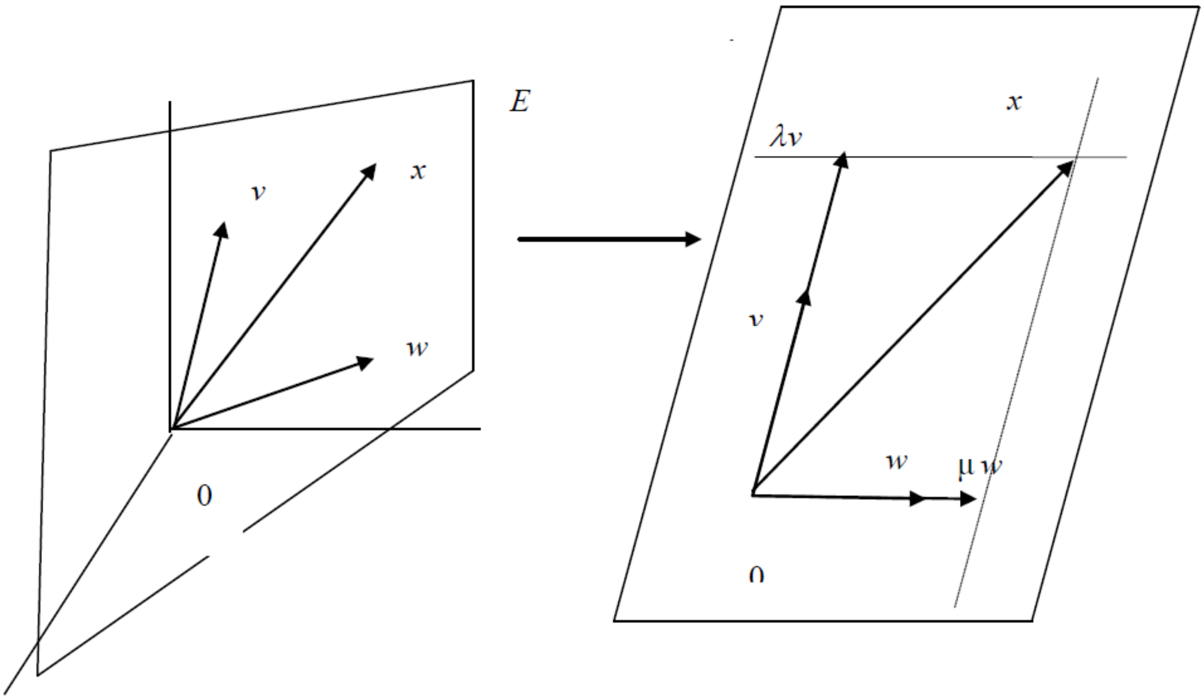
$G=\left\{x\in\mathbb{R}^n \middle| \exists\lambda\in\mathbb{R} : x=a+\lambda(b-a)\right\}$ ή εναλλακτικά $G=\left\{a+\lambda(b-a),\lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

4.2 Επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$

Ας θεωρήσουμε διανύσματα στο χώρο, που ακριβώς όπως τα διανύσματα του επιπέδου μπορούν να ταυτιστούν με τα σημεία του επιπέδου, του $\mathbb{R}^2$, έτσι και τα διανύσματα στο χώρο ταυτίζονται με τα σημεία του χώρου, που περιγράφονται από τον $\mathbb{R}^3$.

4.2.1 Επίπεδο που διέρχεται από το μηδέν

Ας προσπαθήσουμε πάλι να περιγράψουμε με μια εξίσωση τα σημεία του επιπέδου που διέρχονται από το 0 και κάποια σημεία v και w του χώρου.



Σχήμα 8. Απεικόνιση ενός επιπέδου στο χώρο.

Ένα σημείο x αυτού του επιπέδου διακρίνεται από την ιδιότητα ότι μπορώ να το γράψω ως:

x = πολλαπλάσιο του v + πολλαπλάσιο του w ή υπάρχουν κατάλληλα λ και μ τέτοια ώστε: $x = \lambda v + \mu w$

Λέμε: το x γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των v και w με συντελεστές τα λ, μ.

Για να βεβαιωθώ για την παραπάνω ιδιότητα μπορώ να φέρω παράλληλο του w μέσα από το x αυτή θα τμήσει κάπου την ευθεία που διέρχεται από το 0 και το v. Εκεί θα βρίσκεται το ζητούμενο πολλαπλάσιο του v. Παρομοίως μπορώ να βρω και το πολλαπλάσιο του w.

Το επίπεδο E_0 δίνεται από το σύνολο των σημείων που έχουν την ιδιότητα:

$E_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : x = \lambda v + \mu w \right\}$.

Δηλαδή το E_0 είναι το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των v και w.

Αυτό το σύνολο γράφεται και ως $Span(v, w)$.

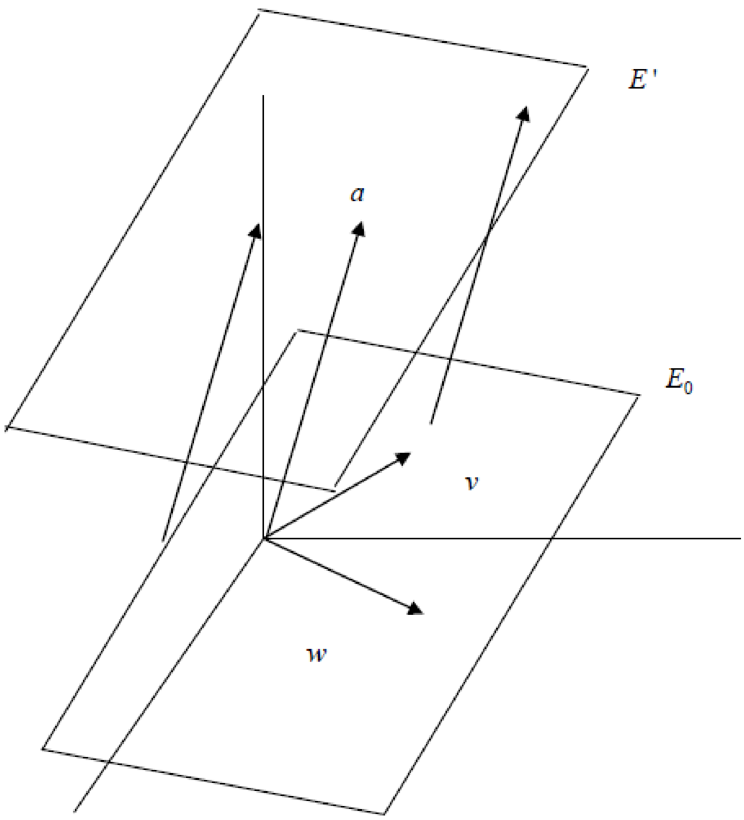
Συνεπώς $E_0 = Span(v, w)$.

Αντίστοιχα με την ευθεία μπορούμε τώρα να πούμε ότι αφήνοντας **δύο** πραγματικούς αριθμούς λ, μ **να «τρέχουν» πάνω στον** $\mathbb{R}$ (και χρησιμοποιώντας αυτούς τους δύο ως συντελεστές σε γραμμικούς συνδυασμούς των v, w) τα σημεία που παίρνουμε $x = \lambda v + \mu w$ **«τρέχουν» πάνω σε ένα επίπεδο** (ή «απλώνουν» ένα επίπεδο, εξ ου και “Span”).

Για ακόμη μία φορά η γραφή του επιπέδου E_0 ως $Span(v, w)$ δεν είναι μοναδική. Θα μπορούσα στη θέση των v και w να χρησιμοποιήσω δύο οποιαδήποτε άλλα μη συγγραμμικά στοιχεία του E_0.

4.2.2 Επίπεδο που δε διέρχεται από το μηδέν

Έστω E' το επίπεδο που διέρχεται από κάποιο a και είναι παράλληλο του $E = Span(v, w)$.



Σχήμα 9. Απεικόνιση του επιπέδου E' στο χώρο.

Τα σημεία του επιπέδου αυτού προκύπτουν αν προσθέσω a στα σημεία του E_0. Αν δηλαδή «μετατοπίσω» το E_0 κατά a.

$$E' = \left\{ x' \in \mathbb{R}^3 \middle| x' = x + a, x \in E_0 \right\} = a + E_0 = \left\{ x' \in \mathbb{R}^3 \middle| \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : x' = a + \lambda v + \mu w \right\}.$$

Σημείωση: Αν θέλω το επίπεδο που περνά από τα σημεία $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, αυτό θα είναι παράλληλο με το επίπεδο $Span(b - a, c - a)$. Περιγράφεται λοιπόν εναλλακτικά ως ως:

$$E' = \left\{ x' \in \mathbb{R}^3 \middle| \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : x' = a + \lambda(b - a) + \mu(c - a) \right\}.$$

Σημείωση: Πάλι η γραφή αυτή δεν είναι μοναδική και οποιαδήποτε 3 άλλα σημεία του επιπέδου θα έδιναν το ίδιο επίπεδο.

4.3 Επίπεδο στον $\mathbb{R}^n$

Άμεση είναι η γενίκευση στον ορισμό του επιπέδου στον $\mathbb{R}^n$:

Ορισμός: Ένα υποσύνολο $E \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται επίπεδο αν υπάρχουν $a, v, w \in \mathbb{R}^n$ τέτοια που να ισχύει:

$$E = \left\{ x \in R^n \middle| \exists \lambda, \mu : x = a + \lambda v + \mu w \right\},$$

δηλαδή το E ταυτίζεται με τη μετατόπιση κατά a του $Span(v, w)$: $E = a + Span(v, w)$.

5. Εσωτερικό γινόμενο και ορθογωνιότητα στον $\mathbb{R}^n$

5.1 Εσωτερικό γινόμενο

Έστω $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ και $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των x και y ως:

$< x, y >:= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \in \mathbb{R}$.

5.1.1 Κανόνες πράξεων

- $< x, y >=< y, x >$.
- $< x + x', y >=< x, y > + < x', y >$.
- $< \lambda x, y >= \lambda < x, y >$ για $\lambda \in \mathbb{R}$.

5.2 Μήκος

Στον $\mathbb{R}^2$ έχω ότι το μήκος ενός διανύσματος $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ δίνεται από $\| x \|= \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}}$.

Αυτό όμως ισούται με $\sqrt{< x, x >}$. Αυτό χρησιμοποιώ ως ορισμό του μήκους και στον $\mathbb{R}^n$.

Αν $x \in \mathbb{R}^n$ τότε το μήκος του x δίνεται από $\| x \|= \sqrt{< x, x >}$.

5.2.1 Ιδιότητες

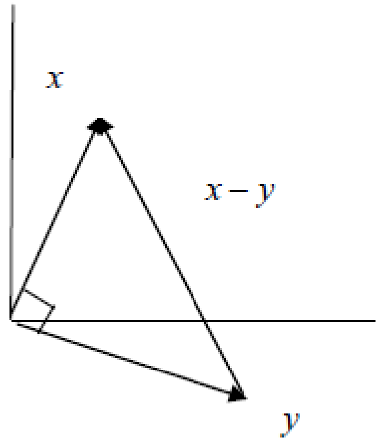
- $\| x \| \geq 0$.
- $\| x \|= 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\| \lambda x \|=| \lambda | \cdot \| x \|, \ \forall \lambda \in R$.

5.3 Ορθογωνιότητα

Στον $\mathbb{R}^2$ έχουμε $\| x - y \|^2 =< x - y, x - y > \ =< x, x > - < x, y > - < y, x > + < y, y >$
$=\| x \|^2 + \| y \|^2 - 2 < x, y >$.

Από το πυθαγόρειο γνωρίζουμε ότι αν $\varphi = 90^o$ τότε $\| x - y \|^2 =\| x \|^2 + \| y \|^2$ και επομένως πρέπει $< x, y >= 0$. Αυτό χρησιμοποιούμε και ως ορισμό της ορθογωνιότητας στον $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός: Για $x, y \in \mathbb{R}^n$ λέμε ότι x και y ορθογώνια και γράφουμε $x \perp y$ όταν $< x, y >= 0$.



Σχήμα 10. Απεικόνιση ορθογώνιων διανυσμάτων.

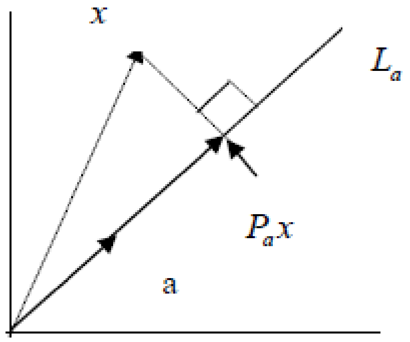
5.4 Εφαρμογή: Προβολή σε ευθεία

Έστω η ευθεία $L_a = Span(a)$ και ένα σημείο $x \notin L_a$. Θέλω να υπολογίσω την προβολή του x στην L_a, την $P_a x$.

Κατ' αρχάς, εφόσον $P_a x \in L_a \Rightarrow \exists \lambda_0 : P_a x = \lambda_0 a$.

Επίσης, $< a, x - P_a x >= 0 \;\Leftrightarrow < a, x - \lambda_0 \alpha >= 0 \;\Leftrightarrow < a, x > - \lambda_0 < a, a >= 0 \;\Leftrightarrow \lambda_0 = \dfrac{< a, x >}{< a, a >}$.

Άρα $P_a x = \lambda_0 a = \dfrac{< a, x >}{< a, a >} \cdot a$.



Σχήμα 11. Απεικόνιση προβολής σε ευθεία.

5.5 Εφαρμογή: Η ανισότητα Cauchy-Schwartz

Έστω $x, a \in \mathbb{R}^n$ και η προβολή του x στην $L_a : P_a x$.

Έχουμε: $x = (x - P_a x) + P_a x$ και άρα $\| x \|^2 =< x, x >=< (x - P_a x) + P_a x, (x - P_a x) + P_a x >$

$= \| x - P_a x \|^2 + \| P_a(x) \|^2 + 2 \underbrace{< x - P_a x, P_a x >}_{0} \;\Rightarrow\; \| P_a(x) \| \leq \| x \|$

$\Rightarrow \quad \left\| \frac{<a,x>}{<a,a>} \cdot a \right\| \leq \| x \| \quad \Rightarrow \quad |<a,x>| \cdot \frac{\| a \|}{\| a \|^2} \leq \| x \| \ \Rightarrow \ |<a,x>| \leq \| x \| \cdot \| a \|$, με ισότητα αν $x = P_a(x) \Leftrightarrow x, a$ συγγραμμικά.

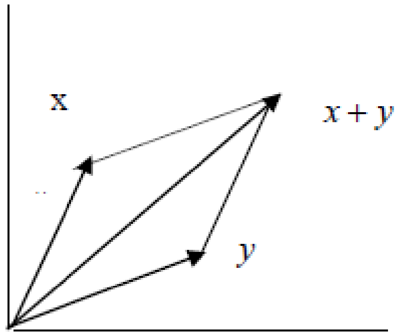
5.6 Τριγωνική ανισότητα

Για $x, y \in R^n$ έχουμε:

$\| x+y \|^2 = < x+y, x+y > = < x, x > +2 < x, y > + < y, y >$

$= \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 < x, y > \ \leq \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 \| x \| \cdot \| y \|$ (Cauchy-Schwartz).

$= [\| x \| + \| y \|]^2 \Rightarrow \| x+y \| \quad \leq \quad \| x \| + \| y \|$.



Σχήμα 12. Απεικόνιση προβολής σε ευθεία.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.