

**ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΑΘΗΝΩΝ**



ATHENS UNIVERSITY  
OF ECONOMICS  
AND BUSINESS

**ΣΧΟΛΗ  
ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ  
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ**

SCHOOL OF  
BUSINESS

**ΤΜΗΜΑ  
ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ &  
ΧΡΗΜΑΤΟ-  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ**  
DEPARTMENT OF  
ACCOUNTING &  
FINANCE

---

# Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα

Ενότητα: Ασκήσεις 4

Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής

---



1. Σκοποί ενότητας .....	5
2. Περιεχόμενα ενότητας.....	5
3. Ασκήσεις (4) .....	5
3.1 Άσκηση 1:.....	5
3.2 Άσκηση 2:.....	5
3.3 Άσκηση 3:.....	5
3.4 Άσκηση 4:.....	6



## 1. Σκοποί ενότητας

Ασκήσεις που βοηθούν στην κατανόηση και την εφαρμογή της θεωρίας της Γραμμικής Άλγεβρας.

## 2. Περιεχόμενα ενότητας

Ασκήσεις σε Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας.

## 3. Ασκήσεις (4)

### 3.1 Άσκηση 1:

1. Απαντήστε στα παρακάτω:

1.1. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Gauss-Jordan για να αντιστρέψετε τους

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.2. Δείξτε ότι ο  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$  δεν έχει αντίστροφο προσπαθώντας να λύσετε το

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 3.2 Άσκηση 2:

2. Απαντήστε στα παρακάτω:

2.1. Εάν  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  και  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  υπολογίστε τους  $A^T \cdot B$ ,  $B^T \cdot A$ ,  $A \cdot B^T$  και  $B \cdot A^T$ .

2.2. Αποδείξτε ότι ακόμη και για παραλληλόγραμμους πίνακες οι  $A \cdot A^T$  και  $A^T \cdot A$  είναι πάντοτε συμμετρικοί. Δείξτε με παράδειγμα ότι αυτοί μπορεί να είναι διαφορετικοί ακόμη και για τετραγωνικούς πίνακες.

### 3.3 Άσκηση 3:

3. Ποια από τα επόμενα υποσύνολα του  $\mathbb{R}^3$  είναι πράγματι υπόχωροι;

3.1. Το επίπεδο των διανυσμάτων με πρώτη συνιστώσα  $b_1 = 0$ .

3.2. Το επίπεδο των διανυσμάτων  $b$  με  $b_1 = 1$ .

3.3. Τα διανύσματα  $b$  με  $b_1 \cdot b_2 = 0$  (αυτή είναι η ένωση δύο υποχώρων του επιπέδου  $b_1 = 0$  με  $b_2 = 0$ ).

3.4. Το μεμονωμένο διάνυσμα  $b = (0,0,0)$ .

3.5. Όλοι οι συνδυασμοί των δυο διανυσμάτων  $x = (1,1,0)$  και  $y = (2,0,1)$ .

3.6. Τα διανύσματα  $(b_1, b_2, b_3)$  που ικανοποιούν την  $b_3 - b_2 + 3 \cdot b_1 = 0$ .

### 3.4 Άσκηση 4:

4. Βρείτε μια βάση των εξής υποχώρων του  $\mathbb{R}^4$ :

4.1. Τα διανύσματα για τα οποία  $x_1 = 2x_4$ .

4.2. Τα διανύσματα για τα οποία  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  και  $x_3 + x_4 = 0$ .

4.3. Τον υπόχωρο που παράγεται από τα  $(1,1,1,1)$ ,  $(1,2,3,4)$  και  $(2,3,4,5)$ .

# Σημειώματα

## Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

## Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Οικονομικό Πανεπιστήμιον Αθηνών, Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος, 2015. Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος. «Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.aueb.gr/modules/document/?course=LOXR100>.

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)  
μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

