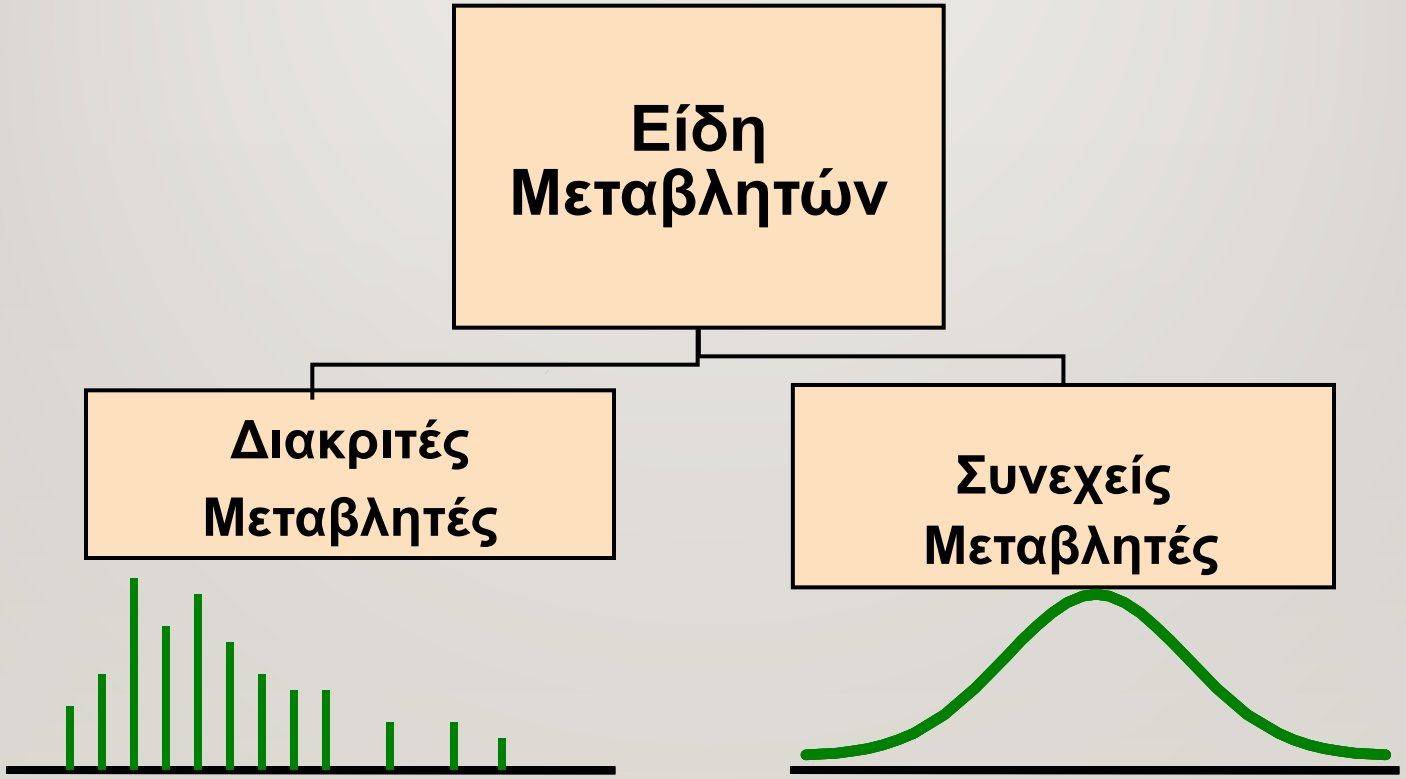
# ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 1

5$^{Ο}$ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

<u>ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ</u>

Σημείωση: Οι διαφάνειες με διαφορετικό χρώμα, όπως αυτή είναι για περαιτέρω μελέτη
Συμβουλευτείτε την ύλη του μαθήματος σας

# Είδη Μεταβλητών



# Ορισμοί

- Οι **διακριτές** μεταβλητές φέρουν αποτελέσματα που προκύπτουν από μια διαδικασία καταμέτρησης

(π.χ. Ο αριθμός των μαθημάτων που επιλέγετε να παρακολουθήσετε).

- Οι **συνεχείς** μεταβλητές φέρουν αποτελέσματα που προκύπτουν από μια μέτρηση

(π.χ. Ο ετήσιος μισθός σας, ή το βάρος σας).

# Συνάρτηση Πιθανότητας-Κατανομή Πιθανότητας-Συνάρτηση Κατανομής μιας Διακριτής Μεταβλητής

- **Συνάρτηση Πιθανότητας:**

Η **<u>συνάρτηση</u>** $\mathrm{p}_x = \Pr(x) = \Pr(X = x)$ με

**πεδίο ορισμού**: τις τιμές της $X$ και

**πεδίο τιμών**: τις ***πιθανότητες*** των τιμών αυτών

- **Κατανομή Πιθανότητας:**

σύνολο των ζευγών (x, $\Pr(X = x)$)

- **Συνάρτηση Κατανομής- Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας :**

Η **<u>συνάρτηση</u>** που εκφράζει την πιθανότητα η X να λάβει οποιαδήποτε τιμή **μικρότερη ή ίση** του α

$$\mathrm{F}(\alpha) = \Pr(X \leq \alpha)\ \forall \alpha \in \mathcal{R}$$

# Ιδιότητες Συνάρτησης Πιθανότητας μιας Διακριτής Μεταβλητής

Η **συνάρτηση πιθανότητας** για μια διακριτή μεταβλητή X έχει τις εξής ιδιότητες:

- Η πιθανότητα εμφάνισης κάθε πιθανού αποτελέσματος είναι **μη αρνητικός** αριθμός

$$\mathrm{p}_x = \Pr(X = x) \geq 0 \text{ για όλα τα } x$$

- Το **Άθροισμα** των Πιθανοτήτων όλων των ενδεχομένων ισούται με 1

$$\sum_x \mathrm{p}_x = \sum_x \Pr(X = x) = 1$$

# Ιδιότητες Συνάρτησης Κατανομής μιας Διακριτής Μεταβλητής

Η **συνάρτηση κατανομής ή αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας** για μια διακριτή μεταβλητή X έχει τις εξής ιδιότητες:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

- $F(\alpha) = \Pr(X \leq a) = \Pr(X\epsilon(-\infty, \alpha] = \sum_{x_i \leq a} \Pr(x_i)\ \forall \alpha \in \mathcal{R}$

  - $0 \leq F(x) \leq 1$ για όλα τα $x$
  - Αν x $\leq$y τότε $F(x) \leq F(y)$

Το γράφημα της Συνάρτησης Κατανομής για μία διακριτή μεταβλητή είναι μία «κλιμακωτή» συνάρτηση με **αριστερά κλειστά** και **δεξιά ανοικτά διαστήματα** όπου το **άλμα** συμβαίνει στις τιμές που έχουν πιθανότητα $\Pr(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

# Συνάρτηση Πιθανότητας-Κατανομή Πιθανότητας-Συνάρτηση Κατανομής Παράδειγμα

Έστω Α το ενδεχόμενο γέννησης αγοριού και Κ το ενδεχόμενο γέννησης κοριτσιού.
Σε κάθε τοκετό γεννιέται **ένα** παιδί.

- Χ: **αριθμός** αγοριών σε 3 τοκετούς

Χ: ποσοτική διακριτή μεταβλητή
x=0,1,2,3

# Συνάρτηση Πιθανότητας-Κατανομή Πιθανότητας-Συνάρτηση Κατανομής Παράδειγμα

Μία μητέρα κάνει 3 τοκετούς όπου σε κάθε τοκετό γεννιέται ένα παιδί

Α το ενδεχόμενο γέννησης αγοριού, Κ το ενδεχόμενο γέννησης κοριτσιού

| Ενδεχόμενο | 1ος τοκετός | 2ος τοκετός | 3ος τοκετός | Αριθμός Αγοριών | Πιθανότητα |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Κ | Κ | Κ | 0 | 1/8 |
| 2 | | | Α | 1 | 1/8 |
| 3 | | Α | Κ | 1 | 1/8 |
| 4 | | | Α | 2 | 1/8 |
| 5 | Α | Κ | Κ | 1 | 1/8 |
| 6 | | | Α | 2 | 1/8 |
| 7 | | Α | Κ | 2 | 1/8 |
| 8 | | | Α | 3 | 1/8 |

Χ: αριθμός αγοριών σε 3 τοκετούς

Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από 8 ενδεχόμενα

# Συνάρτηση Πιθανότητας-Κατανομή Πιθανότητας-Συνάρτηση Κατανομής Παράδειγμα

*(συνέχεια)*

## Συνάρτηση Πιθανότητας

X: αριθμός αγοριών σε 3 τοκετούς

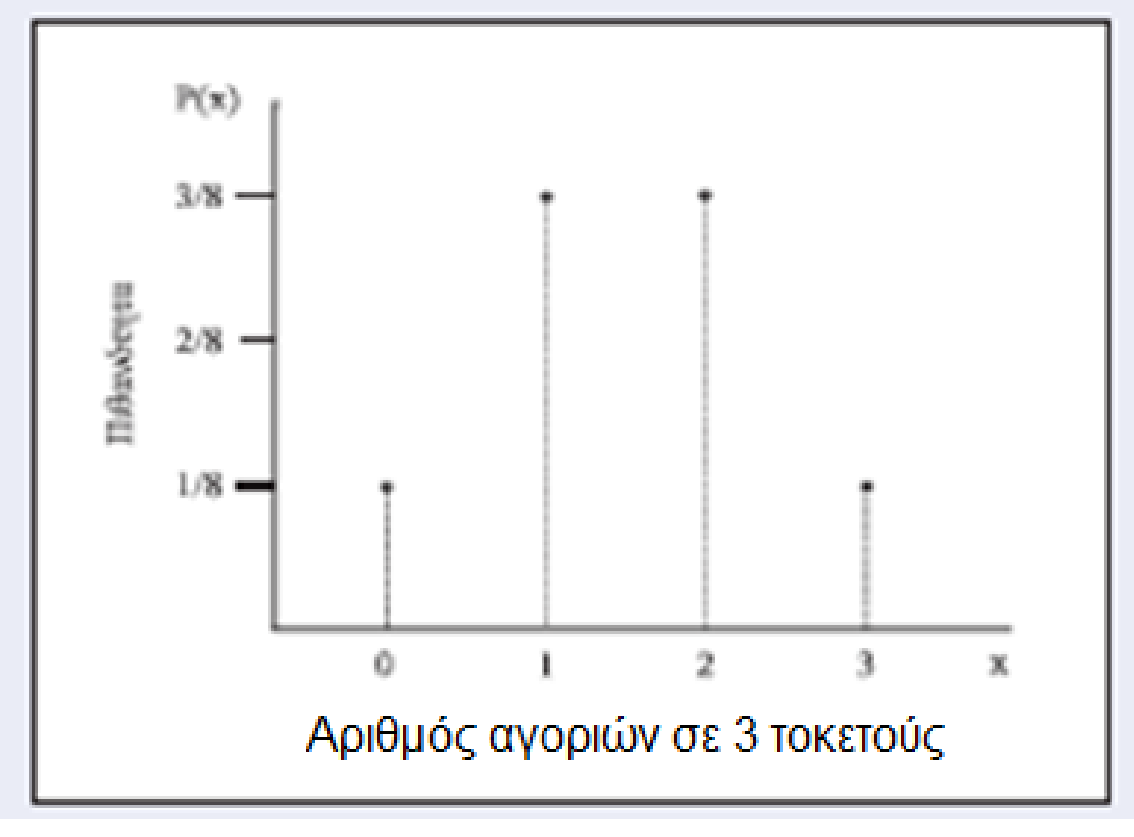
x=0,1,2,3

$$\mathrm{p}_x = \Pr(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, x = 0 \\ \frac{3}{8}, x = 1 \\ \frac{3}{8}, x = 2 \\ \frac{1}{8}, x = 3 \end{cases}$$

# Συνάρτηση Πιθανότητας-Κατανομή Πιθανότητας-Συνάρτηση Κατανομής Παράδειγμα

*(συνέχεια)*

## Διάγραμμα Συνάρτησης Πιθανότητας



# Συνάρτηση Πιθανότητας-Κατανομή Πιθανότητας-Συνάρτηση Κατανομής Παράδειγμα

*(συνέχεια)*

Επιβεβαίωση ιδιοτήτων της **συνάρτηση πιθανότητας**

X: αριθμός αγοριών σε 3 τοκετούς

x=0,1,2,3

$$p_x = \Pr(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, x = 0 \\ \frac{3}{8}, x = 1 \\ \frac{3}{8}, x = 2 \\ \frac{1}{8}, x = 3 \end{cases}$$

$$p_x = \Pr(X = x) \geq 0 \ \forall x \checkmark$$

$$\sum_x p_x = \sum_x \Pr(X = x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1 \checkmark$$

# Συνάρτηση Πιθανότητας-Κατανομή Πιθανότητας-Συνάρτηση Κατανομής Παράδειγμα

*(συνέχεια)*

**Κατανομή Πιθανότητας**

$$\left(\left(0,\frac{1}{8}\right),\left(1,\frac{3}{8}\right),\left(2,\frac{3}{8}\right),\left(3,\frac{1}{8}\right)\right)$$

| x | Πιθανότητα |
|---|---|
| 0 | 1/8 |
| 1 | 3/8 |
| 2 | 3/8 |
| 3 | 1/8 |

# Συνάρτηση Πιθανότητας-Κατανομή Πιθανότητας-Συνάρτηση Κατανομής Παράδειγμα

*(συνέχεια)*

Έστω Α το ενδεχόμενο γέννησης αγοριού και Κ το ενδεχόμενο γέννησης κοριτσιού.

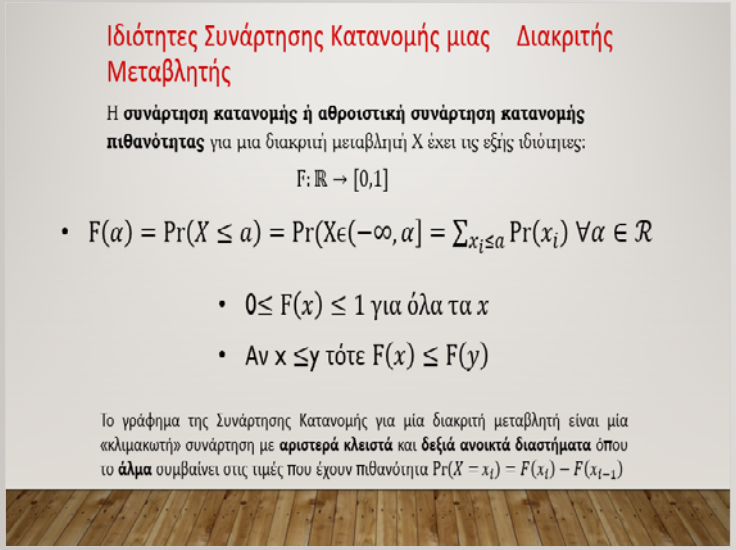
Χ: αριθμός αγοριών σε 3 τοκετούς

- Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής και να παρασταθεί γραφικά

# Συνάρτηση Πιθανότητας-Κατανομή Πιθανότητας-Συνάρτηση Κατανομής Παράδειγμα

*(συνέχεια)*

## Αριστερά κλειστά & Δεξιά ανοικτά διαστήματα




| x | Πιθανότητα |
|---|---|
| 0 | 1/8 |
| 1 | 3/8 |
| 2 | 3/8 |
| 3 | 1/8 |

$F(a) = 0,$ $\quad a<0$

$F(a) = Pr(0) = \frac{1}{8},$ $\quad 0 \le a < 1$

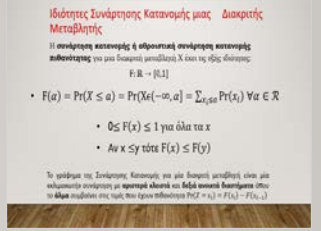
$F(a) = Pr(0) + Pr(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8},$ $\quad 1 \le a < 2$

$F(a) = Pr(0) + Pr(1) + Pr(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8},$ $\quad 2 \le a < 3$

$F(a) = Pr(0) + Pr(1) + Pr(2) + Pr(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1,$ $\quad 3 \le a$

# Συνάρτηση Πιθανότητας-Κατανομή Πιθανότητας-Συνάρτηση Κατανομής Παράδειγμα

*(συνέχεια)*




**Συνάρτηση Κατανομής**

$$F(a)=\begin{cases} 0 & a<0 \\ \frac{1}{8} & 0 \le a < 1 \\ \frac{4}{8} & 1 \le a < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \le a < 3 \\ 1 & 3 \le a \end{cases}$$

# Επιβεβαίωση Ιδιοτήτων Συνάρτησης Κατανομής
## Παράδειγμα

*(συνέχεια)*

$$F(a)=\begin{cases} 0 & a<0 \\ \frac{1}{8} & 0 \le a < 1 \\ \frac{4}{8} & 1 \le a < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \le a < 3 \\ 1 & 3 \le a \end{cases}$$

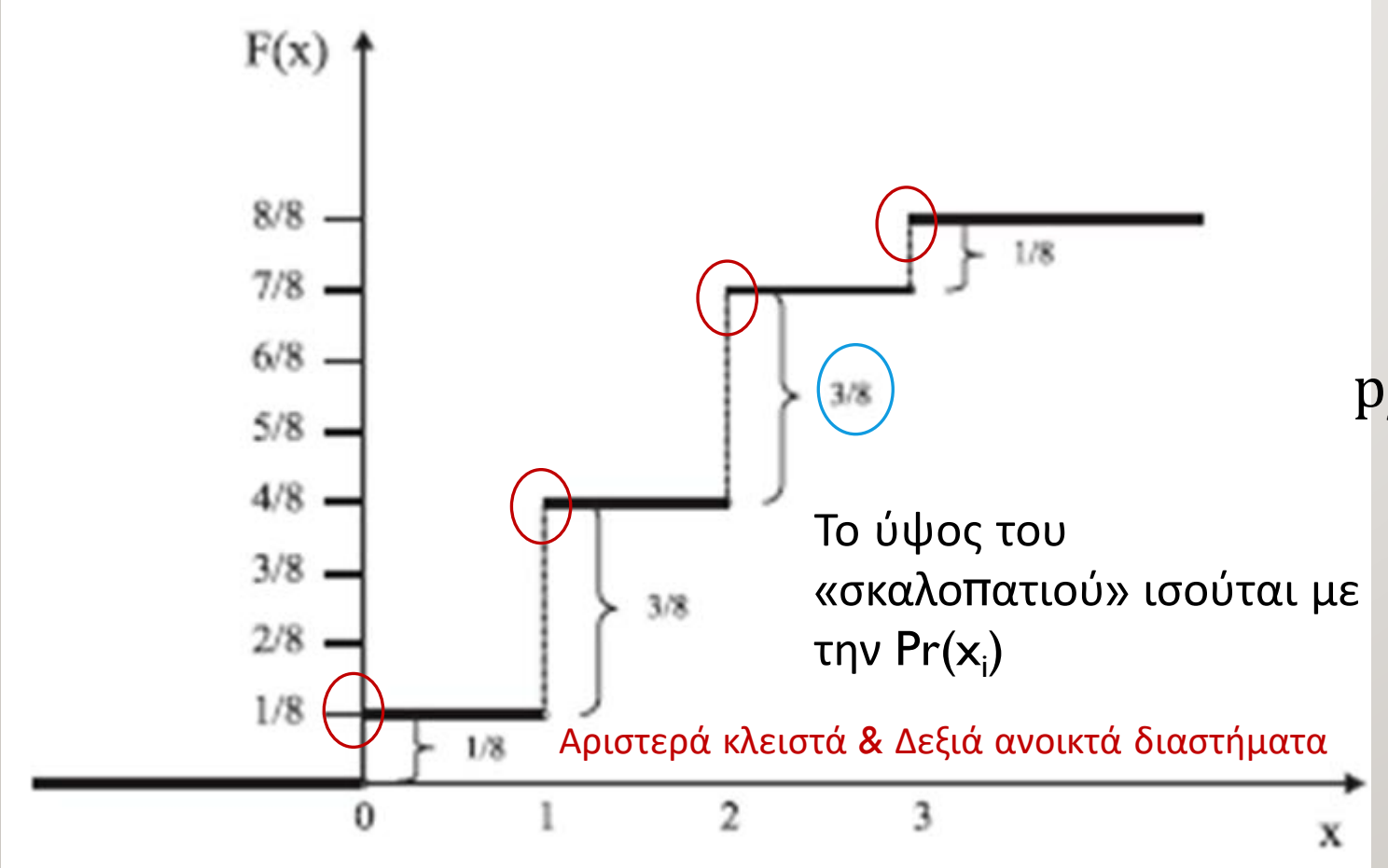
$$\mathrm{F}(x) = \Pr(X \le x) = \sum_{x_i \le x} Pr(x_i) \checkmark$$

$0 \le \mathrm{F}(x) \le 1$ για όλα τα $x$ ✓

Αν x ≤y τότε $\mathrm{F}(x) \le \mathrm{F}(y)$ ✓

# Υπολογισμός της Συνάρτηση Πιθανότητας μέσω του Γραφήματος της Συνάρτησης Κατανομής Παράδειγμα

*(συνέχεια)*




$$p_x = \Pr(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, x = 0 \\ \frac{3}{8}, x = 1 \\ \frac{3}{8}, x = 2 \\ \frac{1}{8}, x = 3 \end{cases}$$

# Συνάρτησης Κατανομής Παράδειγμα

*(συνέχεια)*

$$\Pr(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

$$F(a) = \begin{cases} 0 & a<0 \\ \frac{1}{8} & 0 \le a < 1 \\ \frac{4}{8} & 1 \le a < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \le a < 3 \\ 1 & 3 \le a \end{cases}$$

**Κατανομή Πιθανότητας**

$$\mathrm{p}_x = \Pr(X = x) = \begin{cases} F(0) = \frac{1}{8}, x = 0 \\ F(1) - F(0) = \frac{3}{8}, x = 1 \\ F(2) - F(1) = \frac{3}{8}, x = 2 \\ F(3) - F(2) = \frac{1}{8}, x = 3 \end{cases}$$

# Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

Ρίχνουμε ένα ζάρι αρκετές φορές (2,10,100,1000)

και μας ενδιαφέρει η όψη του ζαριού να είναι 4.

| n | Σχετική Συχνότητα | Πιθανότητα |
|---|---|---|
| 2 | 1/2=0.5 | Pr(X=4)=1/6=0.167 |
| 10 | 0 | |
| 100 | 18/100=0.18 | |
| 1000 | 189/1000=0.189 | |
| 10000 | 1661/10000=0.166 | |
| 24000 | 4045/24000=0.167 | |

# Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

*(συνέχεια)*

Όσο αυξάνει ο αριθμός των επαναλήψεων του πειράματος

- η διαφορά της σχετικής συχνότητας από την πιθανότητα προσεγγίζει το μηδέν
- η εμπειρική πιθανότητα (σχετική συχνότητα) προσεγγίζει τη θεωρητική πιθανότητα

# Αναμενόμενη Τιμή Μιας Διακριτής Μεταβλητής (Μέση τιμή της Κατανομής, μ)

- Αναμενόμενη τιμή μιας διακριτής μεταβλητής (Σταθμισμένος μέσος όρος)

$$\mu = \mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i)$$

**Κατανομή Πιθανότητας**

| Ημερήσιες διακοπές στο Δίκτυο υπολογιστών ($x_i$) | Πιθανότητα $P(X = x_i)$ | $x_i P(X = x_i)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.35 | (0)(0.35) = 0.00 |
| 1 | 0.25 | (1)(0.25) = 0.25 |
| 2 | 0.20 | (2)(0.20) = 0.40 |
| 3 | 0.10 | (3)(0.10) = 0.30 |
| 4 | 0.05 | (4)(0.05) = 0.20 |
| 5 | 0.05 | (5)(0.05) = 0.25 |
| | **1.00** | μ = E(X) = 1.40 |

*X*: αριθμός διακοπών στο Δίκτυο υπολογιστών

# Αναμενόμενη Τιμή Μιας Διακριτής Μεταβλητής (Μέση τιμή της Κατανομής, μ)

Αναμενόμενη τιμή μιας διακριτής μεταβλητής

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i) = 1.4$$

Η αναμενόμενη τιμή ημερήσιας διακοπής στο δίκτυο είναι 1.4 διακοπές

Ερμηνεία: Η εταιρεία ηλεκτροδότησης **κατά μέσο όρο αναμένει** 1.4 διακοπές ηλεκτροδότησης την ημέρα <u>αν πραγματοποιεί την ηλεκτροδότηση για ένα μεγάλο πλήθος ημερών</u>

# Διακριτές Μεταβλητές: Διασπορά-Διακύμανση

- Διακύμανση μιας διακριτής μεταβλητής

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i)$$

- Τυπική απόκλιση μιας διακριτής μεταβλητής

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i)}$$

όπου : $E(X)$ : Αναμενόμενη τιμή της διακριτής μεταβλητής X

$x_i$ : το i–οστό αποτέλεσμα της X

$P(X=x_i)$ : Πιθανότητα της i-οστής τιμής του X

# 1$^{O}$ Πρόβλημα

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας με τους αριθμούς των ημερών που χρειάζεται μια επιχείρηση για να εκτελέσει μια παραγγελία και την αντίστοιχη πιθανότητα με την οποία συμβαίνει αυτό.

| Αριθμός ημερών | $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Πιθανότητα | $P(x_i)$ | 0,05 | 0,25 | 0,35 | 0,15 | 0,1 |

Κάποιος ισχυρίζεται ότι η συνάρτησης πιθανότητας είναι η εξής:

$$p_x = P(X = x) = \begin{cases} 0,05 & x=1 \\ 0,25 & x=2 \\ 0,35 & x=3 \\ 0,15 & x=4 \\ 0,10 & x=5 \end{cases}$$

**Συμφωνείτε?**

## Λύση

Θα ελέγξουμε τις **ιδιότητες** της συνάρτησης πιθανότητας.

Α) Παρατηρούμε ότι ισχύει $P(X = x) \geq 0; x = 0,1,2,3,4,5$

Β)

$$\sum_x P(X = x) = 0,05 + 0,25 + 0,35 + 0,15 + 0,1 = 0,9 \neq 1$$

Άρα δεν αποτελεί συνάρτηση πιθανότητας.

## 2ο Πρόβλημα

Από σχετική εμπειρική έρευνα προέκυψε η ακόλουθη κατανομή πιθανοτήτων Χ : αριθμός των παιδιών ανά οικογένεια.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | >=4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x_i)$ | 0,05 | 0,25 | 0,45 | 0,15 | 0,1 |

Ζητούνται:

a) Να επιβεβαιωθεί ότι παραπάνω πίνακας αποτελεί συνάρτηση πιθανότητας.

b) Από τη συνάρτηση πιθανότητας να γίνει το γράφημα πιθανότητας.

# Λύση

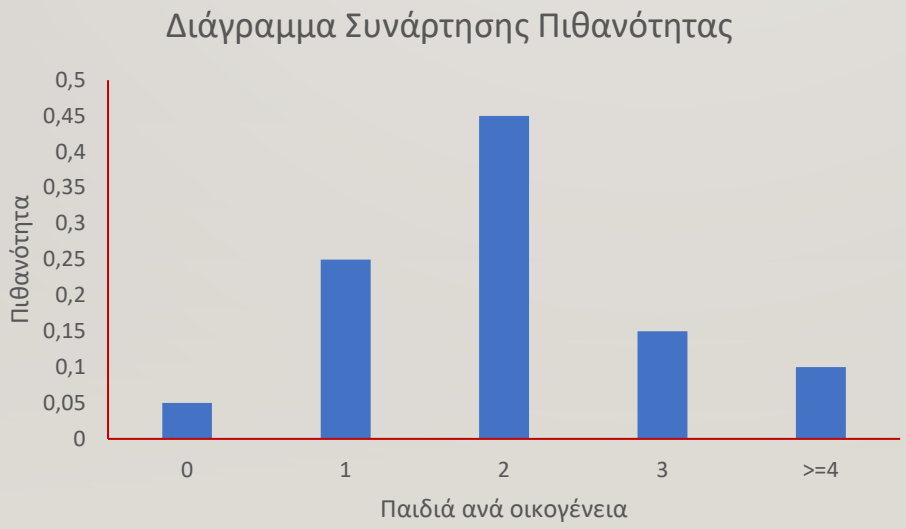
Α) Παρατηρούμε ότι:

$$P(X = x) \geq 0; x = 0,1,2,3,4, \ldots$$

$$\sum_{x} P(X = x) = 0,05 + 0,25 + 0,45 + 0,15 + 0,10 = 1$$

$$P(X=x)= \begin{cases} 0,05; x = 0 \\ 0,25; x = 1 \\ 0,45; x = 2 \\ 0,15; x = 3 \\ 0,10; x \geq 4 \end{cases}$$

Συνεπώς ο πίνακας αποτελεί συνάρτηση πιθανότητας



## 3Ο Πρόβλημα

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας με τις τιμές της συνάρτησης κατανομής, με τους αριθμούς των περιστατικών x που θα χρειαστούν κρεβάτι στην εντατική στη διάρκεια μιας εφημερίας ενός μεγάλου νοσοκομείου.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x_i)$ | 0,01 | 0,04 | 0,1 | 0,43 | 0,8 | 0,91 | 0,99 | 1 |

Ζητούνται:

a) Να βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας.

b) Αν το νοσοκομείο έχει 5 κρεβάτια εντατικής, να υπολογίσετε την πιθανότητα τα κρεβάτια να μην επαρκούν.

# Λύση

Γενικά γνωρίζουμε ότι:

$$p_x = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i - 1)$$

Άρα η συνάρτηση πιθανότητας μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x_i)$ | 0,01 | 0,04 | 0,1 | 0,43 | 0,8 | 0,91 | 0,99 | 1 |

$$p_x = P(X = x) = \begin{cases} F(0) = 0,01 & x=0 \\ F(1) - F(0) = 0,04 - 0,01 = 0,03 & x=1 \\ F(2) - F(1) = 0,10 - 0,04 = 0,06 & x=2 \\ F(3) - F(2) = 0,43 - 0,10 = 0,33 & x=3 \\ F(4) - F(3) = 0,80 - 0,43 = 0,37 & x=4 \\ F(5) - F(4) = 0,91 - 0,80 = 0,11 & x=5 \\ F(6) - F(5) = 0,99 - 0,91 = 0,08 & x=6 \\ F(7) - F(6) = 1,00 - 0,99 = 0,01 & x=7 \end{cases}$$

# Λύση

Γενικά γνωρίζουμε ότι:

$$p_x = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i - 1)$$

Άρα η συνάρτηση πιθανότητας μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x_i)$ | 0,01 | 0,04 | 0,1 | 0,43 | 0,8 | 0,91 | 0,99 | 1 |

$$p_x = P(X = x) = \begin{cases} F(0) = 0,01 & x=0 \\ F(1) - F(0) = 0,04 - 0,01 = 0,03 & x=1 \\ F(2) - F(1) = 0,10 - 0,04 = 0,06 & x=2 \\ F(3) - F(2) = 0,43 - 0,10 = 0,33 & x=3 \\ F(4) - F(3) = 0,80 - 0,43 = 0,37 & x=4 \\ F(5) - F(4) = 0,91 - 0,80 = 0,11 & x=5 \\ F(6) - F(5) = 0,99 - 0,91 = 0,08 & x=6 \\ F(7) - F(6) = 1,00 - 0,99 = 0,01 & x=7 \end{cases}$$

Αν το νοσοκομείο έχει 5 κρεβάτια εντατικής, να υπολογίσετε την πιθανότητα τα κρεβάτια να μην επαρκέσουν.
Για να μην επαρκέσουν τα κρεβάτια πρέπει x>5, οπότε υπολογίζουμε:

$$P(X > 5) = 1 - P(X \le 5) = 1 - F(5) = 1 - 0,91 = 0,09$$

$$\acute{\eta} \qquad P(X > 5) = P(X = 6) + P(X = 7) = 0,08 + 0,01 = 0,09$$

# 4ο Πρόβλημα

Σε τυχερό παιχνίδι ρίχνεται ένα ζάρι και έστω Χ το χρηματικό ποσό σε ευρώ που αναλογεί στον παίχτη σε κάθε ρίψη του ζαριού. Αν η κατανομή πιθανοτήτων της Χ είναι η ακόλουθη να υπολογιστεί η αναμενόμενη τιμή, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση της Χ.

| όψη | $x_i$ | $P(x_i)$ |
|---|---|---|
| 1 | -10 | 1/6 |
| 2 | -2 | 1/6 |
| 3 | -2 | 1/6 |
| 4 | 4 | 1/6 |
| 5 | 10 | 1/6 |
| 6 | 21 | 1/6 |

## Λύση

Η αναμενόμενη τιμή της Χ είναι:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i P(x_i) = -10\left(\frac{1}{6}\right)+(-2)\left(\frac{1}{6}\right)+(-2)\left(\frac{1}{6}\right)+4\left(\frac{1}{6}\right)+10\left(\frac{1}{6}\right)+21\left(\frac{1}{6}\right)=$$

$$=-\frac{10}{6}-\frac{2}{6}-\frac{2}{6}+\frac{4}{6}+\frac{10}{6}+\frac{21}{6}=3,5$$

Και η διακύμανσή της είναι:

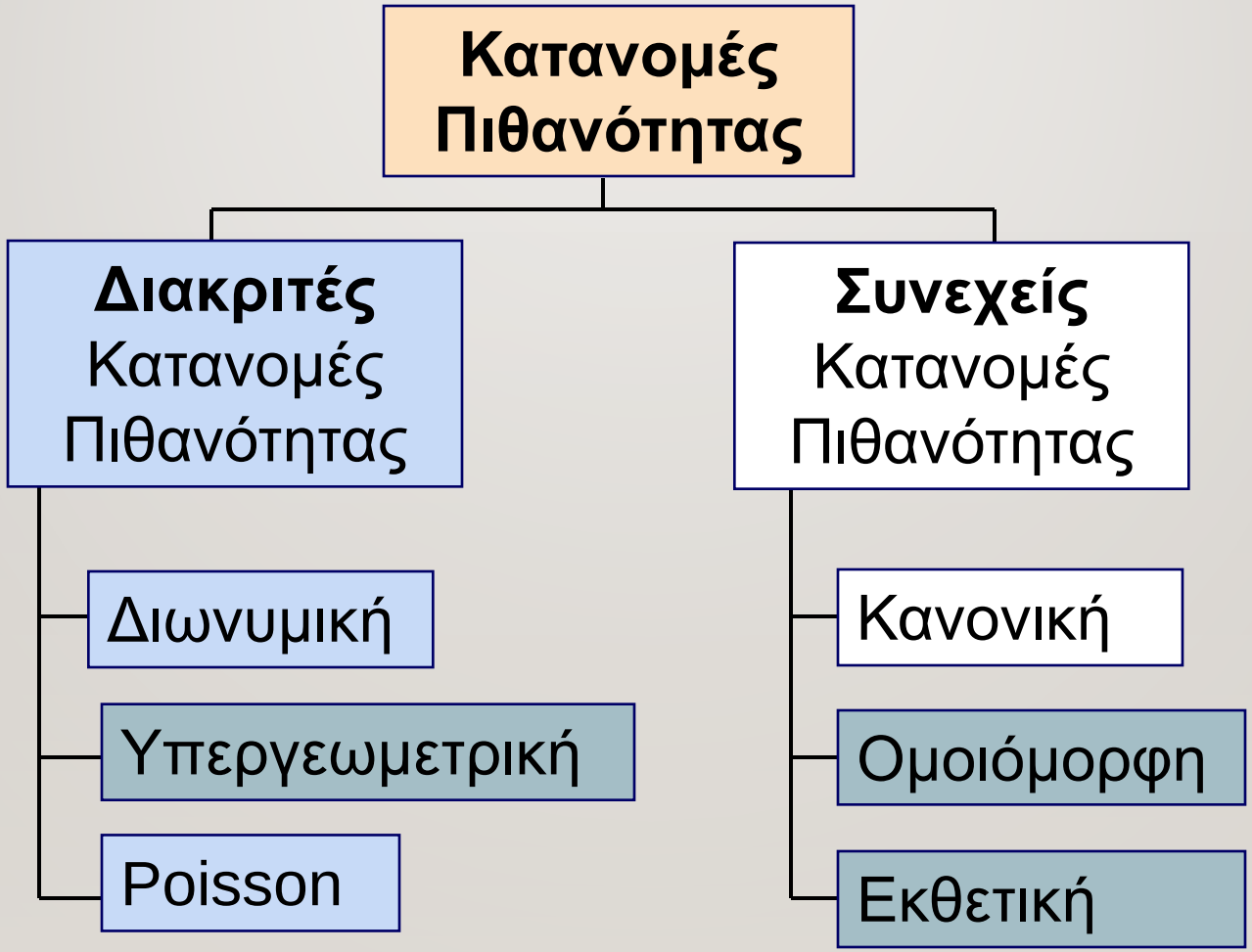
$$Var(X)=\underbrace{\sum_{i=1}^{6} x_i^2 P(x_i)}_{\boxed{E(X^2)}}-[E(X)]^2=(-10)^2\left(\frac{1}{6}\right)+(-2)^2\left(\frac{1}{6}\right)+(-2)^2\left(\frac{1}{6}\right)+4^2\left(\frac{1}{6}\right)+10^2\left(\frac{1}{6}\right)+21^2\left(\frac{1}{6}\right)-(3,5)^2=$$

$$=\frac{100}{6}+\frac{4}{6}+\frac{4}{6}+\frac{16}{6}+\frac{100}{6}+\frac{441}{6}-(3,5)^2=98,58$$

Οπότε η τυπική απόκλιση ισούται με

$$\sigma_\chi=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{98,58}=9,93$$

# Κατανομές Πιθανότητας



# Κατανομές Πιθανότητας

**Διακριτές** Κατανομές Πιθανότητας

- Διωνυμική

**Διωνυμική-Binomial** B(n,p) – η τ.μ. X είναι ο αριθμός των επιτυχιών (**x**) σε **n** ανεξάρτητες και πανομοιότυπες δοκιμές, όπου κάθε δοκιμή έχει σταθερή πιθανότητα επιτυχίας **p**

$$f(x;n,p)=\Pr(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$x = 0,1,\dots,n$$

# Διωνυμική Κατανομή Πιθανότητας

- **Σταθερός** αριθμός επαναλήψεων, *n*
  - Π.χ., 15 ρίψεις νομίσματος;10 λαμπτήρες από μια αποθήκη
- Το “ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει” **συμβαίνει** ή δεν συμβαίνει
  - Π.χ., κορώνα  ή γράμματα σε κάθε στρίψιμο ενός νομίσματος.
  - Η λάμπα μπορεί να είναι ελαττωματική ή όχι.

Δεδομένου ότι οι δύο αυτές κατηγορίες είναι αμοιβαία αποκλειόμενες και εξαντλητικές

- Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το υπό εξέταση ενδεχόμενο συμβολίζεται με ***p***, και η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το υπό εξέταση ενδεχόμενο συμβολίζεται με **(1 – *p*)**.

- Η πιθανότητα εμφάνισης ενός υπό εξέταση ενδεχόμενου (*p*) είναι **σταθερή** για όλες τις επαναλήψεις.
  - Η πιθανότητα εμφάνισης «γράμματα» είναι η ίδια σε κάθε στρίψιμο του νομίσματος

# Διωνυμική Κατανομή Πιθανότητας

*(συνέχεια)*

- Οι παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες
  - Το αποτέλεσμα μιας παρατήρησης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της άλλης
  - Δύο μέθοδοι δειγματοληψίας παρέχουν ανεξαρτησία
    - Άπειρος πληθυσμός χωρίς αντικατάσταση
    - Πεπερασμένος πληθυσμός με αντικατάσταση

# Συνάρτηση πιθανότητας (probability distribution function) **Διωνυμικής** Κατανομής

$$Pr(X=x)=\binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}, x=0,1,\ldots,n$$

X: αριθμός «επιτυχιών»

$E(X) = np$

$Var(X) = np(1-p)$

P(X=x|n,p) = η πιθανότητα εμφάνισης των **x** υπό εξέταση ενδεχόμενων σε δείγμα **n** παρατηρήσεων με πιθανότητα εμφάνισης του υπό εξέταση ενδεχόμενου ***p*** σε κάθε δοκιμή.

x = αριθμός εμφάνισης του υπό εξέταση ενδεχόμενου στο δείγμα,
(x = 0, 1, 2, ..., n)

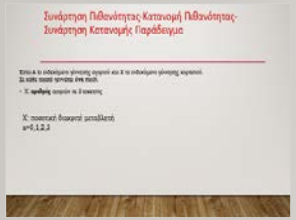
n = αριθμός παρατηρήσεων (μέγεθος δείγματος)

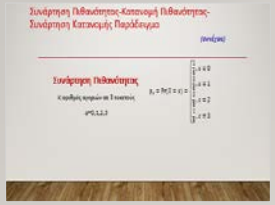
p = πιθανότητα εμφάνισης του υπό εξέταση ενδεχόμενου

# Πιθανές Εφαρμογές της Διωνυμικής Κατανομής

- Ο προσδιορισμός του **αριθμού** των κεφαλών (Κ) σε $n$ = 10 ρίψεις ενός νομίσματος.
- Ο προσδιορισμός του **αριθμού** των αγοριών σε $n$ = 200 γεννήσεις
- Ο προσδιορισμός του **αριθμού** των επιτυχόντων σε $n$ = 150 υποψήφιους
- Ο προσδιορισμός του **αριθμού** των ενόχων σε $n$ = 50 άτομα φερόμενα ως δράστες

# Παράδειγμα της Διωνυμικής Κατανομής

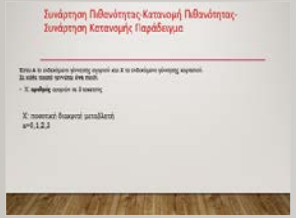




Ποια η πιθανότητα σε 3 τοκετούς να γεννηθεί 1 αγόρι;

- **Σταθερός** αριθμός επαναλήψεων, $n$ =3
- Το "ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει" –γέννηση αγοριού-**συμβαίνει** ή δεν συμβαίνει
- Η πιθανότητα εμφάνισης ενός υπό εξέταση ενδεχόμενου ($p$) είναι **σταθερή** για όλες τις επαναλήψεις. Η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι είναι $p$=1/2, σταθερή σε κάθε τοκετό (σε κάθε τοκετό γεννιέται **ένα** παιδί.

# Παράδειγμα της Διωνυμικής Κατανομής



Ποια η πιθανότητα σε 3 τοκετούς να γεννηθεί 1 αγόρι;

$n=3, p=1/2, x=1$

X: # Αγοριών$\sim Bin(n=3, p=1/2)$

$$P(X=1) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{3!}{1!(3-1)!} (0.5)^1 (1-0.5)^{3-1}$$

$$= 0.375 = \frac{3}{8}$$

# Παράδειγμα της Διωνυμικής Κατανομής

Έστω ότι η πιθανότητα αγοράς ενός ελαττωματικού υπολογιστή είναι 0.02. Ποια είναι η πιθανότητα αγοράς **δύο** ελαττωματικών υπολογιστών από ένα δείγμα 10 υπολογιστών?

X: # Ελαττωματικών$\sim Bin(n = 10, p = 0{,}02)$

$x = 2, n = 10, p = 0.02$

- **Σταθερός** αριθμός επαναλήψεων, $n$=10
- Το "ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει" – ελαττωματικό-**συμβαίνει** ή δεν συμβαίνει
- Η πιθανότητα εμφάνισης ενός υπό εξέταση ενδεχόμενου ($p$) είναι **σταθερή** για όλες τις επαναλήψεις. Η πιθανότητα να αγοράσω ελαττωματικό είναι p=0,02, σταθερή σε κάθε αγορά

$$P(X = 2|10, 0.02) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{10!}{2!(10-2)!} (.02)^2 (1-.02)^{10-2}$$

$$= (45)(.0004)(.8508)$$

$$= .01531$$

## 5ο Πρόβλημα

Σε ένα εργοστάσιο παραγωγής ζαχαρωτών παράγονται ζαχαρωτά δύο χρωμάτων κόκκινα και πράσινα σε αναλογία δύο προς τρία. Από τη γραμμή παραγωγής επιλέγουμε με τυχαίο τρόπο ζαχαρωτά και των δύο χρωμάτων, τα οποία τοποθετούμε σε συσκευασίες των 10 τεμαχίων.

i. Ποια η πιθανότητα να βρεθούν σε μια τυχαία επιλεγμένη συσκευασία ακριβώς 5 κόκκινα ζαχαρωτά;
ii. Ποια η πιθανότητα να βρεθούν σε μια τυχαία επιλεγμένη συσκευασία τουλάχιστον 3 κόκκινα ζαχαρωτά;
iii. Ποια η πιθανότητα να βρεθούν σε μια τυχαία επιλεγμένη συσκευασία το πολύ 2 κόκκινα ζαχαρωτά;
iv. Ποια η πιθανότητα να βρεθούν σε μια τυχαία επιλεγμένη συσκευασία ζαχαρωτά ενός μόνον χρώματος;
v. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός κόκκινων ζαχαρωτών σε μια συσκευασία των 10;

# Λύση

Η καταγραφή του χρώματος ενός τυχαία επιλεγμένου ζαχαρωτού από τη γραμμή παραγωγής είναι ένα τυχαίο πείραμα.
Κάθε ζαχαρωτό μπορεί να είναι κόκκινο (Κ), το οποίο συμβατικά θεωρούμε ως επιτυχία, ή πράσινο (Π).

Δίνεται ότι Ρ(Κ)=2/5=0,4 και Ρ(Π)=1-2/5=3/5=0,6.

- **Σταθερός** αριθμός επαναλήψεων, $n$=10

- Το "ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει" –Κόκκινο-**συμβαίνει** ή δεν συμβαίνει
- Η πιθανότητα εμφάνισης ενός υπό εξέταση ενδεχόμενου ($p$) είναι **σταθερή** για όλες τις επαναλήψεις. Η πιθανότητα να επιλεγεί Κόκκινο είναι $p$=0,4 σταθερή σε κάθε συλλογή (επιλογή) ζαχαρωτού

Αν συμβολίσουμε με **Χ** το συνολικό **αριθμό** επιτυχιών στις 10 (ανεξάρτητες) επαναλήψεις του πειράματος, δηλαδή στη συλλογή 10 ζαχαρωτών για τη δημιουργία μιας συσκευασίας, τότε είναι προφανές ότι η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί τη **Διωνυμική** κατανομή με **παραμέτρους** $n$=10 και $p$=0,4 δηλαδή, Χ ~ Bin(10, 0,4). Έχουμε λοιπόν:

# Λύση

X ~ B(10, 0,4).

**i.** Ποια η πιθανότητα να βρεθούν σε μια τυχαία επιλεγμένη συσκευασία **ακριβώς 5 κόκκινα** ζαχαρωτά**;**

$$i)\, P(X=5)=\frac{10!}{5!(10-5)!}(0,4)^5(1-0,4)^{10-5}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot .....\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot .....\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot .....\cdot 5}=252\cdot(0,4)^5\cdot(0,6)^5\cong 0,2008$$

# Λύση

X ~ B(10, 0,4).

ii. Ποια η πιθανότητα να βρεθούν σε μια τυχαία επιλεγμένη συσκευασία **τουλάχιστον 3 κόκκινα** ζαχαρωτά;

$$\boxed{P(X \le 2)}$$

$$ii)\ P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \left[\overbrace{P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)}\right]$$

Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων έχουμε ότι:

$$P(X=0) = \frac{10!}{0!(10-0)!}(0,4)^0(1-0,4)^{10-0} = 0,6^{10} \cong 0,006$$

$$P(X=1) = \frac{10!}{1!(10-1)!}(0,4)^1(1-0,4)^{10-1} = 10 \cdot 0,4 \cdot 0,6^9 \cong 0,0403$$

$$P(X=2) = \frac{10!}{2!(10-2)!}(0,4)^2(1-0,4)^{10-2} = 45 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^8 \cong 0,1209$$

Άρα έχουμε ότι: $P(X \ge 3) = 1 - \left[\underbrace{0,006 + 0,0403 + 0,1209}_{0,167}\right] = 0,8328$

# Λύση

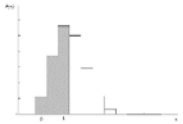
X ~ B(10, 0,4).

ii. Ποια η πιθανότητα να βρεθούν σε μια τυχαία επιλεγμένη συσκευασία **τουλάχιστον 3 κόκκινα** ζαχαρωτά;

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$$

Για τον υπολογισμό από τον Πίνακα έχουμε: $P(X \leq 2) = 0{,}167$

**Πίνακας 2.** Αθροιστικές Πιθανότητες Διωνυμικής Κατανομής



Τα στοιχεία του πίνακα εκφράζουν τις αθροιστικές πιθανότητες $P(X \leq k)$, όπου η $X$ ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n, p$, και οι οποίες παριστάνονται από το εμβαδόν των γραμμοσκιασμένων στηλών.

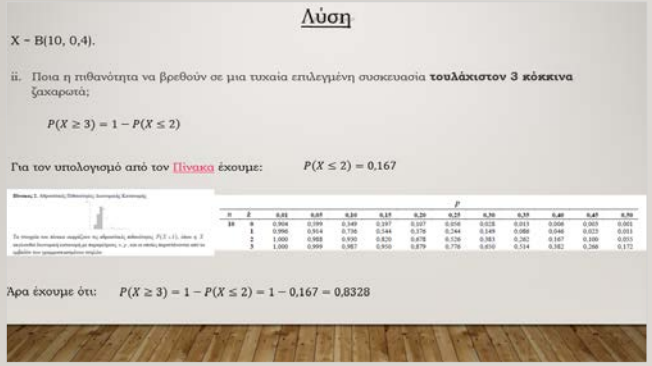
| | | $p$ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $k$ | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 |
| 10 | 0 | 0,904 | 0,599 | 0,349 | 0,197 | 0,107 | 0,056 | 0,028 | 0,013 | 0,006 | 0,003 | 0,001 |
| | 1 | 0,996 | 0,914 | 0,736 | 0,544 | 0,376 | 0,244 | 0,149 | 0,086 | 0,046 | 0,023 | 0,011 |
| | 2 | 1,000 | 0,988 | 0,930 | 0,820 | 0,678 | 0,526 | 0,383 | 0,262 | 0,167 | 0,100 | 0,055 |
| | 3 | 1,000 | 0,999 | 0,987 | 0,950 | 0,879 | 0,776 | 0,650 | 0,514 | 0,382 | 0,266 | 0,172 |

Άρα έχουμε ότι: $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}167 = 0{,}8328$

X ~ B(10, 0,4).

iii. Ποια η πιθανότητα να βρεθούν σε μια τυχαία επιλεγμένη συσκευασία το **πολύ 2 κόκκινα** ζαχαρωτά;

$$iii)\, P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,006 + 0,0403 + 0,1209 = 0,1672$$



Λύση

X ~ B(10, 0,4).

ii. Ποια η πιθανότητα να βρεθούν σε μια τυχαία επιλεγμένη συσκευασία **τουλάχιστον 3 κόκκινα** ζαχαρωτά;

$P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2)$

Για τον υπολογισμό από τον Πίνακα έχουμε: $P(X \le 2) = 0,167$

| | | p | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | x | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 |
| 10 | 0 | 0,904 | 0,599 | 0,349 | 0,197 | 0,107 | 0,056 | 0,028 | 0,013 | 0,006 | 0,003 | 0,001 |
| | 1 | 0,996 | 0,914 | 0,736 | 0,544 | 0,376 | 0,244 | 0,149 | 0,086 | 0,046 | 0,023 | 0,011 |
| | 2 | 1,000 | 0,988 | 0,930 | 0,820 | 0,678 | 0,526 | 0,383 | 0,262 | 0,167 | 0,100 | 0,055 |
| | 3 | 1,000 | 0,999 | 0,987 | 0,950 | 0,879 | 0,776 | 0,650 | 0,514 | 0,382 | 0,266 | 0,172 |

Άρα έχουμε ότι: $P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2) = 1 - 0,167 = 0,8328$

iv. Ποια η πιθανότητα να βρεθούν σε μια τυχαία επιλεγμένη συσκευασία **ζαχαρωτά ενός μόνο χρώματος;**

Ζαχαρωτά ενός μόνο χρώματος σημαίνει ότι όλα είναι κόκκινα (δηλαδή x=10) ή όλα είναι πράσινα (δηλαδή x=0). Τα δύο ενδεχόμενα είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα, άρα έχουμε ότι:

$$P(X=0 \quad ή \quad X=10)=P(X=0)+P(X=10)$$

Υπολογίζουμε την P(X=10), καθώς την P(X=0) την έχουμε ήδη υπολογίσει στο ερώτημα i.

$$P(X=0)=\frac{10!}{0!(10-0)!}(0,4)^0(1-0,4)^{10-0}=0,6^{10}\cong 0,006$$

$$P(X=10)=\frac{10!}{10!(10-10)!}(0,4)^{10}(1-0,4)^0=1\cdot 0,4^{10}\cdot 1\cong 0,0001$$

Συνεπώς:

$$P(X=0 \quad ή \quad X=10)=P(X=0)+P(X=10)=0,006+0,0001=0,0061$$

v. Ποιος είναι **ο αναμενόμενος αριθμός κόκκινων** ζαχαρωτών σε μια συσκευασία των 10;

Ο αναμενόμενος αριθμός κόκκινων ζαχαρωτών ανά συσκευασία 10 ζαχαρωτών είναι η μέση τιμή της συγκεκριμένης κατανομής.

$$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0,4 = 4$$

Συνεπώς αναμένουμε κατά μέσο όρο 4 κόκκινα ζαχαρωτά στη συσκευασία των 10.

# Κατανομές Πιθανότητας

**Διακριτές** Κατανομές Πιθανότητας

- Poisson

**Poisson** P(λ) **-** η τ.μ. X είναι ο αριθμός των εμφανίσεων ενός γεγονότος σε ένα **προκαθορισμένο διάστημα χρόνου/χώρου**, με **σταθερό μέσο όρο εμφάνισης λ** για αυτό το διάστημα χρόνου/χώρου, όπου η εμφάνιση του γεγονότος γίνεται τυχαία και οι αριθμοί των γεγονότων που συμβαίνουν σε δύο ξένα μεταξύ τους διαστήματα κατανέμονται ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο.

$$P(X=x \mid \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$x = 0,1,2,\ldots$

# Η Κατανομή Poisson

Εφαρμόζετε την κατανομή Poisson όταν:

- Επιθυμείτε να μετρήσετε τον αριθμό των φορών που συμβαίνει ένα ενδεχόμενο σε μια δεδομένη περιοχή ευκαιρίας
- Η πιθανότητα ένα ενδεχόμενο να συμβεί σε μια περιοχή ευκαιρίας είναι η ίδια για όλες τις περιοχές ευκαιρίας
- Ο αριθμός των ενδεχομένων που συμβαίνουν σε μια περιοχή ευκαιρίας είναι ανεξάρτητος από τον αριθμό των ενδεχομένων που συμβαίνουν σε οποιαδήποτε άλλη περιοχή ευκαιρίας
- Η πιθανότητα δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα να συμβούν σε μια περιοχή ευκαιρίας προσεγγίζει το μηδέν καθώς η περιοχή ευκαιρίας γίνεται μικρότερη
- Ο μέσος αριθμός των ενδεχομένων ανά μονάδα είναι $\lambda$ (λάμδα)

# Κατανομή Poisson:Ορισμός

- Χρησιμοποιείτε την **κατανομή Poisson** όταν σας ενδιαφέρει **ο αριθμός των φορών** που συμβαίνει ένα ενδεχόμενο σε μια δεδομένη **περιοχή ευκαιρίας**.
- Μια **περιοχή ευκαιρίας** είναι μια συνεχής μονάδα ή χρονικό διάστημα, όγκος, ή τέτοια περιοχή στην οποία μπορεί να συμβούν περισσότερα από ένα ενδεχόμενα.
  - Ο αριθμός των γρατζουνιών στο χρώμα ενός αυτοκινήτου
  - Ο αριθμός των τσιμπημάτων κουνουπιών σε ένα άτομο
  - Ο αριθμός των μη αποκρίσεων του υπολογιστή σε μια μέρα

# Συνάρτηση πιθανότητας (probability distribution function) Poisson

$$P(X = x \mid \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}; x = 0,1,2,\ldots$$

$E(X) = Var(X) = \lambda$

X: αριθμός «εμφανίσεων» του ενδεχομένου

όπου:

x = αριθμός των ενδεχομένων σε μια περιοχή ευκαιρίας

λ = αναμενόμενος αριθμός ενδεχομένων

e = βάση του φυσικού λογαριθμικού συστήματος (2,71828...)

# Παράδειγμα της Κατανομής Poisson

Ένας ασφαλιστής πουλά κατά μέσο όρο 3 συμβόλαια ζωής την εβδομάδα. Ποια η πιθανότητα ότι θα πουλήσει συμβόλαιο μέσα στην εβδομάδα;

Επιθυμείτε να μετρήσετε τον αριθμό των φορών που συμβαίνει ένα ενδεχόμενο σε μια δεδομένη περιοχή ευκαιρίας - **αριθμός συμβολαίων που πουλήθηκαν στην εβδομάδα** (Η περιοχή ευκαιρίας είναι η εβδομάδα.)

Η πιθανότητα ένα ενδεχόμενο να συμβεί σε μια περιοχή ευκαιρίας είναι η ίδια για όλες τις περιοχές ευκαιρίας - η πιθανότητα να πουληθεί συμβόλαιο εντός της εβδομάδα είναι ίδια για όλες τις εβδομάδες

Ο αριθμός των ενδεχομένων που συμβαίνουν σε μια περιοχή ευκαιρίας είναι ανεξάρτητος από τον αριθμό των ενδεχομένων που συμβαίνουν σε οποιαδήποτε άλλη περιοχή ευκαιρίας –το πόσα συμβόλαια θα πουληθούν εντός μίας εβδομάδας είναι ανεξάρτητο από το πόσα θα πουληθούν σε οποιαδήποτε άλλη εβδομάδα

Η πιθανότητα δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα να συμβούν σε μια περιοχή ευκαιρίας προσεγγίζει το μηδέν καθώς η περιοχή ευκαιρίας γίνεται μικρότερη

Ο μέσος αριθμός των ενδεχομένων ανά μονάδα είναι λ (λάμδα)- ο ασφαλιστής πουλά κατά μέσο όρο 3 συμβόλαια ζωής την εβδομάδα λ=3

# Παράδειγμα της Κατανομής Poisson

Ένας ασφαλιστής πουλά κατά μέσο όρο 3 συμβόλαια ζωής την εβδομάδα. Ποια η πιθανότητα ότι θα πουλήσει συμβόλαιο μέσα στην εβδομάδα;

- X: αριθμός συμβολαίων που πουλήθηκαν στην εβδομάδα x=0,1,2,…
- λ=3 συμβόλαια ζωής την εβδομάδα

Θα πουλήσει συμβόλαιο μέσα στην εβδομάδα σημαίνει x>0

$$\Pr(X > 0) = 1 - \Pr(x = 0)$$

$$P(X = 0 \mid 3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-3}(3)^{0}}{0!} = 4.9787 \times 10^{-2}$$

$$\Pr(X > 0) = 1 - \Pr(x = 0) = 1 - 4.9787 * 10^{-2} = 0.95021$$

# Παράδειγμα της Κατανομής Poisson

Ένας ασφαλιστής πουλά κατά μέσο όρο 3 συμβόλαια ζωής την εβδομάδα. Ποια η πιθανότητα ότι θα πουλήσει **τουλάχιστον** 2 συμβόλαια αλλά **λιγότερα** από 5 μέσα στην εβδομάδα;

- X: αριθμός συμβολαίων που πουλήθηκαν στην εβδομάδα x=0,1,2,…
- λ=3 συμβόλαια ζωής την εβδομάδα

Θα πουλήσει **τουλάχιστον** 2 συμβόλαια αλλά **λιγότερα** από 5 μέσα στην εβδομάδα σημαίνει $2 \le x < 5$

$$P(2 \le X < 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= \frac{e^{-3}(3)^2}{2!} + \frac{e^{-3}(3)^3}{3!} + \frac{e^{-3}(3)^4}{4!} = 0.61611$$

# Παράδειγμα της Κατανομής Poisson

Ένας ασφαλιστής πουλά κατά μέσο όρο 3 συμβόλαια ζωής την εβδομάδα. Αν η εβδομάδα αποτελείται μόνο από εργάσιμες ημέρες (5 ημέρες) ποια η πιθανότητα ότι **μία μέρα** θα πουλήσει **1** συμβόλαιο;

- X: αριθμός συμβολαίων που πουλήθηκαν στην εβδομάδα x=0,1,2,…
- λ=3 συμβόλαια ζωής την εβδομάδα

→ Αναμενόμενος αριθμός συμβολαίων που πουλήθηκαν την Ημέρα =3/5=0.6

Θα πουλήσει **1** συμβόλαιο σε μία μέρα

$$P(X=1|\lambda=0.6)=\frac{e^{-0.6}(0.6)^1}{1!}=0.32929$$

## 8ο Πρόβλημα

Σε μία τηλεφωνική γραμμή υποστήριξης των πελατών μίας μεγάλης εταιρίας παροχής σύνδεσης με το Διαδίκτυο οι κλήσεις καταφθάνουν με ρυθμό 48 ανά ώρα.

i. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να υπάρχουν 2 κλήσεις σε ένα οποιοδήποτε πεντάλεπτο διάστημα.

ii. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να υπάρχουν 5 κλήσεις σε ένα οποιοδήποτε τέταρτο.

iii. Έστω ότι σε μία συγκεκριμένη στιγμή δεν υπάρχουν κλήσεις σε αναμονή. Αν ο/η υπάλληλος χρειάζεται 5 λεπτά για να εξυπηρετήσει την τρέχουσα κλήση πόσες κλήσεις περιμένουμε να είναι σε αναμονή σε αυτό το διάστημα; Ποια η πιθανότητα να μην είναι καμία κλήση σε αναμονής; Υποθέτουμε ότι κανένας από αυτούς που μπαίνουν σε αναμονή δεν "κλείνουν" το τηλέφωνό τους στα 5 λεπτά.

iv. Έστω ότι σε μία συγκεκριμένη στιγμή δεν υπάρχει καμία κλήση σε αναμονή ούτε υπό εξυπηρέτηση και ο/η υπάλληλος ζητά άδεια προκειμένου να απομακρυνθεί από τη θέση του για 2 λεπτά. Σύμφωνα με την πολιτική της εταιρίας δικαιούται να πάρει άδεια για ένα χρονικό διάστημα αν η πιθανότητα να υπάρξει τουλάχιστον 1 κλήση στο διάστημα της απουσίας του δεν υπερβαίνει το 60%. Να εξετασθεί αν στον υπάλληλο θα δοθεί η άδεια που ζητά.

# Λύση

Να υπολογισθεί η πιθανότητα να υπάρχουν 2 κλήσεις σε ένα οποιοδήποτε πεντάλεπτο διάστημα

Οι κλήσεις ακολουθούν την κατανομή Poisson. Σύμφωνα με τα δεδομένα ο μέσος αριθμός κλήσεων είναι 48 κλήσεις ανά ώρα δηλαδή 60 λεπτά, δηλαδή λ=48/60 = 0,8 κλήσεις το **λεπτό**.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

i) Για το πεντάλεπτο έχουμε $\lambda_1$=**5***0,8

$$P(2\ \ \textit{κλήσεις}\ \ \textit{σε}\ \ \textit{ένα}\ \ \textit{πεντάλεπτο}) = P(X=2\,|\,\lambda_1 = 5\cdot 0{,}8) = P(X=2\,|\,\lambda_1 = 4) = \frac{e^{-4}\cdot 4^2}{2!} = 0{,}1465$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 14,65%.

# Λύση

Να υπολογισθεί η πιθανότητα να υπάρχουν 5 κλήσεις σε ένα οποιοδήποτε τέταρτο.

Οι κλήσεις ακολουθούν την κατανομή Poisson. Σύμφωνα με τα δεδομένα ο μέσος αριθμός κλήσεων είναι 48 κλήσεις ανά ώρα δηλαδή 60 λεπτά, δηλαδή λ=48/60 = 0,8 κλήσεις το **λεπτό**. Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

Για το τέταρτο έχουμε $\lambda_2$=**15***0,8

ii)

$$P(5\ \textit{κλήσεις σε ένα τέταρτο}) = P(X=5 \mid \lambda_2 = 15\cdot 0{,}8) = P(X=5 \mid \lambda_2 = 12) = \frac{e^{-12}\cdot 12^5}{5!} = 0{,}01274$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 1,274%.

# Λύση

Έστω ότι σε μία συγκεκριμένη στιγμή δεν υπάρχουν κλήσεις σε αναμονή. Αν ο/η υπάλληλος χρειάζεται 5 λεπτά για να εξυπηρετήσει την τρέχουσα κλήση πόσες κλήσεις περιμένουμε να είναι σε αναμονή σε αυτό το διάστημα; Ποια η πιθανότητα να μην είναι καμία κλήση σε αναμονή; Υποθέτουμε ότι κανένας από αυτούς που μπαίνουν σε αναμονή δεν "κλείνουν" το τηλέφωνό τους στα 5 λεπτά.

Οι κλήσεις ακολουθούν την κατανομή Poisson. Σύμφωνα με τα δεδομένα ο μέσος αριθμός κλήσεων είναι 48 κλήσεις ανά ώρα δηλαδή 60 λεπτά, δηλαδή λ=48/60 = 0,8 κλήσεις το **λεπτό,** P(λ=0,8).

Για το πεντάλεπτο λ=5*0,8 →P(λ=4)

- Ο αριθμός των κλήσεων που περιμένουμε να είναι σε αναμονή στο πεντάλεπτο ισούται με τη **μέση τιμή** της κατανομής P(λ=4) για το διάστημα αυτό. Δηλαδή, να αναμένουμε λ=4 κλήσεις.

- Ζητάμε την πιθανότητα να μην υπάρχει καμία κλήση σε αναμονή στο πεντάλεπτο.

Δηλαδή,

$$P(0\ \ \textit{κλήσεις}\ \ \textit{στο}\ \ \textit{πεντάλεπτο}) = P(X=0 \mid \lambda_1 = 5\cdot 0,8) = P(X=0 \mid \lambda_1 = 4) = e^{-4} = 0,0183$$

# Λύση

Έστω ότι σε μία συγκεκριμένη στιγμή δεν υπάρχει καμία κλήση σε αναμονή ούτε υπό εξυπηρέτηση και ο/η υπάλληλος ζητά άδεια προκειμένου να απομακρυνθεί από τη θέση του για 2 λεπτά. Σύμφωνα με την πολιτική της εταιρίας δικαιούται να πάρει άδεια για ένα χρονικό διάστημα αν η πιθανότητα να υπάρξει τουλάχιστον 1 κλήση στο διάστημα της απουσίας του δεν υπερβαίνει το 60%. Να εξετασθεί αν στον υπάλληλο θα δοθεί η άδεια που ζητά.

iv) Υπολογίζουμε την πιθανότητα τουλάχιστον μιας κλήσης στο δίλεπτο

Για το δίλεπτο λ=2*0,8 →P(λ=1,6)

$$P(\tau o\upsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\nu\ 1\ \kappa\lambda\acute{\eta}\sigma\eta\ \sigma\tau o\ \delta\acute{\iota}\lambda\varepsilon\pi\tau o) = 1 - P(X=0 \mid \lambda_3 = 2\cdot 0,8) = 1 - P(X=0 \mid \lambda_3 = 1,6) = 1 - e^{-1,6} = 0,7981$$

Αφού η πιθανότητα είναι 79,81%>60% ο υπάλληλος δεν μπορεί να πάρει την άδεια 2 λεπτών που ζητά.