

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 1

4^ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ



Σημείωση: Οι διαφάνειες με διαφορετικό χρώμα στον τίτλο, όπως αυτή
Συμβουλευτείτε την ύλη του μαθήματος σας



είναι για περαιτέρω μελέτη

Ενδεχόμενα

Κάθε **δυνατό αποτέλεσμα** μιας μεταβλητής ονομάζεται ενδεχόμενο (*event*).

- **Απλό ενδεχόμενο**

- Ένα ενδεχόμενο A που περιγράφεται από ένα μοναδικό αποτέλεσμα
- Π.χ. A : **μία ημέρα του Ιανουαρίου** από όλες τις ημέρες του 2014
- **Από κοινού ενδεχόμενο**
- Το ενδεχόμενο που συνδυάζει δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα
- Π.χ. . **Μία ημέρα του Ιανουαρίου** από όλες τις ημέρες του 2014 που συμβαίνει να είναι **και** Τετάρτη

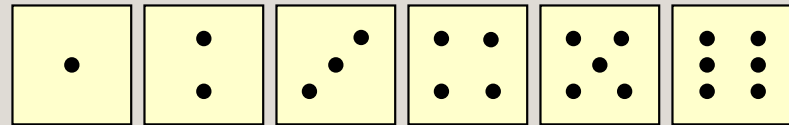
- **Συμπλήρωμα ενός Ενδεχομένου A (συμβολίζεται με A')**

- Όλα τα απλά ενδεχόμενα που πραγματοποιούνται όταν ΔΕΝ πραγματοποιείται το A
- Π.χ. A' : όλες οι ημέρες του 2014 που δεν ανήκουν στον Ιανουάριο

Δειγματικός Χώρος-Δειγματοχώρος

Ο δειγματικός χώρος-δειγματοχώρος Ω είναι το σύνολο όλων των πιθανών ενδεχόμενων

Π.χ. όλες οι επιφάνειες ενός ζαριού:



Π.χ. Και τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας:



Αμοιβαία Αποκλειόμενα Ενδεχόμενα

mutually exclusive

- Αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα
 - Ενδεχόμενα που δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα

Παράδειγμα: Τυχαία επιλογή μιας ημέρας του 2014

A = ημέρα Ιανουαρίου; B = ημέρα Φεβρουαρίου

- Τα ενδεχόμενα A και B είναι αμοιβαία αποκλειόμενα

Εξαντλητικά Ενδεχόμενα Collectively Exhaustive

- Εξαντλητικά ενδεχόμενα
 - Ένα από τα ενδεχόμενα πρέπει οπωσδήποτε να συμβεί
 - Η ομάδα των ενδεχόμενων καλύπτει όλο το δειγματικό χώρο

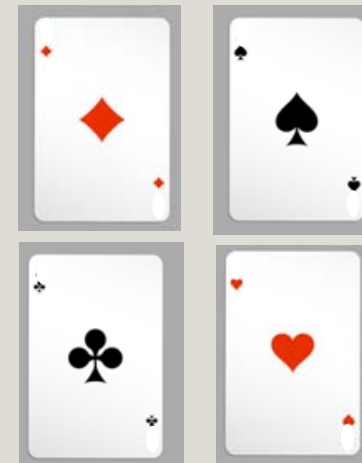
Παράδειγμα: Τυχαία επιλογή ενός φύλλου τράπουλας

A = Άσος B = Μαύρο

C = Καρό D = Κούπα

	Πιθανά αποτελέσματα Άσος			
				
Μαύρο B	X	✓	X	✓
Καρό C	X	X	✓	X
Κούπα D	✓	X	X	X

Εξετάζω τα ενδεχόμενα B, C και D



$\Pr(B \cup C \cup D) = \text{Τράπουλα}$

Εξαντλητικά Ενδεχόμενα Collectively Exhaustive

- Εξαντλητικά ενδεχόμενα
 - Ένα από τα ενδεχόμενα πρέπει οπωσδήποτε να συμβεί
 - Η ομάδα των ενδεχόμενων καλύπτει όλο το δειγματικό χώρο

Παράδειγμα: Τυχαία επιλογή ενός φύλλου τράπουλας

A = Άσσος; B = Μαύρο;
C = Καρό; D = Κούπα;

	Πιθανά αποτελέσματα Άσσος			
				
Μαύρο B	X	✓	X	✓
Καρό C		X	✓	X
Κούπα D	✓	X	X	X



Τα ενδεχόμενα B, C και D είναι εξαντλητικά και επίσης αμοιβαία αποκλειόμενα. $\Pr(B \cap C \cap D)=0$

Βασικά στοιχεία Πιθανότητας

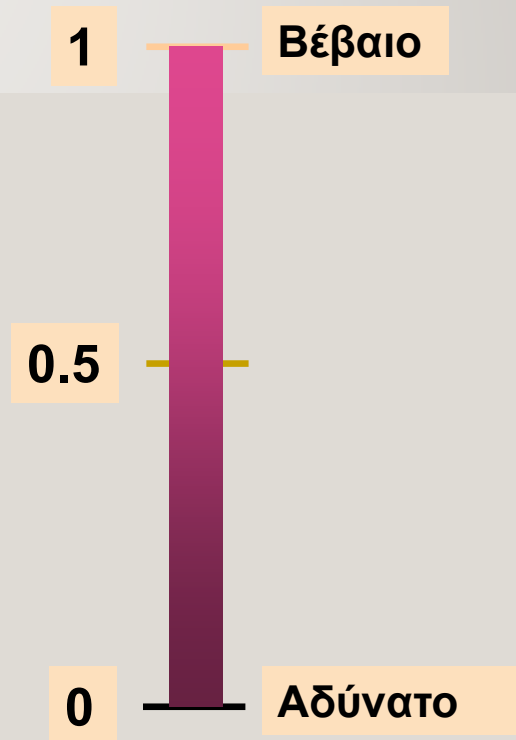
- Η πιθανότητα είναι μια αριθμητική τιμή που εκφράζει το πόσο πιθανό είναι να συμβεί ένα ενδεχόμενο
- Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{Για κάθε ενδεχόμενο } A$$

- Το σύνολο των πιθανοτήτων όλων των αμοιβαία αποκλειόμενων και εξαντλητικών ενδεχομένων είναι 1

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

Τα A, B, και C είναι αμοιβαία αποκλειόμενα και εξαντλητικά



Ορισμός: Απλή Πιθανότητα

- Η απλή πιθανότητα αναφέρεται στην πιθανότητα εμφάνισης ενός απλού ενδεχόμενου.
 - π.χ. $P(\text{ημέρα του Ιανουαρίου 2014})$
 - π.χ. $P(\text{ημέρα Τετάρτη 2014})$

	Ιανουάριος	Όχι Ιανουάριος	Σύνολο
Τετάρτη	5	48	53
Όχι Τετάρτη	26	286	312
Σύνολο	31	334	365

$$P(\text{ημέρα Τετάρτη 2014}) = \frac{53}{365}$$

= $\frac{\text{πλήθος των ευνοικών αποτελεσμάτων}}{\text{σύνολο}}$

$$P(\text{ημέρα του Ιανουαρίου 2014}) = \frac{31}{365}$$

Ορισμός: Από Κοινού Πιθανότητα

- Η **από κοινού πιθανότητα** αναφέρεται στην πιθανότητα εμφάνισης ενός αποτελέσματος που περιλαμβάνει δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα.
 - π.χ. $P(\text{ημέρα Ιαν. και ημέρα Τετ.})$, $P(\text{ημέρα Όχι Ιαν. και ημέρα όχι Τετ.})$

	Ιανουάριος	Όχι Ιανουάριος	Σύνολο
Τετάρτη	5	48	53
Όχι Τετάρτη	26	286	312
Σύνολο	31	334	365

Παράδειγμα Από Κοινού Πιθανότητα

- π.χ. $P(\text{ημέρα Ιαν. και ημέρα Τετ.})$, $P(\text{ημέρα Όχι Ιαν. και ημέρα όχι Τετ.})$

Αριθμός ημερών του **Ιανουαρίου 2014 & Τετάρτη**

$$P(\text{ημέρα Όχι Ιανουάριος \& ημέρα Όχι Τετάρτη}) = \frac{286}{365}$$

$$P(\text{ημέρα Ιανουάριος \& ημέρα Τετάρτη}) = \frac{5}{365}$$

	Ιανουάριος	Όχι Ιανουάριος	Σύνολο
Τετάρτη	5	48	53
Όχι Τετάρτη	26	286	312
Σύνολο	31	334	365

Αριθμός ημερών του 2014

Υπολογισμός Από Κοινού και Περιθώριων Πιθανοτήτων

- Από κοινού Πιθανότητα των A και B:

$$P(A \& B) = \frac{\text{Αριθμός αποτελεσμάτων που εμφανίζεται το ενδεχόμενο A ταυτόχρονα με το B}}{\text{Συνολικός αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων των ενδεχομένων}}$$

- Περιθώρια-Οριακή (marginal) πιθανότητα

$$P(A) = P(A \& B_1) + P(A \& B_2) + \dots + P(A \& B_k)$$

- Όπου $B_1, B_2, \dots, B_k$ είναι k αμοιβαία αποκλειόμενα και εξαντλητικά ενδεχόμενα

Παράδειγμα Περιθώριας Πιθανότητας

- π.χ. $P(\text{ημέρα Ιαν.})$, $P(\text{ημέρα όχι Τετ.})$

	Ιανουάριος	Όχι Ιανουάριος	Σύνολο
Τετάρτη	5	48	53
Όχι Τετάρτη	26	286	312
Σύνολο	31	334	365

$$P(\text{ημέρα όχι Τετ}) = \frac{312}{365}$$

$$P(\text{ημέρα Ιανουάριος}) = \frac{31}{365}$$

Παράδειγμα Περιθώριας Πιθανότητας

$$P(A) = P(A \& B_1) + P(A \& B_2) + \dots + P(A \& B_k)$$

P(ημέρα Τετάρτη)=

P(ημέρα Τετάρτη & ημέρα Ιανουάριος)+ P(ημέρα Τετάρτη & ημέρα Όχι Ιανουάριος)

$$= \frac{5}{365} + \frac{48}{365} = \frac{53}{365}$$

	Ιανουάριος	Όχι Ιανουάριος	Σύνολο
Τετάρτη	5	48	53
Όχι Τετάρτη	26	286	312
Σύνολο	31	334	365

Περιθώριες και Από Κοινού Πιθανότητες σε έναν Πίνακα Διπλής Εισόδου- Πίνακα Συνάφειας

Ενδεχόμενο	Ενδεχόμενο		Σύνολο
	B_1	B_2	
A_1	$P(A_1 \& B_1)$	$P(A_1 \& B_2)$	$P(A_1)$
A_2	$P(A_2 \& B_1)$	$P(A_2 \& B_2)$	$P(A_2)$
Σύνολο	$P(B_1)$	$P(B_2)$	1

Από κοινού πιθανότητες

Περιθώριες πιθανότητες

Γενικός Κανόνας της Άθροισης

$$P(A \text{ ή } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ και } B)$$

Αν τα A και B είναι αμοιβαία αποκλειόμενα τότε,
 $P(A \text{ και } B) = 0$ και ο κανόνας απλοποιείται ως:

$$P(A \text{ ή } B) = P(A) + P(B)$$

Για αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα A και B

Παράδειγμα του Γενικού Κανόνα Άθροισης

$$P(A \text{ ή } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ και } B)$$

$$\begin{aligned} P(\text{ημέρα Ιανουάριος ή ημέρα Τετάρτη}) &= P(\text{ημέρα Ιανουάριος}) + \\ &P(\text{ημέρα Τετάρτη}) - P(\text{ημέρα Ιανουάριος και ημέρα Τετάρτη}) \\ &= 31/365 + 53/365 - 5/365 = 79/365 \end{aligned}$$

Μην υπολογίζετε
δύο φορές τις πέντε
Τετάρτες του
Ιανουαρίου!

	Ιανουάριος	Όχι Ιανουάριος	Σύνολο
Τετάρτη	5	48	53
Όχι Τετάρτη	26	286	312
Σύνολο	31	334	365

Υπολογισμός Υπό Συνθήκη-Δεσμευμένης Πιθανότητας

- Η υπό συνθήκη (δεσμευμένη) πιθανότητα είναι η πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχόμενου, **γνωρίζοντας** ότι έχει συμβεί κάποιο άλλο:

$$P(A | B) = \frac{P(A \text{ και } B)}{P(B)}$$

→ Η υπό συνθήκη πιθανότητα του A **δεδομένου** ότι έχει συμβεί το B.

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ και } B)}{P(A)}$$

→ Η υπό συνθήκη πιθανότητα του B δεδομένου ότι έχει συμβεί το A.

Όπου $P(A \text{ και } B)$ = από κοινού πιθανότητα A και B

$P(A)$ = περιθώρια ή απλή πιθανότητα του A

$P(B)$ = περιθώρια ή απλή πιθανότητα του B

Ανεξαρτησία

- Δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα εάν και μόνο εάν:

$$P(A | B) = P(A)$$

- Τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα όταν η πιθανότητα του ενός ενδεχομένου δεν επηρεάζει την πιθανότητα εμφάνισης ενός άλλου ενδεχομένου.

Πολλαπλασιαστικός Κανόνας

- Ο πολλαπλασιαστικός κανόνας για δύο ενδεχόμενα A και B έχει ως εξής:

$$P(A \text{ και } B) = P(A|B)P(B)$$

Σημείωση: Εάν A και B ανεξάρτητα, τότε $P(A|B) = P(A)$ και ο πολλαπλασιαστικός κανόνας απλοποιείται ως

$$P(A \text{ και } B) = P(A)P(B)$$

Υπολογισμός Υπό Συνθήκη-Δεσμευμένης Πιθανότητας

- Η υπό συνθήκη (δεσμευμένη) πιθανότητα είναι η πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου, γνωρίζοντας ότι έχει συμβεί κάποιο άλλο:

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ και } B)}{P(B)}$$

Η υπό συνθήκη πιθανότητα του A δεδομένου ότι έχει συμβεί το B.

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ και } B)}{P(A)}$$

Η υπό συνθήκη πιθανότητα του B δεδομένου ότι έχει συμβεί το A.

Όπου $P(A \text{ και } B)$ = από κοινού πιθανότητα A και B
 $P(A)$ = περιθώρια ή απλή πιθανότητα του A
 $P(B)$ = περιθώρια ή απλή πιθανότητα του B

Οριακή Πιθανότητα-Πολλαπλασιαστικός Κανόνας-Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

- Η οριακή πιθανότητα για το ενδεχόμενο A έχει ως εξής:

$$P(A) = P(A \& B_1) + P(A \& B_2) + \dots + P(A \& B_k)$$

- Κάνοντας χρήση του Πολλαπλασιαστικού Κανόνα

$$P(A \& B) = P(A|B)P(B)$$

Όπου $B_1, B_2, \dots, B_k$ είναι k αμοιβαία αποκλειόμενα και εξαντλητικά ενδεχόμενα

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

$$P(A) = P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + \dots + P(A | B_k)P(B_k)$$

Θεώρημα του Bayes

$$P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i)P(B_i)}{P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + \dots + P(A | B_k)P(B_k)}$$

- όπου

B_i = το i ενδεχόμενο και k αμοιβαία αποκλειόμενα και εξαντλητικά ενδεχόμενα

A = ενδεχόμενο που μπορεί να επηρεάσει την $P(B_i)$

1^ο Πρόβλημα

Η πιθανότητα εμφάνισης βλάβης σε ένα μηχάνημα εργοστασίου ισούται με 0.04, η πιθανότητα εμφάνισης σε ένα δεύτερο ισούται με 0.15, και η πιθανότητα βλάβης και στα δύο ισούται με 0.015. Ποια είναι η πιθανότητα βλάβης σε ένα τουλάχιστον μηχανήματα;

Λύση

Έστω **A** το ενδεχόμενο εμφάνισης βλάβης στο πρώτο μηχανήματα, και
B το ενδεχόμενο εμφάνισης βλάβης στο δεύτερο μηχανήματα. Ισχύει:

$$P(A) = 0.04$$

$$P(B) = 0.15$$

$$P(A \cap B) = 0.015$$

Επομένως η πιθανότητα βλάβης σε ένα τουλάχιστον (σε ένα από τα δύο ή και στα δύο) μηχανήματα είναι:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.04 + 0.15 - 0.015 \\ &= 0.175 \end{aligned}$$

2ο Πρόβλημα

Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι αναλογίες των επιχειρηματιών σύμφωνα με τα προσδοκώμενα κέρδη και το προφίλ τους.

Χαρακτήρας	Προσδοκώμενα Κέρδη		
	Ασυνήθιστα υψηλά A_1	Κανονικά A_2	Ασυνήθιστα χαμηλά A_3
Αισιόδοξος B_1	0.11	0.12	0.07
Λιγότερο Αισιόδοξος B_2	0.09	0.17	0.21
Απαισιόδοξος B_3	0.05	0.03	0.15

Ζητούνται:

- i. Ποια είναι η πιθανότητα ένας επιχειρηματίας να είναι αισιόδοξος;
- ii. Αν είναι αισιόδοξος ποια είναι η πιθανότητα να προσδοκά ασυνήθιστα υψηλά κέρδη;
- iii. Ποια είναι η πιθανότητα για έναν επιχειρηματία να προσδοκά ασυνήθιστα υψηλά κέρδη;

Λύση

Ποια είναι η πιθανότητα ένας επιχειρηματίας να είναι αισιόδοξος

Υπολογισμός Από Κοινού και Περιθώριων Πιθανοτήτων

- Από κοινού Πιθανότητα των A και B:

$$P(A \& B) = \frac{\text{Αριθμός αποτελεσμάτων που εμφανίζονται το ενδιαφέρον A ταυτόχρονα με το B}}{\text{Συνολικός αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων των ενδιαφερόντων}}$$

- Περιθώρια-Οριακή (marginal) πιθανότητα

$$P(A) = P(A \& B_1) + P(A \& B_2) + \dots + P(A \& B_k)$$

- Όπου $B_1, B_2, \dots, B_k$ είναι k αμοιβαία αποκλειόμενα και εξαντλητικά ενδεχόμενα

Χαρακτήρας	Προσδοκώμενα Κέρδη			ΣΥΝΟΛΟ
	Ασυνήθιστα υψηλά A_1	Κανονικά A_2	Ασυνήθιστα χαμηλά A_3	
Αισιόδοξος B_1	0.11	0.12	0.07	
Λιγότερο Αισιόδοξος B_2	0.09	0.17	0.21	
Απαισιόδοξος B_3	0.05	0.03	0.15	

Λύση

Ποια είναι η πιθανότητα ένας επιχειρηματίας να είναι αισιόδοξος

$$\begin{aligned} i) \quad P(B_1) &= \sum_{i=1}^3 P(A_i \cap B_1) = P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_1) + P(A_3 \cap B_1) \\ &= 0.11 + 0.12 + 0.07 \\ &= 0.30 \end{aligned}$$

Υπολογισμός Από Κοινού και Περιθώριων Πιθανοτήτων

- Από κοινού Πιθανότητα των A και B:

$$P(A \& B) = \frac{\text{Αριθμός αποτελεσμάτων που εμφανίζονται το ενδιαφέρον A ταυτόχρονα με το B}}{\text{Συνολικός αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων των ενδιαφερόντων}}$$

- Περιθώρια-Οριακή (marginal) πιθανότητα

$$P(A) = P(A \& B_1) + P(A \& B_2) + \dots + P(A \& B_k)$$

- Όπου $B_1, B_2, \dots, B_k$ είναι k αμοιβαία αποκλειόμενα και εξαντλητικά ενδεύματα

Χαρακτήρας	Προσδοκώμενα Κέρδη			ΣΥΝΟΛΟ
	Ασυνήθιστα υψηλά A_1	Κανονικά A_2	Ασυνήθιστα χαμηλά A_3	
Αισιόδοξος B_1	0.11	0.12	0.07	0.30
Λιγότερο Αισιόδοξος B_2	0.09	0.17	0.21	
Απαισιόδοξος B_3	0.05	0.03	0.15	

Λύση

Αν είναι αισιόδοξος ποια είναι η πιθανότητα να προσδοκά ασυνήθιστα υψηλά κέρδη

Υπολογισμός Υπό Συνθήκη-Δεσμευμένης Πιθανότητας

- Η υπό συνθήκη (δεσμευμένη) πιθανότητα είναι η πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου, **γνωρίζοντας** ότι έχει συμβεί κάποιο άλλο:

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ και } B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ και } B)}{P(A)}$$

→ Η υπό συνθήκη πιθανότητα του A, δεδομένου ότι έχει συμβεί το B.

→ Η υπό συνθήκη πιθανότητα του B, δεδομένου ότι έχει συμβεί το A.

Όπου $P(A \text{ και } B)$ = από κοινού πιθανότητα A και B
 $P(A)$ = περιθώρια ή απλή πιθανότητα του A
 $P(B)$ = περιθώρια ή απλή πιθανότητα του B

Αν είναι

$$ii) P(A_1 | B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{0.11}{0.30} = 0.367$$

Προσδοκώμενα Κέρδη			
Χαρακτήρας	Ασυνήθιστα υψηλά A_1	Κανονικά A_2	Ασυνήθιστα χαμηλά A_3
Αισιόδοξος B_1	0.11	0.12	0.07
Λιγότερο Αισιόδοξος B_2	0.09	0.17	0.21
Απαισιόδοξος B_3	0.05	0.03	0.15

Λύση

Ποια είναι η πιθανότητα για έναν επιχειρηματία να προσδοκά ασυνήθιστα υψηλά κέρδη;

$$\begin{aligned} iii) P(A_1) &= \sum_{i=1}^3 P(A_1 \cap B_j) = P(A_1 \cap B_1) + P(A_1 \cap B_2) + P(A_1 \cap B_3) \\ &= 0.11 + 0.09 + 0.05 \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

Προσδοκώμενα Κέρδη			
Χαρακτήρας	Ασυνήθιστα υψηλά A_1	Κανονικά A_2	Ασυνήθιστα χαμηλά A_3
Αισιόδοξος B_1	0.11	0.12	0.07
Λιγότερο Αισιόδοξος B_2	0.09	0.17	0.21
Απαισιόδοξος B_3	0.05	0.03	0.15
	0.25		

Υπολογισμός Από Κοινού και Περιθώριων Πιθανοτήτων

- Από κοινού Πιθανότητα των A και B:

$$P(A \& B) = \frac{\text{Αριθμός αποτελεσμάτων που εμφανίζονται τα ενδεχόμενα A ταυτόχρονα με το B}}{\text{Συνολικός αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων των ενδεχομένων}}$$

- Περιθώρια-Οριακή (marginal) πιθανότητα

$$P(A) = P(A \& B_1) + P(A \& B_2) + \dots + P(A \& B_k)$$

- Όπου $B_1, B_2, \dots, B_k$ είναι k αμοιβαία αποκλειόμενα και εξαντλητικά ενδεχόμενα

3ο Πρόβλημα

Οι φοιτητές ενός πανεπιστημίου ταξινομήθηκαν ανάλογα με το φύλο τους και τη Σχολή τους. Έστω ότι οι αναλογίες του πίνακα μας δίνουν τις πιθανότητες των αντίστοιχων ενδεχομένων.

Σχολές Φύλο		Σ ₁	Σ ₂	Σ ₃	Σ ₄	Σύνολο
Αγόρι	Q ₁	0,05	;	0,19	0,285	0,7
Κορίτσι	Q ₂	0,05	;	0,01	0,165	;
Σύνολο		0,1	0,25	0,2	0,45	1

Να υπολογιστεί:

- a) Η πιθανότητα να επιλέξουμε από αυτούς τους φοιτητές κορίτσι.
- b) Η πιθανότητα να επιλέξουμε από αυτούς τους φοιτητές κορίτσι όταν είναι γνωστό ότι ανήκει στη Σχολή Σ₄.
- c) Η κατάταξη των φοιτητών ανά φύλο είναι ανεξάρτητη από την κατάταξη ανά σχολή;



Λύση

Συμπληρώνω τον πίνακα:

$$i) P(Q_1) = \sum_{i=1}^3 P(\Sigma_i \cap Q_1) = P(\Sigma_1 \cap Q_1) + P(\Sigma_2 \cap Q_1) + P(\Sigma_3 \cap Q_1) + P(\Sigma_4 \cap Q_1)$$

$$0,7 = 0,05 + P(\Sigma_2 \cap Q_1) + 0,19$$

$$P(\Sigma_2 \cap Q_1) = 0,7 - 0,19 - 0,05 = 0,285$$

$$P(\Sigma_2 \cap Q_1) = 0,175$$

Φύλο \ Σχολές		Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σύνολο
Αγόρι	Q_1	0,05	0,175	0,19	0,285	0,7
Κορίτσι	Q_2	0,05	;	0,01	0,165	;
Σύνολο		0,1	0,25	0,2	0,45	1

Λύση

Συμπληρώνω τον πίνακα:

$$P(\Sigma_2 \cap Q_2) = ?$$

$$P(\Sigma_2) = P(\Sigma_2 \cap Q_1) + P(\Sigma_2 \cap Q_2) \rightarrow$$

$$P(\Sigma_2 \cap Q_2) = P(\Sigma_2) - P(\Sigma_2 \cap Q_1) \rightarrow P(\Sigma_2 \cap Q_2) = 0,25 - 0,175 = 0,075$$

Φύλο \ Σχολές		Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σύνολο
Αγόρι	Q_1	0,05	0,175	0,19	0,285	0,7
Κορίτσι	Q_2	0,05	0,075	0,01	0,165	0,25
Σύνολο		0,1	0,25	0,2	0,45	1

Λύση

Συμπληρώνω τον πίνακα:

Φύλο \ Σχολές		Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σύνολο
Αγόρια	Q_1	0,05	0,175	0,19	0,285	0,7
Κορίτσια	Q_2	0,05	0,075	0,01	0,165	;
Σύνολο		0,1	0,25	0,2	0,45	1

Λύση

Συμπληρώνω τον πίνακα:

$$P(Q_2) = P(Q_2 \cap \Sigma_1) + P(Q_2 \cap \Sigma_2) + P(Q_2 \cap \Sigma_3) + P(Q_2 \cap \Sigma_4) \rightarrow \\ P(Q_2) = 0,05 + 0,075 + 0,01 + 0,165 = 0,3$$

Τι είναι τα ενδεχόμενα Αγόρι, Κορίτσι;

Τα ενδεχόμενα Αγόρι, Κορίτσι είναι αμοιβαία αποκλειόμενα και εξαντλητικά

Φύλο \ Σχολές		Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σύνολο
Αγόρι	Q_1	0,05	0,175	0,19	0,285	0,7
Κορίτσι	Q_2	0,05	0,075	0,01	0,165	0,3
Σύνολο		0,1	0,25	0,2	0,45	1

$$P(Q_1) + P(Q_2) = 1 \rightarrow \\ P(Q_2) = 1 - P(Q_1) \rightarrow \\ P(Q_2) = 1 - 0,7 = 0,3$$

Λύση

Συμπληρωμένος ο πίνακας

Φύλο \ Σχολές		Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σύνολο
Αγόρι	Q_1	0,05	0,175	0,19	0,285	0,7
Κορίτσι	Q_2	0,05	0,075	0,01	0,165	0,3
Σύνολο		0,1	0,25	0,2	0,45	1

Λύση

Να υπολογιστεί:

a) Η πιθανότητα να επιλέξουμε από αυτούς τους φοιτητές κορίτσι

Επομένως η πιθανότητα Η πιθανότητα να επιλέξουμε από αυτούς τους φοιτητές κορίτσι

$$P(Q_2) = 0,3$$

Σχολές Φύλο		Σ ₁	Σ ₂	Σ ₃	Σ ₄	Σύνολο
						ο
Αγόρι	Q ₁	0,05	0,175	0,19	0,285	0,7
Κορίτσι	Q ₂	0,05	0,075	0,01	0,165	0,3
Σύνολο		0,1	0,25	0,2	0,45	1

Λύση

ii) Η πιθανότητα να επιλέξουμε από αυτούς τους φοιτητές κορίτσι **όταν είναι γνωστό** ότι ανήκει στη Σχολή Σ_4 , υπολογίζεται ως εξής:

$$P(Q_2|\Sigma_4) = \frac{P(Q_2 \cap \Sigma_4)}{P(\Sigma_4)} = \frac{0,165}{0,45} = 0,37$$

Σχολές Φύλο		Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σύνολο
Αγόρι	Q_1	0,05	0,175	0,19	0,285	0,7
Κορίτσι	Q_2	0,05	0,075	0,01	0,165	0,3
Σύνολο		0,1	0,25	0,2	0,45	1

Λύση

Η κατάταξη των φοιτητών ανά φύλο είναι ανεξάρτητη από την κατάταξη ανά σχολή;

ii) Για να είναι ανεξάρτητα θα πρέπει: $P(Q_i \cap \Sigma_j) = P(Q_i)P(\Sigma_j)$ για κάθε ζεύγος Q_i και Σ_j

Πολλαπλασιαστικός Κανόνας

• Ο πολλαπλασιαστικός κανόνας για δύο ενδεχόμενα A και B έχει ως εξής:

$P(A \text{ και } B) = P(A|B)P(B)$

Σημείωση: Εάν A και B ανεξάρτητα, τότε $P(A|B) = P(A)$ και ο πολλαπλασιαστικός κανόνας απλοποιείται ως

$P(A \text{ και } B) = P(A)P(B)$

Πολλαπλασιαστικός Κανόνας

Εάν A και B ανεξάρτητα, τότε $P(A|B) = P(A)$ και ο πολλαπλασιαστικός κανόνας απλοποιείται ως

$P(A \text{ και } B) = P(A)P(B)$

Σχολές		Σ ₁	Σ ₂	Σ ₃	Σ ₄	Σύνολο
Φύλο						
Αγόρι	Q ₁	0,05	0,175	0,19	0,285	0,7
Κορίτσι	Q ₂	0,05	0,075	0,01	0,165	0,3
Σύνολο		0,1	0,25	0,2	0,45	1

Αυτό όμως δεν ισχύει. Ως παράδειγμα έχουμε:

$$P(Q_2 \cap \Sigma_4) = 0,165 \neq 0,135 = P(Q_2)P(\Sigma_4)$$

4ο Πρόβλημα

Μια βιομηχανία Β προμηθεύεται τη βασική πρώτη ύλη της συσκευασμένη σε παρτίδες των 1000 τεμαχίων από δύο προμηθευτές Π_1 και Π_2 σε ποσοστό 97% και 3% αντίστοιχα. Οι παρτίδες ανάλογα με την ποιότητά τους κατατάσσονται σε Αποδεκτές και Ελαττωματικές και ανάλογα με το χρόνο παράδοσής τους σε Έγκαιρες και Καθυστερημένες. Από ιστορικά στοιχεία γνωρίζουμε ότι το ποσοστό Καθυστερημένων παρτίδων που προέρχονται από τον προμηθευτή Π_1 είναι 10% ενώ το Ποσοστό για τον Π_2 είναι 65%. Επίσης ότι το ποσοστό των ελαττωματικών παρτίδων είναι 5% και 25% για τις παρτίδες που προέρχονται από τον Π_1 και Π_2 , αντίστοιχα.

Με βάση τα στοιχεία αυτά να υπολογιστούν:

- a) Το ποσοστό των ελαττωματικών παρτίδων.
- b) Το ποσοστό των καθυστερημένων παρτίδων.
- c) Τί ποσοστό των αποδεκτών παρτίδων προέρχονται από τον προμηθευτή Π_1 .

ως

Μια βιομηχανία Β προμηθεύεται τη βασική πρώτη ύλη της συσκευασμένη σε παρτίδες των 1000 τεμαχίων από δύο προμηθευτές Π_1 και Π_2 σε ποσοστό 97% και 3% αντίστοιχα. Οι παρτίδες ανάλογα με την ποιότητά τους κατατάσσονται σε Αποδεκτές και Ελαττωματικές και ανάλογα με το πρώτο παραίτησή τους σε Υγιεινές και Καθυστερημένες. Από στατιστικά στοιχεία γνωρίζουμε ότι το ποσοστό Καθυστερημένων παρτίδων που προέρχονται από τον προμηθευτή Π_1 είναι 10% ενώ το ποσοστό για τον Π_2 είναι 60%. Επίσης ότι το ποσοστό των ελαττωματικών παρτίδων είναι 5% και 25% για τις παρτίδες που προέρχονται από τον Π_1 και Π_2 αντίστοιχα.

Έστω τα εξής ενδεχόμενα:

Π_1 : Η πρώτη ύλη προέρχεται από τον Προμηθευτή Π_1

Π_2 : Η πρώτη ύλη προέρχεται από τον Προμηθευτή Π_2

ως

Μια βιομηχανία B παραφκίδεται τη βασική πρώτη ύλη της παρασκευάζοντας σε παρτίδες των 1000 τεμαχίων από δύο παραφκτικούς Π_1 και Π_2 σε ποσοστό 97% και 3% αντίστοιχα. Οι παρτίδες ανάλογα με την ποιότητά τους κατατάσσονται σε Αποδεκτές και Ελαττωματικές και ανάλογα με το κρίνει παραίδοσή τους σε Έγκυρες και Καθιστοπαρμίδες. Από ιστορικά στοιχεία γνωρίζουμε ότι το ποσοστό Καθιστοπαρμίδων παρτίδων που παράγονται από τον παραφκτικό Π_1 είναι 10% ενώ το Ποσοστό για τον Π_2 είναι 60%. Επίσης ότι το ποσοστό των ελαττωματικών παρτίδων είναι 3% και 23% για τις παρτίδες που παράγονται από τον Π_1 και Π_2 αντίστοιχα.

Έστω τα εξής ενδεχόμενα:

E: Παρτίδα ελαττωματική

E': Παρτίδα αποδεκτή

ως

Μια βιομηχανία B παραρρηκνύται τη βωτική πρώτη ύλη της απαιτωκωμένης σε παρτίδες των 1000 τεμαχίων από δύο παραρρηκνυτές Π_1 και Π_2 σε ποσότη 97% και 3% αντίστοιχα. Οι παρτίδες ανάλογα με την ποκότητα της απαιτωκωκότητας σε άποδωκούς και ελαττωματωκούς και ανάλογα με το χρόνο παράδοσής τους σε Έγκαιρες και Καθυστερημένες. Από κτωρική στωκασία γνωρίζουμε ότι το ποκωτό Καθυστερημένων παρτίδων που προέρκωνται από τον παραρρηκνυτή Π_1 είναι 10% ενώ το Ποκωτό για τον Π_2 είναι 60%. Επίσης ότι το ποκωτό των ελαττωματωκών παρτίδων είναι 3% και 23% για τις παρτίδες που προέρκωνται από τον Π_1 και Π_2 αντίστοιχα.

Έστω τα εξής ενδεχόμενα:

K : Παρτίδα φθάνει καθυστερημένα

K' : Παρτίδα φθάνει έγκαιρα

Λύση

Έστω τα εξής ενδεχόμενα:

Π_1 : Η πρώτη ύλη προέρχεται από τον Προμηθευτή Π_1

Π_2 : Η πρώτη ύλη προέρχεται από τον Προμηθευτή Π_2 ,

K. Παρτίδα φθάνει καθυστερημένα

K' : Παρτίδα φθάνει έγκαιρα

E: Παρτίδα ελαττωματική

E' : Παρτίδα αποδεκτή

Μια βιομηχανία Β προμηθεύεται τη βασική πρώτη ύλη της συσκευασμένη σε παρτίδες των 1000 τεμαχίων από δύο προμηθευτές Π_1 και Π_2 σε ποσοστό 97% και 3% αντίστοιχα

$$P(\Pi_1) = 0.97, P(\Pi_2) = 0.03$$

Από ιστορικά στοιχεία γνωρίζουμε ότι το ποσοστό Καθυστερημένων παρτίδων που προέρχονται από τον προμηθευτή Π_1 είναι 10% ενώ το Ποσοστό για τον Π_2 είναι 65%.

$$P(K | \Pi_1) = 0.10, P(K | \Pi_2) = 0.65$$

Επίσης ότι το ποσοστό των ελαττωματικών παρτίδων είναι 5% και 25% για τις παρτίδες που προέρχονται από τον Π_1 και Π_2 , αντίστοιχα

$$P(E | \Pi_1) = 0.05, P(E | \Pi_2) = 0.25$$

Λύση

Έστω τα εξής ενδεχόμενα:

Π_1 : Η πρώτη ύλη προέρχεται από τον Προμηθευτή Π_1

Π_2 : Η πρώτη ύλη προέρχεται από τον Προμηθευτή Π_2 ,

K. Παρτίδα φθάνει καθυστερημένα

K' : Παρτίδα φθάνει έγκαιρα

E: Παρτίδα ελαττωματική

E' : Παρτίδα αποδεκτή

Με βάση τα στοιχεία αυτά να υπολογιστούν:

Το ποσοστό των ελαττωματικών παρτίδων.

Από το θεώρημα Ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(\Pi_1)P(E | \Pi_1) + P(\Pi_2)P(E | \Pi_2) \\ &= 0,97 \cdot 0,05 + 0,03 \cdot 0,25 = 0,056 \end{aligned}$$

Άρα το ποσοστό των ελαττωματικών παρτίδων είναι 5,6%.

Δίνεται ότι:

$$P(\Pi_1) = 0.97, P(\Pi_2) = 0,03$$

$$P(K | \Pi_1) = 0.10, P(K | \Pi_2) = 0,65$$

$$P(E | \Pi_1) = 0,05, P(E | \Pi_2) = 0,25$$

Οριακή Πιθανότητα-Πολλαπλασιαστικός Κανόνας-Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

- Η οριακή πιθανότητα για το ενδεχόμενο A έχει ως εξής:

$$P(A) = P(A \& B_1) + P(A \& B_2) + \dots + P(A \& B_k)$$

- Κάνοντας χρήση του Πολλαπλασιαστικού Κανόνα

$$P(A \& B) = P(A|B)P(B)$$

Όπου $B_1, B_2, \dots, B_k$ είναι k αμοιβαία αποκλειόμενα και εξαντλητικά ενδεχόμενα

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

$$P(A) = P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + \dots + P(A | B_k)P(B_k)$$

Λύση

Έστω τα εξής ενδεχόμενα:

Π_1 : Η πρώτη ύλη προέρχεται από τον Προμηθευτή Π_1

Π_2 : Η πρώτη ύλη προέρχεται από τον Προμηθευτή Π_2 ,

K: Παρτίδα φθάνει καθυστερημένα

K': Παρτίδα φθάνει έγκαιρα

E: Παρτίδα ελαττωματική

E': Παρτίδα αποδεκτή

Δίνεται ότι:

$$P(\Pi_1) = 0.97, P(\Pi_2) = 0,03$$

$$P(K | \Pi_1) = 0.10, P(K | \Pi_2) = 0,65$$

$$P(E | \Pi_1) = 0,05, P(E | \Pi_2) = 0,25$$

Το ποσοστό των καθυστερημένων παρτίδων

Από το θεώρημα Ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(K) &= P(\Pi_1)P(K | \Pi_1) + P(\Pi_2)P(K | \Pi_2) \\ &= 0,97 \cdot 0,10 + 0,03 \cdot 0,65 = 0,1165 \end{aligned}$$

Άρα το ποσοστό των καθυστερημένων παρτίδων είναι 11,65%.

Οριακή Πιθανότητα-Πολλαπλασιαστικός Κανόνας-Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

- Η οριακή πιθανότητα για το ενδεχόμενο A έχει ως εξής:

$$P(A) = P(A \& B_1) + P(A \& B_2) + \dots + P(A \& B_k)$$

- Κάνοντας χρήση του Πολλαπλασιαστικού Κανόνα

$$P(A \& B) = P(A|B)P(B)$$

Όπου $B_1, B_2, \dots, B_k$ είναι k αμοιβαία αποκλειόμενα και εξαντλητικά ενδεχόμενα

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

$$P(A) = P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + \dots + P(A | B_k)P(B_k)$$

Λύση

Έστω τα εξής ενδεχόμενα:

Π_1 : Η πρώτη ύλη προέρχεται από τον Προμηθευτή Π_1

Π_2 : Η πρώτη ύλη προέρχεται από τον Προμηθευτή Π_2 ,

K. Παρτίδα φθάνει καθυστερημένα

K' : Παρτίδα φθάνει έγκαιρα

E: Παρτίδα ελαττωματική

E' : Παρτίδα αποδεκτή

Τι ποσοστό των αποδεκτών παρτίδων προέρχονται από τον προμηθευτή Π_1

Ζητείται να υπολογιστεί η πιθανότητα : $P(\Pi_1 | E')$

Δίνεται ότι:

$$P(\Pi_1) = 0.97, P(\Pi_2) = 0,03$$

$$P(K | \Pi_1) = 0.10, P(K | \Pi_2) = 0,65$$

$$P(E | \Pi_1) = 0,05, P(E | \Pi_2) = 0,25$$

Θεώρημα του Bayes

$$P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i)P(B_i)}{P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + \dots + P(A | B_k)P(B_k)}$$

• όπου

B_i = το i ενδεχόμενο και k αμοιβαία αποκλειόμενα και εξαντλητικά ενδεχόμενα

A = ενδεχόμενο που μπορεί να επηρεάσει την $P(B_i)$

Από το θεώρημα του Bayes έχουμε

$$\begin{aligned} P(\Pi_1 | E') &= \frac{P(\Pi_1)P(E' | \Pi_1)}{P(E')} = \frac{P(\Pi_1)[1 - P(E | \Pi_1)]}{1 - P(E)} \\ &= \frac{0,97 \cdot 0,95}{0,944} = 0,976 \end{aligned}$$

Άρα, στις αποδεκτές παρτίδες ποσοστό 97,6% προέρχεται από τον προμηθευτή Π_1

Ένας Πίνακας Συνάφειας Βοηθάει Στην Οργάνωση Δύο Η Περισσότερων Κατηγορικών Μεταβλητών

- Χρησιμοποιείται για την μελέτη προτύπων που ενδέχεται να υπάρχουν μεταξύ των μετρήσεων δύο ή περισσότερων κατηγορικών μεταβλητών
- Διασταυρώνει ή ταξινομεί τις από κοινού απαντήσεις σε κατηγορικές μεταβλητές
- Στην περίπτωση δύο μεταβλητών οι μετρήσεις της μίας μεταβλητής εντοπίζονται στις γραμμές και οι μετρήσεις της δεύτερης μεταβλητής εντοπίζονται στις στήλες του Πίνακα

Παράδειγμα Πίνακα Συνάφειας

- Σε τυχαίο δείγμα 400 τιμολογίων.
- Κάθε τιμολόγιο κατηγοριοποιείται ως μικρού, μεσαίου ή μεγάλου μεγέθους.
- Κάθε τιμολόγιο εξετάζεται επίσης για την ύπαρξη σφαλμάτων.
- Τα δεδομένα ταξινομούνται στον πίνακα συνάφειας δεξιά.

**Πίνακας Συνάφειας των Μεταβλητών
Μέγεθος και Ύπαρξη Σφαλμάτων**

	Ύπαρξη Σφαλμάτων		
Μέγεθος	Χωρίς Σφάλμα	Με Σφάλμα	Σύνολο
Μικρού Μεγέθους	170	20	190
Μεσαίου Μεγέθους	100	40	140
Μεγάλου Μεγέθους	65	5	70
Σύνολο	335	65	400

Πίνακας Συνάφειας Από Κοινού & Περιθώριες Πιθανότητες

	Υπαρξη Σφαλμάτων		
Μέγεθος	Χωρίς Σφάλμα	Με Σφάλμα	Σύνολο
Μικρού Μεγέθους	0.4250	0.0500	0.4750
Μεσαίου Μεγέθους	0.2500	0.1000	0.3500
Μεγάλου Μεγέθους	0.1625	0.1250	0.1725
Σύνολο	0.8325	0.1625	1

$$P(A) = P(A \& B_1) + P(A \& B_2) + \dots + P(A \& B_k)$$

Πίνακας Συνάφειας Δεσμευμένη Πιθανότητα Ποσοστά Ανά Σύνολο Γραμμής

	Υπαρξη Σφαλμάτων		
Μέγεθος	Χωρίς Σφάλμα	Με Σφάλμα	Σύνολο
Μικρού Μεγέθους	170	20	190
Μεσαίου Μεγέθους	100	40	140
Μεγάλου Μεγέθους	65	5	70
Σύνολο	335	65	400

$$\Pr(\text{Χωρίς Σφάλμα} | \text{Μικρού μεγέθους}) =$$

$$\frac{\Pr(\text{Χωρίς Σφάλμα \& Μικρού μεγέθους})}{\Pr(\text{Μικρού μεγέθους})} = \frac{170/400}{190/400} = \frac{170}{190} = 0,8947$$

Πιθανότητα να πάρω τιμολόγιο χωρίς σφάλμα στα τιμολόγια μικρού μεγέθους

Πίνακας Συνάφειας Δεσμευμένη Πιθανότητα Ποσοστά Ανά Σύνολο Γραμμής

	Υπαρξη Σφαλμάτων		
Μέγεθος	Χωρίς Σφάλμα	Με Σφάλμα	Σύνολο
Μικρού Μεγέθους	170	20	190
Μεσαίου Μεγέθους	100	40	140
Μεγάλου Μεγέθους	65	5	70
Σύνολο	335	65	400

Μας ενδιαφέρουν τα ποσοστά ύπαρξης σφαλμάτων για τα τιμολόγια μεσαίου μεγέθους (όχι στο σύνολο των τιμολογίων)

Θα πρέπει να εστιάσω το ενδιαφέρον μου στις γραμμές-μέγεθος
 $71.43\% = 100 / 140$ $28.57\% = 40 / 140$

$89.47\% = 170 / 190$
 $92.86\% = 65 / 70$

	Χωρίς Σφάλμα	Με Σφάλμα	Σύνολο
Μικρού Μεγέθους	89.47%	10.53%	100.0%
Μεσαίου Μεγέθους	71.43%	28.57%	100.0%
Μεγάλου Μεγέθους	92.86%	7.14%	100.0%
Σύνολο	83.75%	16.25%	100.0%

Πίνακας Συνάφειας Δεσμευμένη Πιθανότητα Ποσοστά Ανά Σύνολο Γραμμής ~Δεσμευμένη Πιθανότητα

	Χωρίς Σφάλμα	Με Σφάλμα	Σύνολο
Μικρού Μεγέθους	0.8947	0.1053	1
Μεσαίου Μεγέθους	0.7143	0.2857	1
Μεγάλου Μεγέθους	0.9286	0.0714	1
Σύνολο	0.5375	0.1625	1

Πιθανότητα ύπαρξης σφαλμάτων για
τα τιμολόγια μεσαίου μεγέθους
(όχι στο σύνολο των τιμολογίων)

Πίνακας Συνάφειας Δεσμευμένη Πιθανότητα Ποσοστά Ανά Σύνολο Γραμμής ~Δεσμευμένη Πιθανότητα

	Χωρίς Σφάλμα	Με Σφάλμα	Σύνολο
Μικρού Μεγέθους	0.8947	0.1053	1
Μεσαίου Μεγέθους	0.743	0.2857	1
Μεγάλου Μεγέθους	0.9286	0.0714	1
Σύνολο	0.8375	0.1625	1



Η πιθανότητα ύπαρξης σφαλμάτων είναι μεγαλύτερη (0.2857) για τα μεσαίου μεγέθους από ότι για τα τιμολόγια μικρού (0.1053) ή μεγάλου (0.0714) μεγέθους.

Πίνακας Συνάφειας Δεσμευμένη Πιθανότητα Ποσοστά Ανά Σύνολο Στήλης

	Υπαρξη Σφαλμάτων		
Μέγεθος	Χωρίς Σφάλμα	Με Σφάλμα	Σύνολο
Μικρού Μεγέθους	170	20	190
Μεσαίου Μεγέθους	100	40	140
Μεγάλου Μεγέθους	65	5	70
Σύνολο	335	65	400

Μας ενδιαφέρει τι ποσοστό **στα τιμολόγια με σφάλματα** είναι τα τιμολόγια μεσαίου μεγέθους

Θα πρέπει να εστιάσω το ενδιαφέρον μου στις στήλες-Υπαρξη σφαλμάτων

$$50.75\% = 170 / 335$$

$$30.77\% = 20 / 65$$



	Υπαρξη Σφαλμάτων		
Μέγεθος	Χωρίς Σφάλμα	Με Σφάλμα	Σύνολο
Μικρού Μεγέθους	50.75%	30.77%	47.50%
Μεσαίου Μεγέθους	29.85%	61.54%	35.00%
Μεγάλου Μεγέθους	19.40%	7.69%	17.50%
Σύνολο	100.0%	100.0%	100.0%

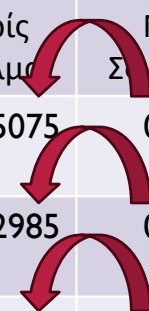


Πίνακας Συνάφειας Δεσμευμένη Πιθανότητα Ποσοστά Ανά Σύνολο Στήλης

Στα τιμολόγια μεσαίου μεγέθους η πιθανότητα να έχουν σφάλματα είναι μεγαλύτερη (0.6154) από ότι να μην έχουν (0.2985).

Δεν παρατηρείται η ίδια εικόνα στα τιμολόγια μικρού ή μεγάλου μεγέθους.

	Υπαρξη Σφαλμάτων		
Μέγεθος	Χωρίς Σφάλμα	Με Σφάλμα	Σύνολο
Μικρού Μεγέθους	0.5075	0.3077	0.4750
Μεσαίου Μεγέθους	0.2985	0.6154	0.3500
Μεγάλου Μεγέθους	0.1940	0.0769	0.1750
Σύνολο	1	1	1



5ο Πρόβλημα

Σε μια μεγάλη πόλη κυκλοφορούν 45 πολιτικές και 15 αθλητικές εφημερίδες. Μια τυχαία επιλεγμένη σελίδα των εφημερίδων αυτών μπορεί να περιέχει αποκλειστικά είτε Αθλητικά θέματα, είτε Θέματα γενικού ενδιαφέροντος (πολιτικά, οικονομικά, κοινωνικά, καλλιτεχνικά, κλπ), είτε Διαφημίσεις. Το ποσοστό των σελίδων, **ανάλογα** με τα θέματα που περιέχουν, για πολιτικές και αθλητικές εφημερίδες, δίνεται στον Πίνακα 1.

	Αθλητική εφημερίδα	Πολιτική εφημερίδα
Αθλητικά θέματα	70%	30%
Θέματα γενικού ενδιαφέροντος	10%	60%
Διαφημίσεις	20%	10%

Ένας αναγνώστης αγοράζει μία εφημερίδα και την ανοίγει σε μία τυχαία σελίδα.

1. Να υπολογιστεί η πιθανότητα η σελίδα να περιέχει θέματα γενικού ενδιαφέροντος.
2. Αν η σελίδα περιέχει αθλητικά θέματα ή διαφημίσεις να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι ο αναγνώστης έχει αγοράσει πολιτική εφημερίδα.



Λύση

- Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα.
- A: η εφημερίδα είναι αθλητική
 - A': η εφημερίδα είναι πολιτική
 - B: η σελίδα έχει αθλητικά θέματα
 - C: η σελίδα έχει θέματα γενικού ενδιαφέροντος
 - D: η σελίδα έχει διαφημίσεις

Είναι φανερό, ότι έχουμε πίνακα συνάφειας δεσμευμένων πιθανοτήτων, με ποσοστά ανά στήλες.

Περιεχόμενο	Τύπος Εφημερίδας	
	Αθλητική εφημερίδα (A)	Πολιτική εφημερίδα (A')
Αθλητικά θέματα (B)	70%	30%
Θέματα γενικού ενδιαφέροντος (C)	10%	60%
Διαφημίσεις (D)	20%	10%
ΣΥΝΟΛΟ	100%	100%

Το ποσοστό των σελίδων, ανάλογα με τα θέματα που περιέχουν, για πολιτικές και αθλητικές εφημερίδες, δίνεται στον Πίνακα 1.



Λύση

Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα.

A: η εφημερίδα είναι αθλητική

A': η εφημερίδα είναι πολιτική

B: η σελίδα έχει αθλητικά θέματα

C: η σελίδα έχει θέματα γενικού ενδιαφέροντος

D: η σελίδα έχει διαφημίσεις

Περιεχόμενο	Αθλητική εφημερίδα (A)	Πολιτική εφημερίδα (A')
Αθλητικά θέματα (B)	70%	30%
Θέματα γενικού ενδιαφέροντος (C)	10%	60%
Διαφημίσεις (D)	20%	10%
ΣΥΝΟΛΟ	100%	100%

Πίνακας συνάφειας δεσμευμένων πιθανοτήτων, με ποσοστά ανά στήλες.

Να υπολογιστεί η πιθανότητα η σελίδα να περιέχει θέματα γενικού ενδιαφέροντος

Από το θεώρημα Ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(C) = P(A)P(C|A) + P(A')P(C|A')$$

$$= \frac{15}{60} \cdot 0,10 + \frac{45}{60} \cdot 0,60 = 0,475$$

Σε μια μεγάλη πόλη κυκλοφορούν 45 πολιτικές και 15 αθλητικές εφημερίδες
Δηλαδή κυκλοφορούν 60 συνολικά εφημερίδες

Λύση

Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα.
 A: η εφημερίδα είναι αθλητική
 A': η εφημερίδα είναι πολιτική
 B: η σελίδα έχει αθλητικά θέματα
 C: η σελίδα έχει θέματα γενικού ενδιαφέροντος
 D: η σελίδα έχει διαφημίσεις

Περιεχόμενο	Αθλητική εφημερίδα (A)	Πολιτική εφημερίδα (A')
Αθλητικά θέματα (B)	70%	30%
Θέματα γενικού ενδιαφέροντος (C)	10%	60%
Διαφημίσεις (D)	20%	10%
ΣΥΝΟΛΟ	100%	100%

Αν η σελίδα περιέχει αθλητικά θέματα ή διαφημίσεις να υπολογιστεί η πιθανότητα ο αναγνώστης να έχει αγοράσει πολιτική εφημερίδα

Ζητείται η πιθανότητα:

$$P(A' | (B \cup D)) = \frac{P(A' \cap (B \cup D))}{P(B \cup D)} = \frac{P(A')P((B \cup D) | A')}{P(B \cup D)} \tag{1}$$

Άρα πρέπει να υπολογίσουμε $P(B \cup D)$
 $P((B \cup D) | A')$

Επίσης:

$$P(B \cup D) = P((B \cup D) \cap A') + P((B \cup D) \cap A)$$

$$= P(A') \cdot P((B \cup D) | A') + P(A) \cdot P((B \cup D) | A)$$

$$= \frac{45}{60} \cdot 0,4 + \frac{15}{60} \cdot 0,9 = 0,3 + 0,225 = 0,525 \tag{3}$$

(1),(2),(3) ⇒

$$P(A' | (B \cup D)) = \frac{\frac{45}{60} \cdot 0,4}{0,525} = 0,571$$

Γενικός Κανόνας της Αθροίσης

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ και } B)$

Αν τα A και B είναι αμοιβαία αποκλειστικά τότε, $P(A \text{ και } B) = 0$ και ο κανόνας απλοποιείται ως:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(Για αμοιβαία αποκλειστικά ενδεχόμενα A και B)

Οριστική Πιθανότητα-Πολλαπλασιαστικός Κανόνας-Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

- Η οριστική πιθανότητα για το ενδεχόμενο A έχει ως εξής:

$P(A) = P(A \& B_1) + P(A \& B_2) + \dots + P(A \& B_k)$

- Κάνοντας χρήση του Πολλαπλασιαστικού Κανόνα

$P(A \& B) = P(A|B)P(B)$

Όπου $B_1, B_2, \dots, B_k$ είναι k αμοιβαία αποκλειστικά και εξαντλητικά ενδεχόμενα

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_k)P(B_k)$

6ο Πρόβλημα

Έρευνα σχετικά με τα αίτια των τροχαίων ατυχημάτων αποκάλυψε ότι:

- 60% του συνόλου των ατυχημάτων γίνονται τη νύκτα
- Από τα νυκτερινά ατυχήματα 65% οφείλονται στο αλκοόλ ενώ από τα ατυχήματα που γίνονται κατά τη διάρκεια της ημέρας μόνο το 35% οφείλεται στο αλκοόλ.

Να υπολογισθούν:

- Το ποσοστό του συνόλου των ατυχημάτων που οφείλονται στο αλκοόλ.
- Από τα ατυχήματα που οφείλονται στο αλκοόλ το ποσοστό εκείνων που γίνονται νύκτα.



Λύση

Έστω τα εξής ενδεχόμενα:

N: το ενδεχόμενο ατυχήματος κατά τη διάρκεια της νύχτας

N': το ενδεχόμενο ατυχήματος κατά τη διάρκεια της ημέρας

A: το ενδεχόμενο ατυχήματος που οφείλεται στο αλκοόλ.

i) Ζητάμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(A)$

Από το θεώρημα Ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(N)P(A|N) + P(N')P(A|N') \\ &= 0,6 \cdot 0,65 + 0,4 \cdot 0,35 = 0,53 \end{aligned}$$

Άρα το ποσοστό των ατυχημάτων που οφείλονται στο αλκοόλ είναι 53%.

Δίνεται ότι:

$$P(N) = 0,6, \quad P(N') = 0,4$$

$$P(A|N) = 0,65$$

$$P(A|N') = 0,35.$$

ii) Ζητάμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(N|A)$

Από το θεώρημα **Bayes** έχουμε:

$$P(N|A) = \frac{P(N) \cdot P(A|N)}{P(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,65}{0,53} \approx 0,736$$

Άρα, από τα ατυχήματα που οφείλονται στο αλκοόλ, το ποσοστό εκείνων που γίνονται τη νύχτα είναι 73,6%