

Παρουσίαση

βασισμένη στο βιβλίο

Στατιστική Τόμος Α

ΤΩΝ

Βασίλη Αγγελή & Κατερίνας Δημάκη

Αθήνα, 2011

8. Παραμετρικοί Έλεγχοι Στατιστικών Υποθέσεων

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Στο πλαίσιο της κλασικής Στατιστικής Συμπερασματολογίας, χρησιμοποιούνται κυρίως δύο τεχνικές για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικών με τις τιμές των παραμέτρων ενός υπό μελέτη πληθυσμού, οι οποίες συνδέονται άμεσα μεταξύ τους: **η εκτίμηση των παραμέτρων** και **οι έλεγχοι στατιστικών υποθέσεων**. Η μέθοδος της εκτίμησης των παραμέτρων, είτε σημειακά είτε με διαστήματα εμπιστοσύνης, παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τους παραμετρικούς ελέγχους στατιστικών υποθέσεων, τη λήψη δηλαδή αποφάσεων σχετικών με τις τιμές κάποιων παραμέτρων του υπό μελέτη πληθυσμού.

Το παράδειγμα που ακολουθεί αποσαφηνίζει τη σχέση διαστήματος εμπιστοσύνης και ελέγχου στατιστικών υποθέσεων. Μια εταιρεία δημοσκοπήσεων παρακολουθεί την προεκλογική πορεία ενός υποψήφιου βουλευτή με εβδομαδιαίες έρευνες. Πέντε εβδομάδες πριν από τις εκλογές η σχετική δημοσκόπηση έδειξε ότι το 60% **(σημειακή εκτίμηση ποσοστού)** των ψηφοφόρων του κόμματος προτίθενται να σταυροδοτήσουν το συγκεκριμένο υποψήφιο. Στην πορεία της προεκλογικής περιόδου ο συγκεκριμένος υποψήφιος τοποθετήθηκε, κατά αμφιλεγόμενο τρόπο, σε κρίσιμο θέμα σχετικό με την κοινωνική πολιτική του κόμματος, γεγονός που ικανοποίησε κάποιους υποψήφιους ψηφοφόρους του, ενώ δυσαρέστησε κάποιους άλλους. Η εταιρεία δημοσκοπήσεων θέλει να εξετάσει αν και κατά πόσο η συγκεκριμένη τοποθέτηση συνέτεινε στο να μεταβληθεί, ενδεχομένως, το ποσοστό των υποψήφιων ψηφοφόρων του κόμματος που προτίθενται να υποστηρίξουν το συγκεκριμένο υποψήφιο βουλευτή. Το θέμα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί με τον κατάλληλο **έλεγχο στατιστικών υποθέσεων**.

Ως άλλα παραδείγματα τέτοιων ελέγχων θα μπορούσαν να αναφερθούν τα ακόλουθα:

- Ο διευθυντής ενός εργοστασίου θέλει να ελέγξει αν το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων που παράγει η μηχανή M_1 είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο ποσοστό της μηχανής M_2 .
- Ένας οικονομικός αναλυτής θέλει να ελέγξει αν οι μέσες ετήσιες αμοιβές των εργαζομένων στο βιομηχανικό κλάδο K_1 είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες αμοιβές των εργαζομένων στον κλάδο K_2 .
- Ένας ερευνητής θέλει να ελέγξει αν η μεταβλητότητα των τιμών πώλησης του προϊόντος Π_1 στους νομούς της χώρας είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη μεταβλητότητα των τιμών πώλησης του προϊόντος Π_2 .

Οι έλεγχοι τους οποίους θα μελετήσουμε, περιλαμβάνουν δύο **ισχυρισμούς**, οι οποίοι, στα προβλήματα τα οποία εμείς θα αντιμετωπίσουμε, αφορούν κάποια παράμετρο του υπό μελέτη πληθυσμού και ονομάζονται **στατιστικές υποθέσεις**. Η διαδικασία ενός στατιστικού ελέγχου περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

i. Την **εξειδίκευση** των στατιστικών υποθέσεων: της **μηδενικής υπόθεσης** η οποία συμβολίζεται με H_0 , και της **εναλλακτικής υπόθεσης**, η οποία συμβολίζεται με H_1 . Οι διεθνώς χρησιμοποιούμενοι **εμπειρικοί** κανόνες για τον καθορισμό, στο πλαίσιο κάθε συγκεκριμένου προβλήματος, της μηδενικής υπόθεσης είναι οι εξής:

- **Ως μηδενική υπόθεση τίθεται εκείνη της οποίας η εσφαλμένη απόρριψη εγκυμονεί τους περισσότερους κινδύνους.**
- **Ως μηδενική υπόθεση τίθεται εκείνη την οποία επιθυμεί ο ερευνητής να απορρίψει.**

Έχοντας καθορίσει πλήρως τη μηδενική υπόθεση, η εναλλακτική ορίζεται αυτόματα ως η «**αντίθετή**» της, εννοώντας ότι δεν μπορούν και οι δύο να ισχύουν ταυτόχρονα. Η εναλλακτική είναι η υπόθεση την οποία ο ερευνητής ελπίζει να στηρίξουν τα δεδομένα του.

- ii. Τον καθορισμό μιας μικρής πιθανότητας, η οποία είναι η μέγιστη αποδεκτή πιθανότητα εσφαλμένης απόρριψης της H_0 . Η πιθανότητα αυτή ονομάζεται **επίπεδο σημαντικότητας** και συμβολίζεται με α . Με απλά λόγια, το α εκφράζει την πιθανότητα να απορρίψουμε την H_0 όταν αυτή είναι αληθής.
- iii. Τη λήψη τυχαίου δείγματος και την επιλογή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου που υπαγορεύεται από το πρόβλημα και τη μηδενική υπόθεση. Η τιμή ή οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου, που αντιστοιχούν στο επίπεδο σημαντικότητας α , ονομάζονται **κρίσιμα σημεία** και οριοθετούν την **περιοχή απόρριψης** και την **περιοχή μη απόρριψης** της μηδενικής υπόθεσης. Η περιοχή απόρριψης ονομάζεται και **κρίσιμη περιοχή**.

iv. Τη διατύπωση της απόφασης. Συγκεκριμένα, αν η τιμή της **στατιστικής συνάρτησης ελέγχου**, κάτω από τη μηδενική υπόθεση, εντοπίζεται στην περιοχή μη απόρριψης της H_0 , αυτό συνεπάγεται ότι οι ενδείξεις από τα δεδομένα μάς οδηγούν σε μη απόρριψη της H_0 . Αν, όμως, η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου, κάτω από τη μηδενική υπόθεση, εντοπίζεται στην περιοχή απόρριψης της H_0 , αυτό συνεπάγεται ότι οι ενδείξεις από τα δεδομένα μάς οδηγούν σε απόρριψη της H_0 προς όφελος της H_1 .

Είναι προφανές ότι κατά τη διαδικασία λήψης μιας απόφασης υπάρχουν οι τέσσερις δυνατές περιπτώσεις που παρουσιάζονται στον Πίνακα που ακολουθεί. Στις δύο από τις περιπτώσεις αυτές, οι οποίες αναφέρονται στη συνέχεια, η απόφαση στην οποία οδηγούμαστε είναι λανθασμένη:

- εσφαλμένη απόρριψη της H_0 , οπότε υποπίπτουμε σε **σφάλμα τύπου I**
- εσφαλμένη μη απόρριψη της H_0 , οπότε υποπίπτουμε σε **σφάλμα τύπου II**.

Πίνακας

Σχέση απόφασης και πραγματικής κατάστασης

		ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ	
		H_0 αληθής	H_0 όχι αληθής
Α Π Ο Φ Α Σ Η	Μη απόρριψη της H_0	Σωστή απόφαση	Σφάλμα τύπου II
	Απόρριψη της H_0	Σφάλμα τύπου I	Σωστή απόφαση

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι τη μέγιστη τιμή της πιθανότητας σφάλματος τύπου I την έχουμε ήδη ονομάσει επίπεδο σημαντικότητας και τη συμβολίσαμε με α . Την πιθανότητα να υποθέσουμε σε σφάλμα τύπου II τη συμβολίζουμε με β . Σχηματικά έχουμε τις εξής δύο πιθανότητες διάπραξης σφάλματος

$$\alpha = P(\text{σφάλματος τύπου I}) = P(\text{απόρριψης της } H_0 \text{ ενώ είναι αληθής})$$

$$\beta = P(\text{σφάλματος τύπου II}) = P(\text{μη απόρριψης της } H_0 \text{ ενώ δεν είναι αληθής})$$

και τις παρακάτω δύο πιθανότητες λήψης σωστής απόφασης

$$1 - \alpha = P(\text{μη απόρριψης της } H_0 \text{ δεδομένου ότι είναι αληθής})$$

$$1 - \beta = P(\text{απόρριψης της } H_0 \text{ δεδομένου ότι δεν είναι αληθής}).$$

Η ποσότητα $1 - \beta$ ονομάζεται **ισχύς του ελέγχου** και είναι ένα μέτρο της ευαισθησίας του και της ικανότητάς του να λειτουργεί σωστά. Με απλά λόγια, όσο μεγαλύτερες είναι οι τιμές του $1 - \beta$, τόσο περισσότερο αυξάνει η πιθανότητα να εξαγάγουμε ορθά συμπεράσματα.

Για τις πιθανότητες των σφαλμάτων I και II θα πρέπει να επισημάνουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- i. Το μέγεθος της κρίσιμης περιοχής και, κατά συνέπεια, η πιθανότητα σφάλματος τύπου I, α , μπορεί να μειωθεί με κατάλληλη επιλογή των κρίσιμων σημείων.
- ii. Οι πιθανότητες των σφαλμάτων I και II συνδέονται άμεσα. Μείωση της πιθανότητας να διαπράξουμε σφάλμα τύπου I συνεπάγεται αύξηση της πιθανότητας να διαπράξουμε σφάλμα τύπου II και αντίστροφα, δηλαδή μείωση της πιθανότητας να διαπράξουμε σφάλμα τύπου II συνεπάγεται αύξηση της πιθανότητας να διαπράξουμε σφάλμα τύπου I, με την προϋπόθεση ότι το μέγεθος του δείγματος παραμένει αμετάβλητο.
- iii. Αύξηση του μεγέθους του δείγματος οδηγεί, εν γένει, σε μείωση τόσο του α όσο και του β , με την προϋπόθεση ότι το μέγεθος της κρίσιμης περιοχής παραμένει αμετάβλητο.
- iv. Όταν η μηδενική υπόθεση δεν είναι αληθής, το β αυξάνει καθώς η υποτιθέμενη (μηδενική) τιμή της παραμέτρου πλησιάζει την πραγματική της τιμή. Με άλλα λόγια, η τιμή του β αυξάνει καθώς η διαφορά μεταξύ υποτιθέμενης (μηδενικής) τιμής της παραμέτρου και της πραγματικής της τιμής μειώνεται.

Γενικά, μπορεί να υποστηριχθεί ότι ο ερευνητής έχει τη δυνατότητα καθορισμού της πιθανότητας σφάλματος τύπου I, α , κατά την επιλογή των κρίσιμων σημείων. Κατά συνέπεια, είναι εύκολο για αυτόν να θέσει την πιθανότητα σφάλματος τύπου I ίση, ή περίπου ίση, με την όποια τιμή επιθυμεί. Δεδομένου, λοιπόν, ότι ο ερευνητής ελέγχει άμεσα την πιθανότητα της λανθασμένης απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, η απόφαση περί **απόρριψης της H_0** είναι ένα **ισχυρό συμπέρασμα**. Από την άλλη μεριά, η πιθανότητα σφάλματος τύπου II, β , δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από την πραγματική τιμή της υπό μελέτη παραμέτρου και από το μέγεθος του δείγματος που έχουμε επιλέξει. Δεδομένου ότι η πιθανότητα σφάλματος τύπου II εξαρτάται τόσο από το μέγεθος του δείγματος όσο και από τη διαφορά μεταξύ υποτιθέμενης (μηδενικής) τιμής της παραμέτρου και της πραγματικής της τιμής, η απόφαση περί **αποδοχής της H_0** είναι ένα **ασθενές συμπέρασμα**.

Κατά συνέπεια, αντί της έκφρασης

«αποδοχή της H_0 »

πρέπει να χρησιμοποιείται η έκφραση

«μη απόρριψη της H_0 ».

Συμπερασματικά:

- Όταν **απορρίπτουμε την H_0** σε επίπεδο σημαντικότητας α , τότε είμαστε **κατά τουλάχιστον $(1-\alpha)100\%$ βέβαιοι ότι η μηδενική υπόθεση δεν ισχύει.**
- Όταν δεν απορρίπτουμε την H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας α , τότε απλώς δεν έχουμε επαρκή στοιχεία για να τεκμηριώσουμε την απόρριψή της. Με άλλα λόγια, **η μη απόρριψη της H_0 δεν σημαίνει απαραίτητα ότι αποδείχθηκε κάτι. Απλώς δεν αποδείχθηκε το αντίθετό του.**

Μια άλλη ποσότητα, η οποία έχει ιδιαίτερη σημασία κατά τη διεξαγωγή στατιστικών ελέγχων υποθέσεων, είναι το **παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας**. Το παρατηρούμενο επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας ορίζεται ως η πιθανότητα η στατιστική συνάρτηση ελέγχου να πάρει, κάτω από τη μηδενική υπόθεση, τιμή τόσο ή περισσότερο ακραία από αυτήν που ήδη παρατηρήσαμε στο δείγμα μας. Στην πράξη, και για δεδομένη τιμή του επιπέδου σημαντικότητας α , τιμές του p-value μικρότερες από α ισοδυναμούν με απόρριψη της H_0 .

Ολοκληρώνουμε την εισαγωγική αυτή ενότητα αναφερόμενοι στα είδη των στατιστικών υποθέσεων και τα είδη των στατιστικών ελέγχων. Έστω θ παράμετρος του υπό μελέτη πληθυσμού και έστω η μηδενική υπόθεση

$$H_0 : \theta = \theta_0 .$$

Η εναλλακτική υπόθεση μπορεί να έχει μία από τις παρακάτω μορφές:

$$H_1 : \theta < \theta_0$$

$$H_1 : \theta > \theta_0$$

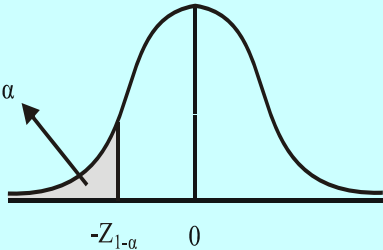
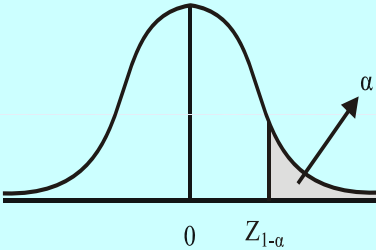
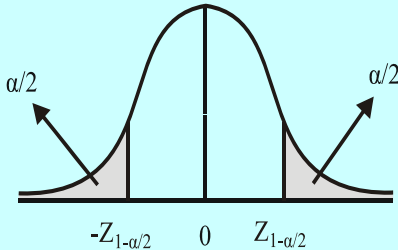
$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Μία στατιστική υπόθεση ονομάζεται **απλή** αν αναφέρεται σε μία μόνο συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου θ , διαφορετικά ονομάζεται **σύνθετη**.

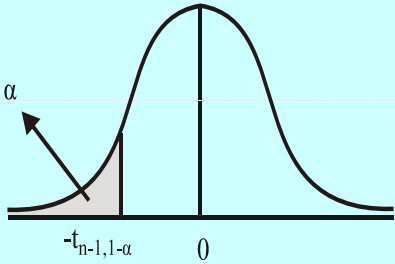
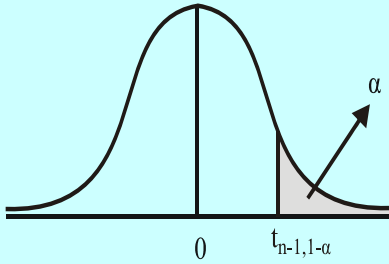
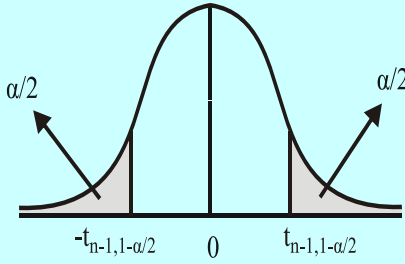
Ο έλεγχος της $H_0: \theta = \theta_0$ έναντι της $H_1: \theta \neq \theta_0$ ονομάζεται **αμφίπλευρος ή δικατάληκτος έλεγχος** και η κρίσιμη περιοχή του αποτελείται από τις δύο ουρές της δειγματικής κατανομής της $\hat{\Theta}$, δηλαδή της εκτιμήτριας συνάρτησης της παραμέτρου θ . Οι έλεγχοι της $H_0: \theta = \theta_0$, έναντι είτε της $H_1: \theta < \theta_0$ είτε της $H_1: \theta > \theta_0$ ονομάζονται **μονόπλευροι ή μονοκατάληκτοι έλεγχοι**. Ειδικότερα, ο έλεγχος της $H_0: \theta = \theta_0$, έναντι της $H_1: \theta < \theta_0$ ονομάζεται **αριστερόπλευρος** και η κρίσιμη περιοχή του αποτελείται από την αριστερή ουρά της δειγματικής κατανομής της $\hat{\Theta}$, ενώ ο έλεγχος της $H_0: \theta = \theta_0$ έναντι της $H_1: \theta > \theta_0$ ονομάζεται **δεξιόπλευρος** και η κρίσιμη περιοχή του αποτελείται από τη δεξιά ουρά της δειγματικής κατανομής της $\hat{\Theta}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΕΝΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ

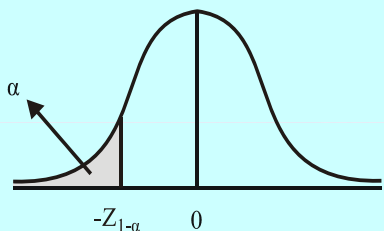
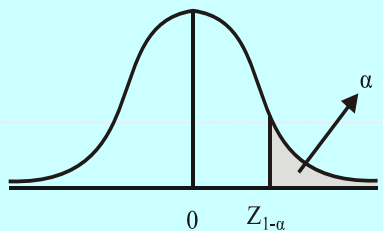
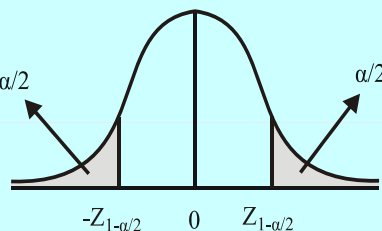
Περιοχές απόρριψης μονοκατάληκτου και δικατάληκτου ελέγχου για τον μέσο κανονικού πληθυσμού όταν η διακύμανσή του είναι γνωστή

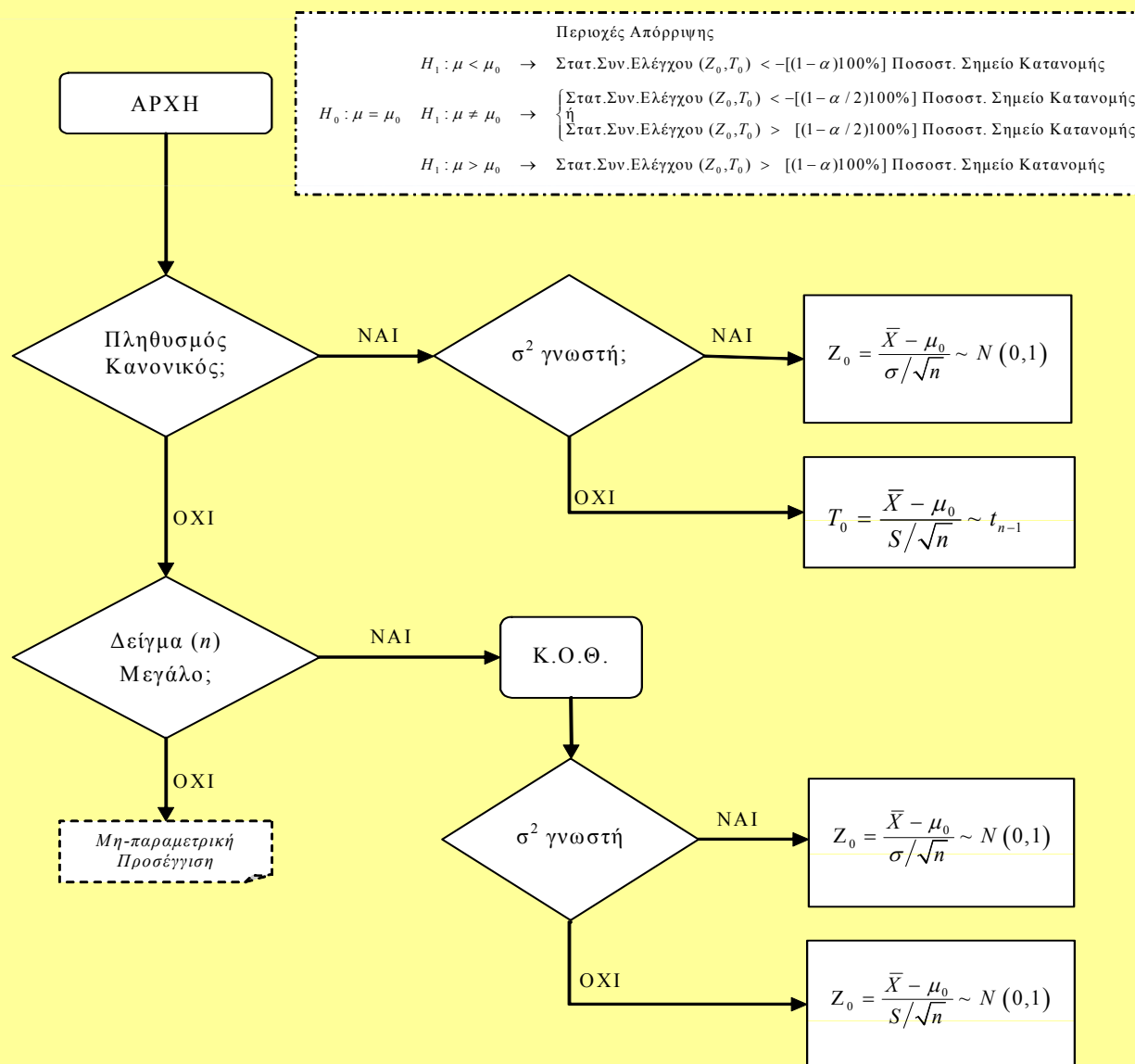
$H_0: \mu = \mu_0$		
$H_1: \mu < \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$
Στατιστική συνάρτηση ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση $Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \text{ όπου } \sigma_{\bar{X}} = \sigma / \sqrt{n}$		
Απορρίπτουμε την H_0 , αν $Z_0 < -Z_{1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0 , αν $Z_0 > Z_{1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0 , αν $Z_0 < -Z_{1-\alpha/2}$ ή $Z_0 > Z_{1-\alpha/2}$ 

Περιοχές απόρριψης μονοκατάληκτου και δικατάληκτου ελέγχου για τον μέσο κανονικού πληθυσμού όταν η διακύμανσή του είναι άγνωστη

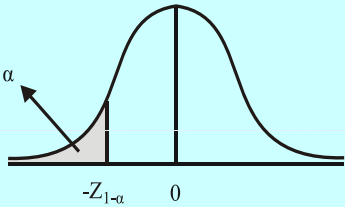
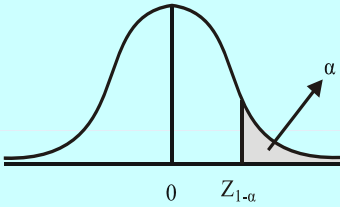
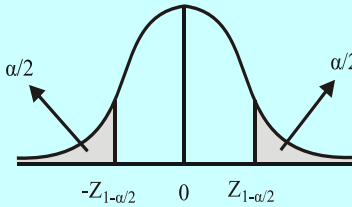
$H_0 : \mu = \mu_0$		
$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$
Στατιστική συνάρτηση ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση $T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}} \text{ όπου } S_{\bar{X}} = S / \sqrt{n}$		
Απορρίπτουμε την H_0 , αν $T_0 < -t_{n-1, 1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0 , αν $T_0 > t_{n-1, 1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0 , αν $T_0 < -t_{n-1, 1-\alpha/2} \text{ ή } T_0 > t_{n-1, 1-\alpha/2}$ 

Περιοχές απόρριψης μονοκατάληκτου και δικατάληκτου ελέγχου για τον μέσο μη κανονικού πληθυσμού όταν η διακύμανσή του είναι είτε γνωστή είτε άγνωστη

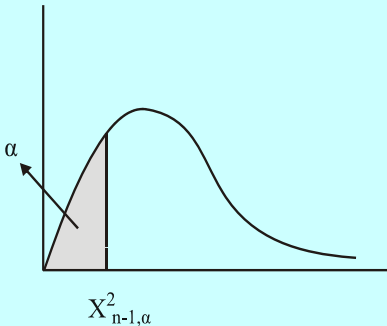
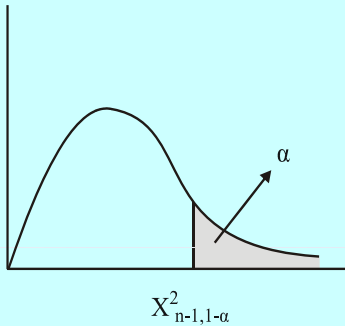
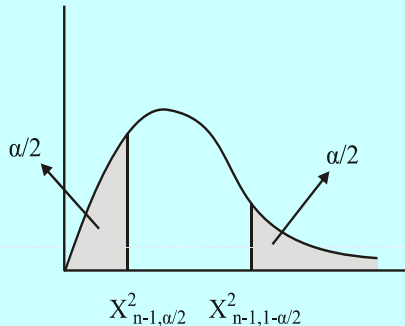
$H_0 : \mu = \mu_0$		
$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$
Στατιστική συνάρτηση ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση $Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \text{ αν } \sigma \text{ γνωστή, } Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}} \text{ αν } \sigma \text{ άγνωστη}$		
Απορρίπτουμε την H_0 , αν $Z_0 < -Z_{1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0 , αν $Z_0 > Z_{1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0 , αν $Z_0 < -Z_{1-\alpha/2} \text{ ή } Z_0 > Z_{1-\alpha/2}$ 



Περιοχές απόρριψης μονοκατάληκτου και δικατάληκτου ελέγχου
για το ποσοστό των μονάδων πληθυσμού που έχουν συγκεκριμένη ιδιότητα

$H_0 : p = p_0$		
$H_1 : p < p_0$	$H_1 : p > p_0$	$H_1 : p \neq p_0$
Στατιστική συνάρτηση ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση $Z_0 = \frac{\frac{X}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$		
Απορρίπτουμε την H_0 , αν $Z_0 < -Z_{1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0 , αν $Z_0 > Z_{1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0 , αν $Z_0 < -Z_{1-\alpha/2}$ ή $Z_0 > Z_{1-\alpha/2}$ 

Περιοχές απόρριψης μονοκατάληκτου και δικατάληκτου ελέγχου
για τη διακύμανση κανονικού πληθυσμού

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$		
$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
Στατιστική συνάρτηση ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση $X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$		
Απορρίπτουμε την H_0, αν $X_0^2 < \chi_{n-1, \alpha}^2$ 	Απορρίπτουμε την H_0, αν $X_0^2 > \chi_{n-1, 1-\alpha}^2$ 	Απορρίπτουμε την H_0, αν $X_0^2 < \chi_{n-1, \alpha/2}^2 \text{ ή } X_0^2 > \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$ 

Παράδειγμα Ένα μηχάνημα κατασκευάζει μπαταρίες για ειδικές χρήσεις των οποίων ο χρόνος ζωής ακολουθεί, σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του μηχανήματος, κανονική κατανομή με μέσο 22 ώρες και τυπική απόκλιση 3 ώρες. Επειδή στις χρήσεις για τις οποίες προορίζονται οι μπαταρίες ο χρόνος ζωής τους είναι μία κρίσιμη παράμετρος, η λειτουργία του μηχανήματος παρακολουθείται συνεχώς με δειγματοληπτικό έλεγχο για το χρόνο ζωής των παραγόμενων μπαταριών. Από τυχαίο δείγμα 9 μπαταριών διαπιστώνεται ότι οι χρόνοι ζωής τους (σε ώρες) είναι:

16 18 22 20 21 20 16 22 25

Με τη βοήθεια της πληροφορίας αυτής να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05, αν το μηχάνημα λειτουργεί σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του.

Λύση

Ο στατιστικός έλεγχος που πρέπει να διεξαχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05, είναι $H_0 : \mu = 22$ ως προς την εναλλακτική $H_1 : \mu \neq 22$.

Εύκολα υπολογίζουμε ότι $\bar{x} = 20$. Επίσης βρίσκουμε ότι $\sigma_{\bar{x}} = 1$.

Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση, είναι:

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{20 - 22}{1} = -2.$$

Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης προσδιορίζεται ως $Z_0 < -Z_{1-\alpha/2}$ ή $Z_0 > Z_{1-\alpha/2}$. Από τον Πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής, βρίσκουμε ότι για $\alpha = 0.05$ είναι $Z_{0.975} = 1.96$. Άρα, στη συγκεκριμένη περίπτωση, η περιοχή απόρριψης καθορίζεται από τις σχέσεις $Z_0 < -1.96$ ή $Z_0 > 1.96$. Κατά συνέπεια, η τιμή $Z_0 = -2$ βρίσκεται στην περιοχή απόρριψης. Επομένως, οι ενδείξεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το μηχάνημα δεν λειτουργεί σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του.

Παράδειγμα Ένα μηχάνημα κατασκευάζει μπαταρίες για ειδικές χρήσεις των οποίων ο χρόνος ζωής ακολουθεί, σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του μηχανήματος, κανονική κατανομή με μέσο 22 ώρες. Επειδή στις χρήσεις για τις οποίες προορίζονται οι μπαταρίες ο χρόνος ζωής τους είναι μία κρίσιμη παράμετρος, η λειτουργία του μηχανήματος παρακολουθείται συνεχώς με δειγματοληπτικό έλεγχο για το χρόνο ζωής των παραγόμενων μπαταριών. Από τυχαίο δείγμα 9 μπαταριών διαπιστώνεται ότι οι χρόνοι ζωής τους (σε ώρες) είναι:

16 18 22 20 21 20 16 22 25

α. Με τη βοήθεια της παρεχόμενης πληροφορίας να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05, αν το μηχάνημα λειτουργεί σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του.

β. Με τη βοήθεια της παρεχόμενης πληροφορίας να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05 η υπόθεση ότι ο μέσος χρόνος ζωής των μπαταριών είναι μικρότερος από 22 ώρες.

Λύση

α. Ο στατιστικός έλεγχος που πρέπει να διεξαχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 είναι: $H_0 : \mu = 22$ ως προς την εναλλακτική $H_1 : \mu \neq 22$. Εύκολα υπολογίζουμε ότι $\bar{x} = 20$. Επίσης, βρίσκουμε ότι $s = 2.96$. Κατά συνέπεια προκύπτει ότι $s_{\bar{x}} = 0.986$. Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση είναι

$$T_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} = \frac{20 - 22}{0.986} = -2.03.$$

Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης προσδιορίζεται από τις σχέσεις $T_0 < -t_{n-1, 1-\alpha/2}$ ή $T_0 > t_{n-1, 1-\alpha/2}$. Από τον Πίνακα που περιέχει τα ποσοστιαία σημεία της κατανομής t , βρίσκουμε ότι για $\alpha = 0.05$ και για $\nu = 8$ βαθμούς ελευθερίας είναι $t_{8, 0.975} = 2.306$. Άρα, η περιοχή απόρριψης στη συγκεκριμένη περίπτωση καθορίζεται από τις σχέσεις $T_0 < -2.306$ ή $T_0 > 2.306$. Κατά συνέπεια, η τιμή $T_0 = -2.03$ βρίσκεται στην περιοχή μη απόρριψης. Επομένως, οι ενδείξεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το μηχάνημα λειτουργεί σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του.

β. Ο στατιστικός έλεγχος που πρέπει να διεξαχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 είναι $H_0 : \mu = 22$ ως προς την εναλλακτική $H_1 : \mu < 22$. Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση υπολογίστηκε αναλυτικά στο προηγούμενο ερώτημα και είναι $T_0 = -2.03$. Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης είναι $T_0 < -t_{n-1, 1-\alpha}$. Από τον Πίνακα που περιέχει τα ποσοστιαία σημεία της κατανομής t , βρίσκουμε ότι για $\alpha = 0.05$ και στους $\nu = 8$ βαθμούς ελευθερίας είναι $t_{8, 0.95} = 1.86$. Άρα, στη συγκεκριμένη περίπτωση, η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης καθορίζεται από τη σχέση $T_0 < -1.86$. Κατά συνέπεια, η τιμή $T_0 = -2.03$ βρίσκεται στην περιοχή απόρριψης. Επομένως, οι ενδείξεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο μέσος χρόνος ζωής των μπαταριών είναι μικρότερος από 22 ώρες.

Παράδειγμα Όπως προκύπτει από ιστορικά στοιχεία, το ποσοστό των ελαττωματικών συσκευασιών μιας εταιρείας παραγωγής και συσκευασίας ενός προϊόντος είναι 10%. Ο υπεύθυνος του ποιοτικού ελέγχου της εταιρείας θεωρεί ότι το ποσοστό αυτό είναι υψηλό και εισάγει μια νέα μέθοδο συσκευασίας προκειμένου να το μειώσει. Για να διαπιστώσει τα αποτελέσματα της νέας μεθόδου, επιλέγει ένα τυχαίο δείγμα 200 συσκευασιών για τις οποίες χρησιμοποιήθηκε η νέα μέθοδος, και παρατηρεί ότι 11 από αυτές είναι ελαττωματικές. Ποιο θα είναι το συμπέρασμα του υπευθύνου σχετικά με την αποτελεσματικότητα της νέας μεθόδου σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05;

Λύση

Η υπόθεση που πρέπει να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05 είναι

$$H_0 : p = 0.1 \text{ έναντι της εναλλακτικής } H_1 : p < 0.1 .$$

Από το δείγμα έχουμε

$$\frac{X}{n} = \frac{11}{200} = 0.055 .$$

Συνεπώς, η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου, κάτω από την H_0 , είναι:

$$Z_0 = \frac{\frac{X}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{0.055 - 0.1}{\sqrt{\frac{(0.1)(0.9)}{200}}} = -2.12 .$$

Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης είναι $Z_0 < -Z_{1-\alpha}$. Από τον Πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής βρίσκουμε ότι, για $\alpha = 0.05$, έχουμε $Z_{0.95} = 1.64$. Άρα, στη συγκεκριμένη περίπτωση, η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης καθορίζεται από τη σχέση $Z_0 < -1.64$. Κατά συνέπεια, η τιμή $Z_0 = -2.12$ βρίσκεται στην περιοχή απόρριψης. Επομένως, οι ενδείξεις που έχουμε από το δείγμα οδηγούν σε απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, που σημαίνει ότι η νέα μέθοδος συσκευασίας μειώνει το ποσοστό των ελαττωματικών.

Παράδειγμα Ο καθηγητής Στατιστικής ενός Τμήματος Διοίκησης Επιχειρήσεων πιστεύει ότι το επίπεδο δυσκολίας των θεμάτων και ο τρόπος βαθμολόγησης των γραπτών ενός διαγωνίσματος πρέπει να είναι σχεδιασμένα έτσι ώστε να δίνουν αποκλίσεις βαθμολογίας αρκετά μεγάλες για να απεικονίζουν τη διαφορά απόδοσης των φοιτητών αλλά όχι τόσο μεγάλες ώστε να αποθαρρύνουν αυτούς που δεν έγραψαν καλά. Ιστορικά στοιχεία που έχει στη διάθεσή του προσδιορίζουν ότι απόκλιση 13 μονάδων σε κλίμακα βαθμολογίας 0 – 100 είναι ιδανική και δείχνει μια καλά σχεδιασμένη εξέταση. Στην τελευταία εξέταση Στατιστικής του συγκεκριμένου μαθήματος, όπου πήραν μέρος 31 φοιτητές, η μέση βαθμολογία ήταν 72.7 και η τυπική απόκλιση 15.9 μονάδες. Ο καθηγητής ισχυρίζεται ότι ήταν μια καλά σχεδιασμένη εξέταση. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του, σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.01$;

Λύση

Η υπόθεση που πρέπει να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 0,01 είναι $H_0 : \sigma^2 = 13^2$ έναντι της εναλλακτικής $H_1 : \sigma^2 \neq 13^2$. Από το δείγμα μας έχουμε ότι, $\bar{x} = 72.7$ $s = 15.9$. Συνεπώς η τιμή της στατιστική συνάρτηση ελέγχου,

$$\text{κάτω από την } H_0, \text{ υπολογίζεται ως } X_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(30)(15.9)^2}{13^2} = 44.88.$$

Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης είναι $X_0^2 < \chi_{n-1, \alpha/2}^2$ ή $X_0^2 > \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$. Από τον Πίνακα που περιέχει τα ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2 , βρίσκουμε ότι για $\alpha = 0.01$ και $\nu = n-1 = 30$ βαθμούς ελευθερίας έχουμε $\chi_{30, 0.005}^2 = 13.7867$ και $\chi_{30, 0.995}^2 = 53.6720$. Άρα, στη συγκεκριμένη περίπτωση, η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης καθορίζεται από τις σχέσεις, $X_0^2 < 13.7867$ ή $X_0^2 > 53.6720$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η τιμή $X_0^2 = 44.88$ δεν βρίσκεται στην περιοχή απόρριψης. Επομένως, με βάση τις ενδείξεις του δείγματος δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση που σημαίνει ότι θα πρέπει να συμφωνήσουμε με τον ισχυρισμό του καθηγητή ότι η εξέταση ήταν καλά σχεδιασμένη.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΔΥΟ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ

Έστω ότι έχουμε δύο πληθυσμούς (κανονικούς ή μη) με γνωστές ή άγνωστες διακυμάνσεις και θέλουμε να συγκρίνουμε τους μέσους τους. Οι στατιστικές υποθέσεις που πρέπει να ελέγξουμε, στην περίπτωση αυτή, μπορεί να έχουν την παρακάτω μορφή:

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_1 : \mu_X < \mu_Y$$

$$H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

$$H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$$

ή ισοδύναμα:

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$$

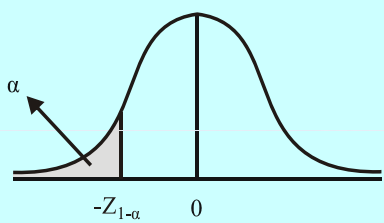
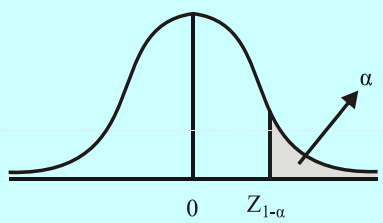
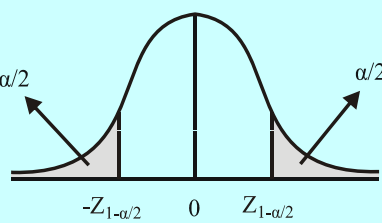
$$H_1 : \mu_X - \mu_Y < 0$$

$$H_1 : \mu_X - \mu_Y > 0$$

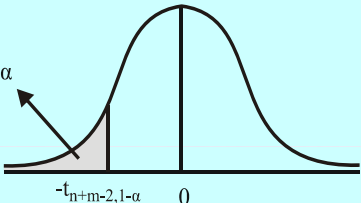
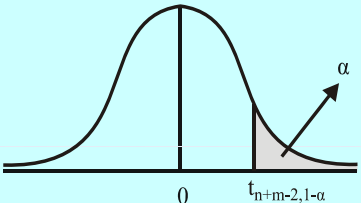
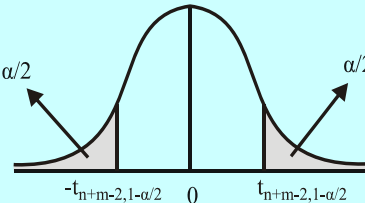
$$H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq 0$$

Η μεθοδολογία που θα ακολουθήσουμε αποτελεί μια επέκταση των όσων έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα για τους ελέγχους υποθέσεων που αφορούν έναν πληθυσμό.

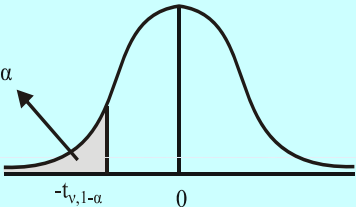
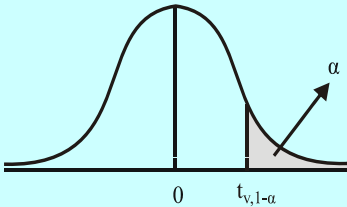
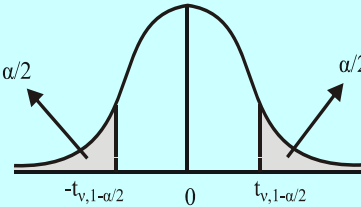
Περιοχές απόρριψης μονοκατάληκτου και δικατάληκτου ελέγχου
για τη διαφορά των μέσων κανονικών πληθυσμών με γνωστές διακυμάνσεις.
Δείγματα ανεξάρτητα

$H_0 : \mu = \mu_X - \mu_Y = 0$		
$H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y < 0$	$H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y > 0$	$H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y \neq 0$
Στατιστική συνάρτηση ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση $Z_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma_{\bar{X} - \bar{Y}}} \text{ όπου } \sigma_{\bar{X} - \bar{Y}} = \sqrt{\sigma_X^2 / n + \sigma_Y^2 / m}$		
Απορρίπτουμε την H_0, αν $Z_0 < -Z_{1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0, αν $Z_0 > Z_{1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0, αν $Z_0 < -Z_{1-\alpha/2} \text{ ή } Z_0 > Z_{1-\alpha/2}$ 

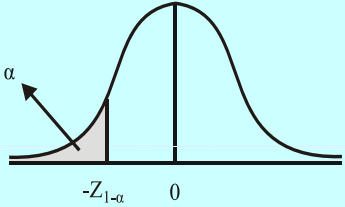
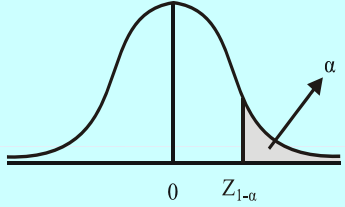
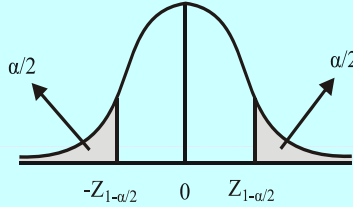
Περιοχές απόρριψης μονοκατάληκτου και δικατάληκτου ελέγχου
για τη διαφορά των μέσων κανονικών πληθυσμών με άγνωστες ή ίσες διακυμάνσεις.
Δείγματα ανεξάρτητα

$H_0 : \mu = \mu_X - \mu_Y = 0$		
$H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y < 0$	$H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y > 0$	$H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y \neq 0$
Στατιστική συνάρτηση ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση $T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_{\bar{X} - \bar{Y}}} \text{ όπου } S_{\bar{X} - \bar{Y}} = S_p \sqrt{1/n + 1/m} \text{ και } S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$		
Απορρίπτουμε την H_0 , αν $T_0 < -t_{n+m-2, 1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0 , αν $T_0 > t_{n+m-2, 1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0 , αν $T_0 < -t_{n+m-2, 1-\alpha/2} \text{ ή } T_0 > t_{n+m-2, 1-\alpha/2}$ 

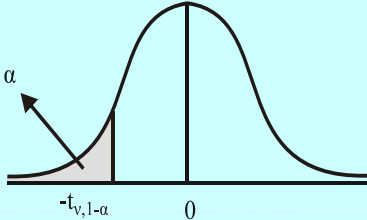
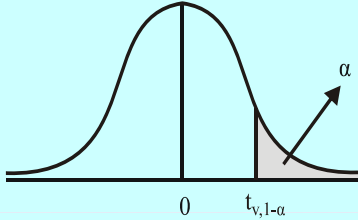
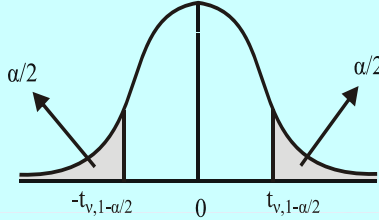
Περιοχές απόρριψης μονοκατάληκτου και δικατάληκτου ελέγχου
για τη διαφορά των μέσων κανονικών πληθυσμών με άγνωστες και άνισες
διακυμάνσεις.
Δείγματα ανεξάρτητα

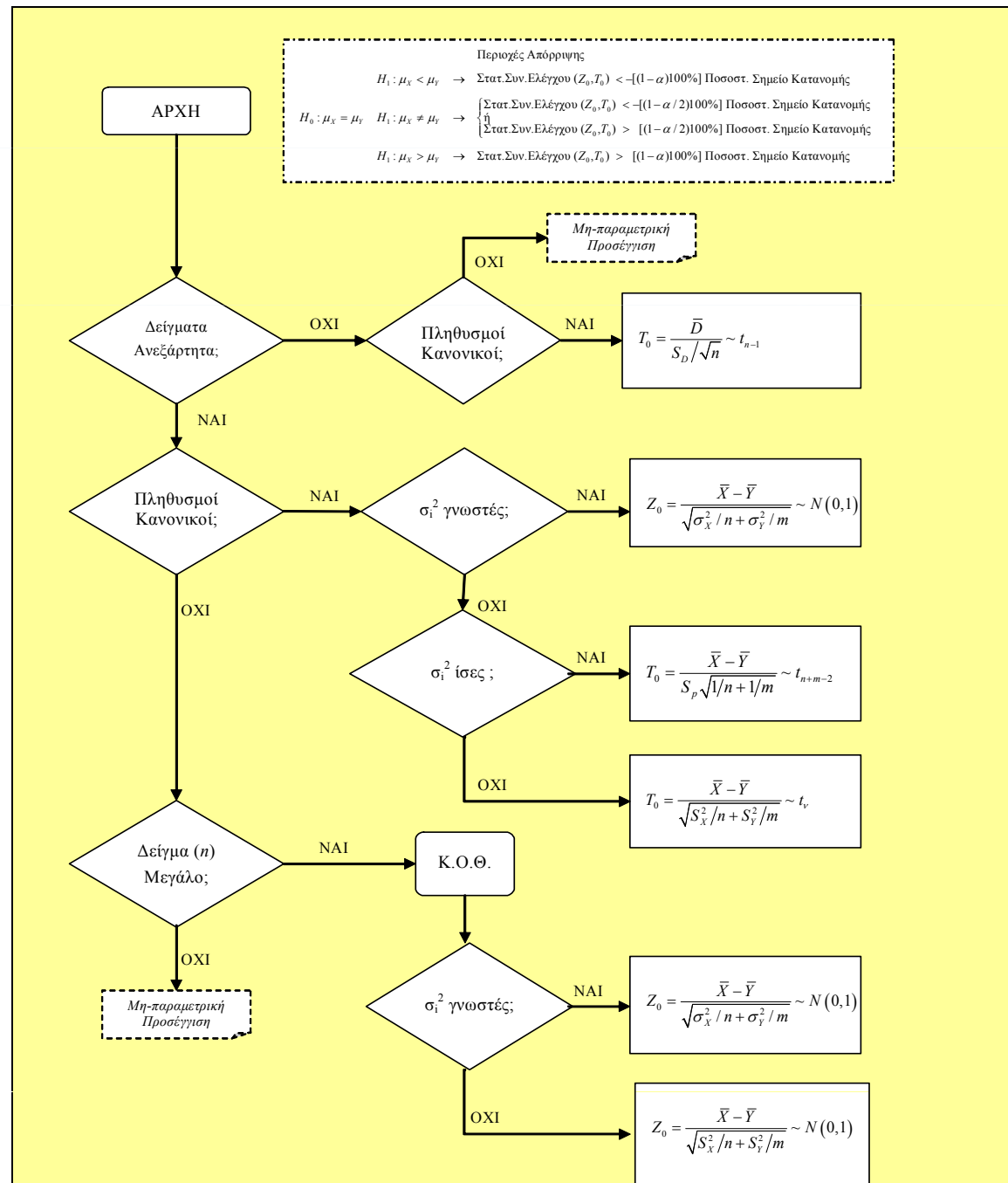
$H_0 : \mu = \mu_X - \mu_Y = 0$		
$H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y < 0$	$H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y > 0$	$H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y \neq 0$
Στατιστική συνάρτηση ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση $T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_{\bar{X} - \bar{Y}}} \text{ όπου } S_{\bar{X} - \bar{Y}} = \sqrt{S_X^2 / n + S_Y^2 / m}$		
Απορρίπτουμε την H_0, αν $T_0 < -t_{v, 1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0, αν $T_0 > t_{v, 1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0, αν $T_0 < -t_{v, 1-\alpha/2} \text{ ή } T_0 > t_{v, 1-\alpha/2}$ 

Περιοχές απόρριψης μονοκατάληκτου και δικατάληκτου ελέγχου
για τη διαφορά των μέσων μη κανονικών πληθυσμών
όταν οι διακυμάνσεις είναι είτε γνωστές είτε άγνωστες

$H_0 : \mu = \mu_X - \mu_Y = 0$		
$H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y < 0$	$H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y > 0$	$H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y \neq 0$
Στατιστική συνάρτηση ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση		
$Z_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m}}, (\sigma_X^2 \text{ και } \sigma_Y^2 \text{ γνωστές}) \text{ και } Z_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S_X^2/n + S_Y^2/m}} (\sigma_X^2 \text{ και } \sigma_Y^2 \text{ άγνωστες})$		
Απορρίπτουμε την H_0 , αν $Z_0 < -Z_{1-\alpha}$	Απορρίπτουμε την H_0 , αν $Z_0 > Z_{1-\alpha}$	Απορρίπτουμε την H_0 , αν $Z_0 < -Z_{1-\alpha/2} \text{ ή } Z_0 > Z_{1-\alpha/2}$
		

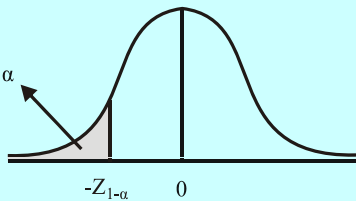
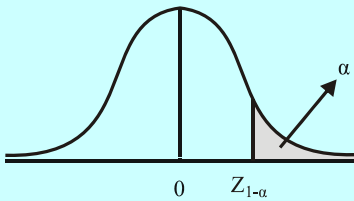
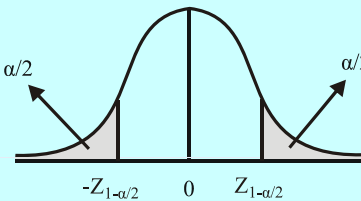
Περιοχές απόρριψης μονοκατάληκτου και δικατάληκτου ελέγχου για τη διαφορά των μέσων κανονικών πληθυσμών. Δείγματα εξαρτημένα

$H_0 : \mu_D = \mu_X - \mu_Y = 0$		
$H_1 : \mu_D = \mu_X - \mu_Y < 0$	$H_1 : \mu_D = \mu_X - \mu_Y > 0$	$H_1 : \mu_D = \mu_X - \mu_Y \neq 0$
Στατιστική συνάρτηση ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση $T_0 = \frac{\bar{D}}{S_{\bar{D}}}$		
Απορρίπτουμε την H_0 , αν $T_0 < -t_{v, 1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0 , αν $T_0 > t_{v, 1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0 , αν $T_0 < -t_{v, 1-\alpha/2}$ ή $T_0 > t_{v, 1-\alpha/2}$ 

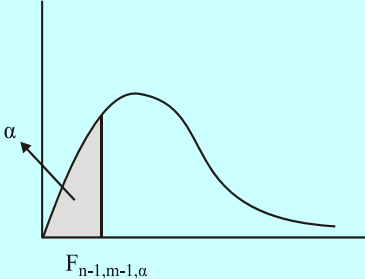
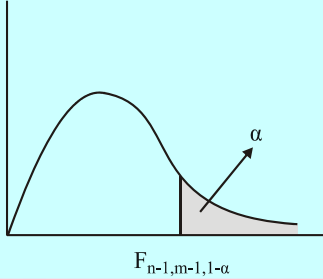
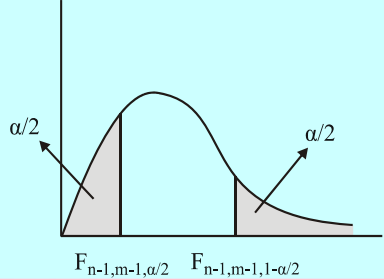


Συνοπτική παρουσίαση ελέγχων στατιστικών υποθέσεων για τη διαφορά των μέσων δύο πληθυσμών

Περιοχές απόρριψης μονοκατάληκτου και δικατάληκτου ελέγχου
για τη διαφορά δύο ποσοστών

$H_0 : p_X = p_Y$		
$H_1 : p_X < p_Y$	$H_1 : p_X > p_Y$	$H_1 : p_X \neq p_Y$
Στατιστική συνάρτηση ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση $Z_0 = \frac{\frac{X}{n} - \frac{Y}{m}}{\sqrt{\frac{X+Y}{n+m} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}}$		
Απορρίπτουμε την H_0 , αν $Z_0 < -Z_{1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0 , αν $Z_0 > Z_{1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0 , αν $Z_0 < -Z_{1-\alpha/2}$ ή $Z_0 > Z_{1-\alpha/2}$ 

Περιοχές απόρριψης μονοκατάληκτου και δικατάληκτου ελέγχου
για το λόγο των διακυμάνσεων

$H_0 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 1$		
$H_1 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} < 1$	$H_1 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} > 1$	$H_1 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \neq 1$
Στατιστική συνάρτηση ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση $F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$		
Απορρίπτουμε την H_0, αν $F_0 < F_{n-1, m-1, \alpha} \equiv 1 / F_{m-1, n-1, 1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0, αν $F_0 > F_{n-1, m-1, 1-\alpha}$ 	Απορρίπτουμε την H_0, αν $F_0 < F_{n-1, m-1, \alpha/2} \equiv 1 / F_{m-1, n-1, 1-\alpha/2}$ ή $F_0 > F_{n-1, m-1, 1-\alpha/2}$ 

Παράδειγμα Ο υπεύθυνος εκπαίδευσης ενός ναυπηγείου θέλει να συγκρίνει την αποτελεσματικότητα δύο εναλλακτικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την εκπαίδευση των ηλεκτροσυγκολλητών της εταιρείας. Για το λόγο αυτόν χωρίζει τυχαία 26 υποψηφίους για εκπαίδευση ηλεκτροσυγκολλητές σε δύο ισοπληθείς ομάδες A και B για να εκπαιδευτούν με τις δύο μεθόδους αντίστοιχα. Κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης κάποιοι εκπαιδευόμενοι αποχώρησαν για λόγους ανεξάρτητους με το πρόγραμμα εκπαίδευσης και τελικά το πρόγραμμα ολοκλήρωσαν 12 άτομα της ομάδας A και 10 άτομα της ομάδας B. Μετά την ολοκλήρωση του προγράμματος οι εκπαιδευθέντες υποβλήθηκαν σε μια κοινή για όλους πρακτική άσκηση προκειμένου να αξιολογηθούν οι γνώσεις και οι ικανότητες που απέκτησαν. Η βαθμολογία της απόδοσής τους στην πρακτική άσκηση, με άριστα το 100, δίνεται στον παρακάτω Πίνακα.

Βαθμολογία εκπαιδευθέντων

ΟΜΑΔΑ Α (x_i)	70	93	82	90	77	86	79	84	98	73	81	85
ΟΜΑΔΑ Β (y_i)	89	78	94	83	88	80	91	92	87	97		

Με βάση τα στοιχεία αυτά να συγκριθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05, η αποτελεσματικότητα των δύο εναλλακτικών μεθόδων εκπαίδευσης. Με άλλα λόγια, να εξεταστεί αν θα μπορούσε ο υπεύθυνος της εταιρείας να ισχυριστεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05, ότι μετά την εκπαίδευση τα μέλη και των δύο ομάδων έχουν το ίδιο επίπεδο γνώσεων και ικανοτήτων. Δίνεται ότι η βαθμολογία των ατόμων που εκπαιδεύτηκαν και με τις δύο μεθόδους ακολουθεί κανονική κατανομή. Επίσης, από προηγούμενη εμπειρία είναι γνωστό ότι η τυπική απόκλιση της βαθμολογίας για όσους εκπαιδεύονται με την πρώτη μέθοδο είναι $\sigma_x = 8$, ενώ η τυπική απόκλιση της βαθμολογίας για όσους εκπαιδεύονται με τη δεύτερη μέθοδο είναι $\sigma_y = 6$.

Λύση

Ζητείται να γίνει έλεγχος για τη διαφορά των μέσων δύο πληθυσμών των οποίων οι διακυμάνσεις είναι γνωστές. Η υπόθεση που θα πρέπει να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05, είναι

$$\begin{array}{ll} H_0 : \mu_X = \mu_Y & \text{ή ισοδύναμα} \quad H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0 \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y & H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq 0 \end{array}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι $\bar{x} = 83.17$ και $\bar{y} = 87.90$. Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης της διαφοράς των μέσων, στην περίπτωση αυτή, είναι, $\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = 2.98$. Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου κάτω από την υπόθεση μηδέν είναι,

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}} = -1.59.$$

Η περιοχή απόρριψης προσδιορίζεται ως $Z_0 < -Z_{1-\alpha/2}$ ή $Z_0 > Z_{1-\alpha/2}$. Επίσης, από τον Πίνακα 4 της τυποποιημένης κανονικής κατανομής βρίσκουμε ότι για $\alpha = 0.05$ είναι $Z_{0.975} = 1.96$. Άρα, στη συγκεκριμένη περίπτωση, η περιοχή απόρριψης καθορίζεται από τις σχέσεις $Z_0 < -1.96$ ή $Z_0 > 1.96$. Κατά συνέπεια, η τιμή $Z_0 = -1.59$ βρίσκεται στην περιοχή μη απόρριψης. Επομένως, με βάση τις ενδείξεις του δείγματος δε μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση. Αυτό σημαίνει ότι, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05, μετά την εκπαίδευση τα μέλη και των δύο ομάδων έχουν το ίδιο επίπεδο γνώσεων και ικανοτήτων.

Παράδειγμα Έστω ότι στο προηγούμενο Παράδειγμα δεν έχουμε καμία πληροφόρηση για τις πληθυσμιακές διακυμάνσεις. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η βαθμολογία ακολουθεί κανονική κατανομή και οι διακυμάνσεις των δύο πληθυσμών είναι ίσες. Να εξεταστεί αν ο υπεύθυνος της εταιρείας θα μπορούσε να ισχυριστεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05, ότι μετά την εκπαίδευση τα μέλη και των δύο ομάδων έχουν το ίδιο επίπεδο γνώσεων και ικανοτήτων.

Λύση

Ζητείται να γίνει έλεγχος για τη διαφορά των μέσων δύο πληθυσμών των οποίων οι διακυμάνσεις έχουν υποθεθεί ίσες, στηριζόμενοι στις πληροφορίες δύο ανεξάρτητων δειγμάτων. Η υπόθεση που θα πρέπει να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05, είναι

$$\begin{array}{ll} H_0 : \mu_X = \mu_Y & \text{ή ισοδύναμα} & H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0 \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y & & H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq 0 \end{array}$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι, $\bar{x} = 83.17$ και $\bar{y} = 87.90$. Επίσης, $s_X = 8.05$ και $s_Y = 6.08$.

Η τιμή της συνδυασμένης τυπικής απόκλισης υπολογίζεται και είναι, $s_p = 7.23$.

Στη συνέχεια, το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης της διαφοράς των μέσων υπολογίζεται και είναι, $s_{\bar{X}-\bar{Y}} = 3.10$. Τέλος, η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου κάτω από την υπόθεση μηδέν υπολογίζεται και είναι $T_0 = -1.53$. Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης προσδιορίζεται από τη σχέση $T_0 < -t_{n+m-2, 1-\alpha/2}$ ή $T_0 > t_{n+m-2, 1-\alpha/2}$. Από τον Πίνακα που περιέχει τα ποσοστιαία σημεία της κατανομής t προκύπτει ότι $t_{18, 0.975} = 2.101$. Άρα, στη συγκεκριμένη περίπτωση, η περιοχή απόρριψης καθορίζεται από τις σχέσεις $T_0 < -2.101$ ή $T_0 > 2.101$. Κατά συνέπεια, η τιμή $T_0 = -1.53$ βρίσκεται στην περιοχή μη απόρριψης. Επομένως, με βάση τις ενδείξεις του δείγματος δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση. Αυτό σημαίνει ότι ο υπεύθυνος της εταιρείας θα μπορούσε να ισχυριστεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05, ότι μετά την εκπαίδευση τα μέλη και των δύο ομάδων έχουν το ίδιο επίπεδο γνώσεων και ικανοτήτων.

Παράδειγμα Για να μετρηθεί η αποτελεσματικότητα μιας μεθόδου αδυνατίσματος επελέγη ένα τυχαίο δείγμα πέντε ατόμων, Α-Ε, το βάρος των οποίων κατεγράφη με τα εξής αποτελέσματα.

A	B	Γ	Δ	Ε
84	98	78	92	85

Τέσσερις βδομάδες μετά από την έναρξη της δίαιτας παρατηρήθηκε ότι το βάρος τους ελαττώθηκε με εξαίρεση του Β ο οποίος ζύγιζε περισσότερο. Συγκεκριμένα, τα βάρη μετά τη δίαιτα διαμορφώθηκαν ως εξής:

B	Ε	Δ	Γ	A
99	82	90	75	80

Να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05 η αποτελεσματικότητα της δίαιτας.

Λύση

Ζητείται να γίνει έλεγχος για τη διαφορά των μέσων δύο πληθυσμών στηριζόμενοι στις πληροφορίες δύο εξαρτημένων δειγμάτων. Τα στοιχεία μας αποτελούν ζεύγη και για το λόγο αυτό το πρώτο βήμα είναι η αντιστοίχιση των τιμών.

	A	B	Γ	Δ	Ε
ΠΡΙΝ	84	98	78	92	85
ΜΕΤΑ	80	99	75	90	82

Η υπόθεση που πρέπει να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05, είναι:

$$H_0 : \mu_D = 0, \text{ όπου } \mu_D = \mu_X - \mu_Y \text{ έναντι της εναλλακτικής, } H_1 : \mu_D > 0$$

Εύκολα προκύπτει ότι $\bar{D} = 2.2$. Επίσης, $s_D = 1.924$. Επομένως, το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης της διαφοράς των μέσων είναι $s_{\bar{D}} = 0.860$. Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση, είναι, $T_0 = 2.56$. Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης ορίζεται από τη σχέση $T_0 > t_{v, 1-\alpha}$. Επιπλέον, από τους πίνακες της κατανομής t βρίσκουμε ότι $t_{4, 0.95} = 2.132$. Άρα στη συγκεκριμένη περίπτωση, η περιοχή απόρριψης είναι $T_0 < -2.132$ ή $T_0 > 2.132$. Κατά συνέπεια η τιμή $T_0 = 2.56$ βρίσκεται στην περιοχή απόρριψης. Επομένως, με βάση τις ενδείξεις του δείγματος μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση το οποίο σημαίνει ότι θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05, η δίαιτα είναι αποτελεσματική.

Παράδειγμα Μια εταιρεία παρασκευής και συσκευασίας σε κουτιά ενός προϊόντος, έχει δύο εργοστάσια συσκευασίας A και B. Τα προϊόντα της εταιρείας πριν κυκλοφορήσουν στην αγορά υποβάλλονται σε μια σειρά ποιοτικών ελέγχων, στον τελευταίο από τους οποίους για κάθε παρτίδα κουτιών ελέγχεται ότι η ποσότητα του περιεχομένου τους συμφωνεί με τις προδιαγραφές. Σημαντική απόκλιση από τις προδιαγραφές αποτελεί αιτία απόρριψης της συγκεκριμένης παρτίδας. Ο υπεύθυνος ποιοτικού ελέγχου της εταιρείας θέλει να διαπιστώσει αν υπάρχει σημαντική διαφορά στο ποσοστό των κουτιών που απορρίπτονται από τα δύο εργοστάσια. Για το λόγο αυτό επιλέγει τυχαία δείγματα 200 κουτιών από κάθε εργοστάσιο και καταμετρά τα απορριπτέα. Αν για τα εργοστάσια A και B τα αποτελέσματα είναι 19 και 21 αντίστοιχα ποιο θα είναι το συμπέρασμα του υπευθύνου σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05.

Λύση

Ζητείται έλεγχος για τη διαφορά των ποσοστών δύο πληθυσμών. Πιο συγκεκριμένα, η υπόθεση που θα πρέπει να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05, είναι:

$$H_0 : p_A = p_B \quad \text{έναντι της εναλλακτικής} \quad H_1 : p_A \neq p_B$$

όπου p_k είναι το ποσοστό των κουτιών που απορρίπτονται στο $k = A, B$ εργοστάσιο.

Εύκολα υπολογίζουμε ότι $\hat{p}_A = \frac{19}{200} = 0.095$ και $\hat{p}_B = \frac{21}{200} = 0.105$.

Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου κάτω από την υπόθεση μηδέν είναι

$$Z_0 = \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{\hat{p}_P \hat{q}_P \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}} = \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{\frac{X+Y}{n+m} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}} = \frac{0.095 - 0.105}{\sqrt{\frac{19+21}{200+200} \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{200} \right)}} = -0.032.$$

Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης ορίζεται από τη σχέση $Z_0 < -Z_{1-\alpha/2}$ ή $Z_0 > Z_{1-\alpha/2}$. Επίσης, από τους πίνακες της τυποποιημένης κανονικής κατανομής βρίσκουμε ότι για $\alpha = 0.05$ είναι $Z_{0.975} = 1.96$. Άρα στη συγκεκριμένη περίπτωση, η περιοχή απόρριψης καθορίζεται από τις σχέσεις $Z_0 < -1.96$ ή $Z_0 > 1.96$. Κατά συνέπεια η τιμή $Z_0 = -0.032$ βρίσκεται στην περιοχή μη απόρριψης. Κατά συνέπεια, με βάση τις ενδείξεις του δείγματος δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση. Αυτό σημαίνει ότι ο υπεύθυνος ποιοτικού ελέγχου θα μπορούσε να ισχυρισθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05, ότι δεν υπάρχει διαφορά στα ποσοστά απορριφθέντων κουτιών μεταξύ των εργοστασίων Α και Β.

Παράδειγμα Μια πρόσφατη έρευνα στο θέμα των αμοιβών των νέων πτυχιούχων Τμημάτων Διοίκησης Επιχειρήσεων ΑΕΙ και ΤΕΙ υποστηρίζει ότι, σε ευρωπαϊκό επίπεδο, οι ετήσιες αμοιβές των αποφοίτων ΑΕΙ έχουν μεγαλύτερη διασπορά από αντίστοιχες αμοιβές των αποφοίτων ΤΕΙ. Προκειμένου να διερευνηθεί ο ισχυρισμός αυτός και για την Ελλάδα, οι αρμόδιες υπηρεσίες του Υπουργείου Εργασίας επιλέγουν τυχαία ένα δείγμα 21 αποφοίτων ΑΕΙ και ένα δείγμα 19 αποφοίτων ΤΕΙ και υπολογίζουν ότι οι δειγματικές τυπικές αποκλίσεις των ετησίων αμοιβών τους είναι 480 και 210 ευρώ αντίστοιχα. Με βάση τα στοιχεία αυτά οι υπηρεσίες του Υπουργείου συμπεραίνουν ότι σε επίπεδο σημαντικότητας 0,01 οι ετήσιες αμοιβές των αποφοίτων ΑΕΙ έχουν μεγαλύτερη διασπορά από τις αντίστοιχες των αποφοίτων ΤΕΙ. Αιτιολογήστε το συμπέρασμά τους.

Λύση

Για να ελέγξουμε το συμπέρασμα αυτό, χρειάζεται να προχωρήσουμε σε έλεγχο λόγου διακυμάνσεων. Συγκεκριμένα, η υπόθεση που θα πρέπει να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.01$, είναι

$$H_0 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 1 \text{ έναντι της εναλλακτικής } H_1 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} > 1$$

όπου σ_X^2 η διακύμανση των αμοιβών των αποφοίτων ΑΕΙ και σ_Y^2 η διακύμανση των αμοιβών των αποφοίτων ΤΕΙ. Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση είναι

$$F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{480^2}{210^2} = 5.22.$$

Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης ορίζεται από τη σχέση $F_0 > F_{n-1, m-1, 1-\alpha}$. Επίσης, από τους πίνακες της κατανομής F βρίσκουμε ότι για $\alpha = 0.01$, $n-1 = 20$ και $m-1 = 18$ είναι $F_{20,18,0.99} = 3.077$. Άρα, στη συγκεκριμένη περίπτωση, η περιοχή απόρριψης καθορίζεται από τη σχέση $F_0 > 3.077$. Κατά συνέπεια, η τιμή $F_0 = 5.22$ βρίσκεται στην περιοχή απόρριψης. Συνεπώς, με βάση τις ενδείξεις του δείγματος μπορούμε, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.01, να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση. Αυτό σημαίνει ότι η διασπορά των αμοιβών των αποφοίτων ΑΕΙ είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διασπορά των αποφοίτων ΤΕΙ.