

Παρουσίαση

βασισμένη στο βιβλίο

Στατιστική Τόμος Α

ΤΩΝ

Βασίλη Αγγελή & Κατερίνας Δημάκη

Αθήνα, 2011

5. Ειδικές Κατανομές

Τυχαία Μεταβλητή & Κατανομή

Τυχαία Μεταβλητή

Η έννοια της τυχαίας μεταβλητής χρησιμοποιείται για να περιγράψει τα αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος

Κατανομή

Η έννοια της κατανομής χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων των αποτελεσμάτων αυτών.



Και οι δύο έννοιες αποτελούν την βάση για την δημιουργία μοντέλων που περιγράφουν τυχαία πειράματα χωρίς να είμαστε αναγκασμένοι να ανατρέχουμε στην θεωρία πιθανοτήτων.

Κάθε τυχαία μεταβλητή έχει τη δική της κατανομή, σε πολλές όμως περιπτώσεις οι κατανομές αυτές παρουσιάζουν σημαντικές ομοιότητες. Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε και να μελετήσουμε τα βασικά μοντέλα πιθανοτήτων, καθένα από τα οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή μεγάλου αριθμού τυχαίων πειραμάτων ή φαινομένων. Λόγω ακριβώς της μεγάλης τους χρησιμότητας, τα χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες των πιθανοθεωρητικών αυτών μοντέλων έχουν μελετηθεί διεξοδικά και ορισμένα μάλιστα αποτελέσματα διαφόρων υπολογισμών που χρησιμοποιούνται συχνά, έχουν συγκεντρωθεί σε εύχρηστους πίνακες. Σκοπός της ενότητας αυτής είναι να παρουσιάσει τις βασικότερες διακριτές και συνεχείς κατανομές

Διωνυμική Κατανομή

Έστω X η τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει τον αριθμό των επιτυχιών σε μια ακολουθία n ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli. Έστω p η πιθανότητα της επιτυχίας, η οποία παραμένει σταθερή από δοκιμή σε δοκιμή και $q = 1 - p$ η πιθανότητα της αποτυχίας, η οποία, προφανώς, παραμένει και αυτή σταθερή από δοκιμή σε δοκιμή. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X ονομάζεται **διωνυμική κατανομή** με παραμέτρους n και p . Συμβολικά, $X \sim b(n, p)$.

Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση

$$P(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x};$$
$$x = 0, 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad q = 1 - p.$$

Η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση

$$E(X) = np.$$

Η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση

$$V(X) = npq.$$

Παράδειγμα Επιχείρηση παραγωγής μηχανημάτων εκτιμά ότι η πιθανότητα ένα μηχάνημα να επιστραφεί για αντικατάσταση ως ελαττωματικό είναι 5%. Η επιχείρηση παράγαγε 20 μηχανήματα τον προηγούμενο μήνα. Να υπολογιστούν:

- i. Η πιθανότητα κανένα να μη χρειαστεί αντικατάσταση.
- ii. Η πιθανότητα να χρειαστούν αντικατάσταση το πολύ τέσσερα μηχανήματα.
- iii. Ο αναμενόμενος αριθμός των μηχανημάτων που θα χρειαστούν αντικατάσταση.

Λύση

Το πείραμα το οποίο περιγράφεται είναι πείραμα Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0,05$. Ας συμβολίσουμε με X το συνολικό αριθμό επιτυχιών στις 20 (ανεξάρτητες) επαναλήψεις του πειράματος, δηλαδή στην παραγωγή 20 μηχανημάτων. Είναι προφανές ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 20$ και $p = 0,05$, δηλαδή, $X \sim b(20, 0,05)$. Έχουμε, λοιπόν, διαδοχικά:

i.
$$P(X = 0) = \frac{20!}{0!(20-0)!} (0,05)^0 (1-0,05)^{20-0} = \frac{20!}{1 \cdot 20!} (0,05)^0 (0,95)^{20} \cong 0,3585 .$$

ii.
$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) .$$

Δεδομένου ότι

$$P(X = 1) = \frac{20!}{1!(20-1)!} (0,05)^1 (1-0,05)^{20-1} = \frac{20!}{1 \cdot 19!} (0,05)^1 (0,95)^{19} \cong 0,3774 ,$$

$$P(X = 2) = \frac{20!}{2!(20-2)!} (0,05)^2 (1-0,05)^{20-2} = \frac{20!}{2 \cdot 18!} (0,05)^2 (0,95)^{18} \cong 0,1887 ,$$

$$P(X = 3) = \frac{20!}{3!(20-3)!} (0,05)^3 (1-0,05)^{20-3} = \frac{20!}{6 \cdot 17!} (0,05)^3 (0,95)^{17} \cong 0,0596 ,$$

$$P(X = 4) = \frac{20!}{4!(20-4)!} (0,05)^4 (1-0,05)^{20-4} = \frac{20!}{24 \cdot 16!} (0,05)^4 (0,95)^{16} \cong 0,0133 ,$$

προκύπτει ότι $P(X \leq 4) \cong 0,3585 + 0,3774 + 0,1887 + 0,0596 + 0,0133 = 0,9974 .$

iii.
$$E(X) = np = 20 \cdot 0,05 = 1 \text{ μηχανήματα.}$$

Κανονική κατανομή

Η **κανονική κατανομή** είναι η σημαντικότερη και η χρησιμότερη όχι μόνο από τις συνεχείς αλλά από όλες τις κατανομές πιθανότητας. Η σπουδαιότητά της οφείλεται σε τρεις κυρίως λόγους:

1. Πολλά πειράματα μπορούν να περιγραφούν ικανοποιητικά μέσω τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν κανονική κατανομή.
2. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί, υπό προϋποθέσεις, ως προσέγγιση πολλών άλλων κατανομών τόσο συνεχών όσο και διακριτών.
3. Αποτελεί τη βάση για πολλές τεχνικές που χρησιμοποιούνται στη Στατιστική Συμπερασματολογία.

Η κανονική κατανομή μελετήθηκε διεξοδικά από τον μαθηματικό K. Gauss και για το λόγο αυτόν είναι γνωστή και ως κατανομή Gauss.

Ορισμός Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή που μπορεί να πάρει τιμές σε ολόκληρη την ευθεία των πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι η X ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2 αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in (-\infty, \infty); \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0$$

όπου $\pi \cong 3,1416$ και $e \cong 2,7183$.

Συμβολικά, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

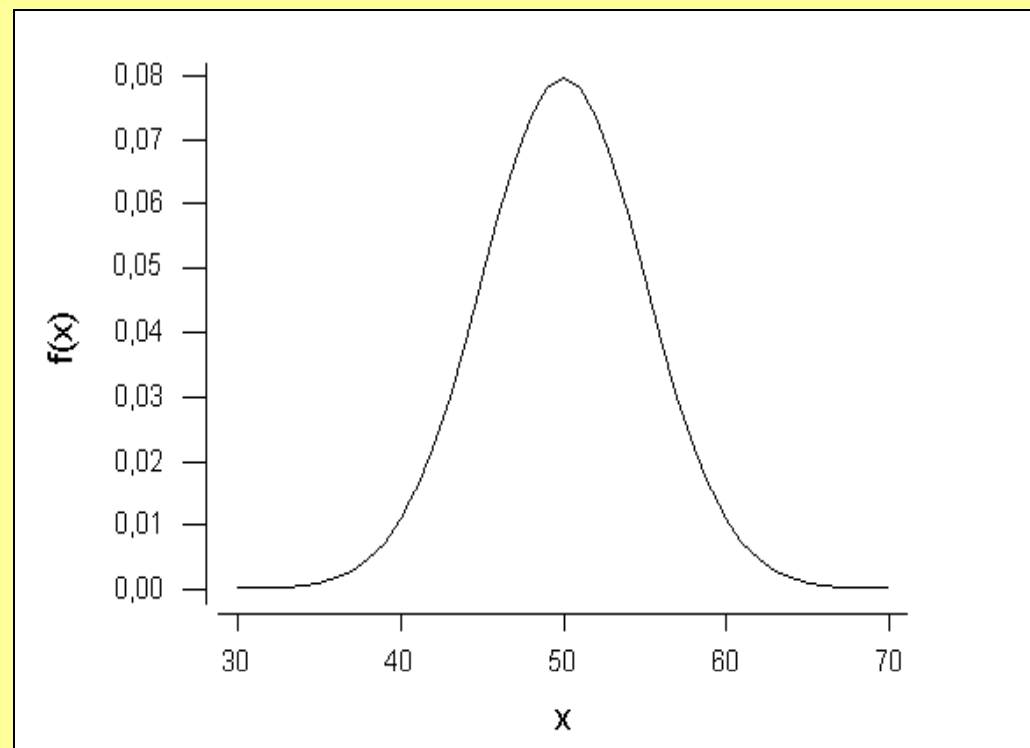
Η **αναμενόμενη τιμή** της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση

$$E(X) = \mu.$$

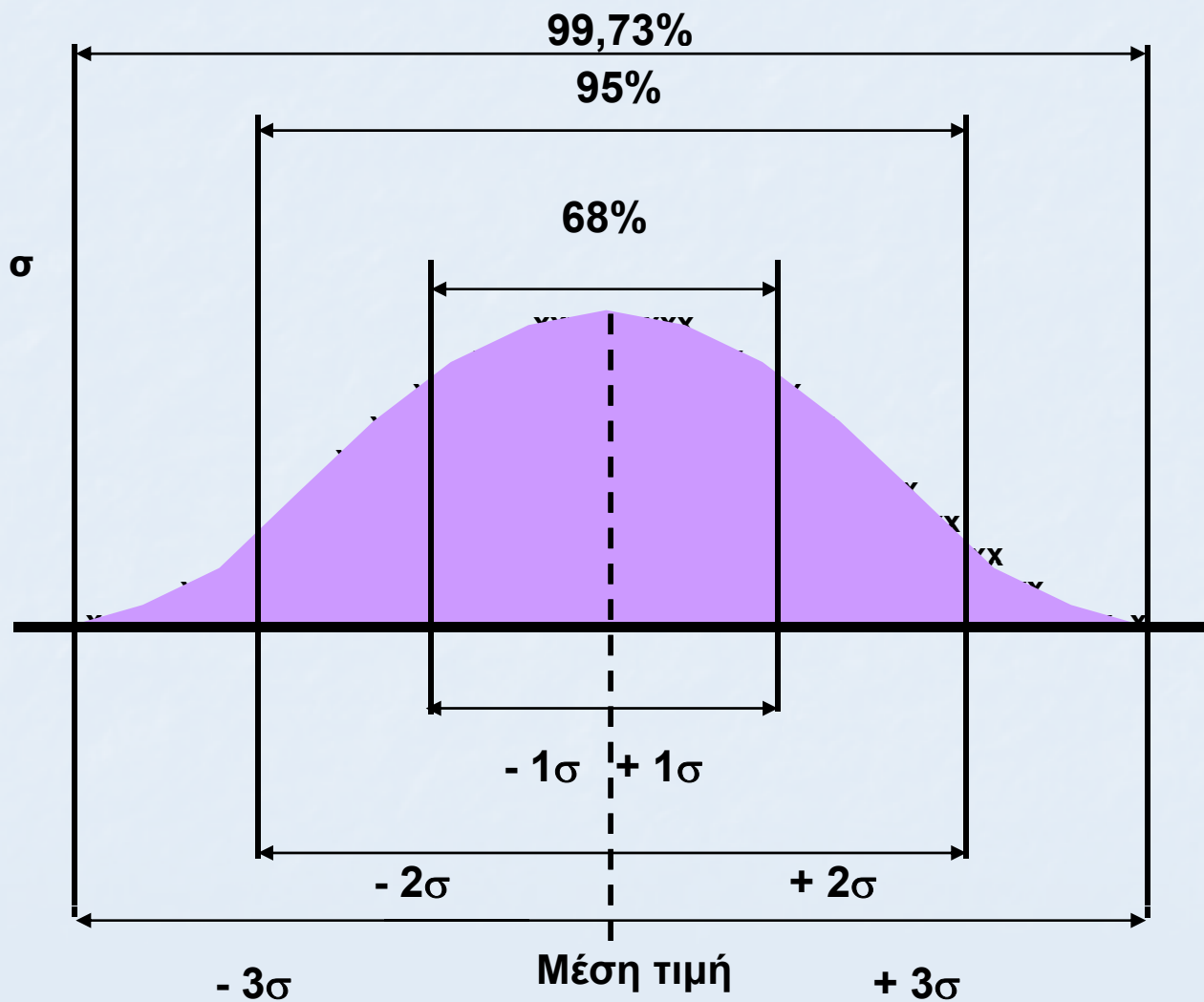
Η **διακύμανση** της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση

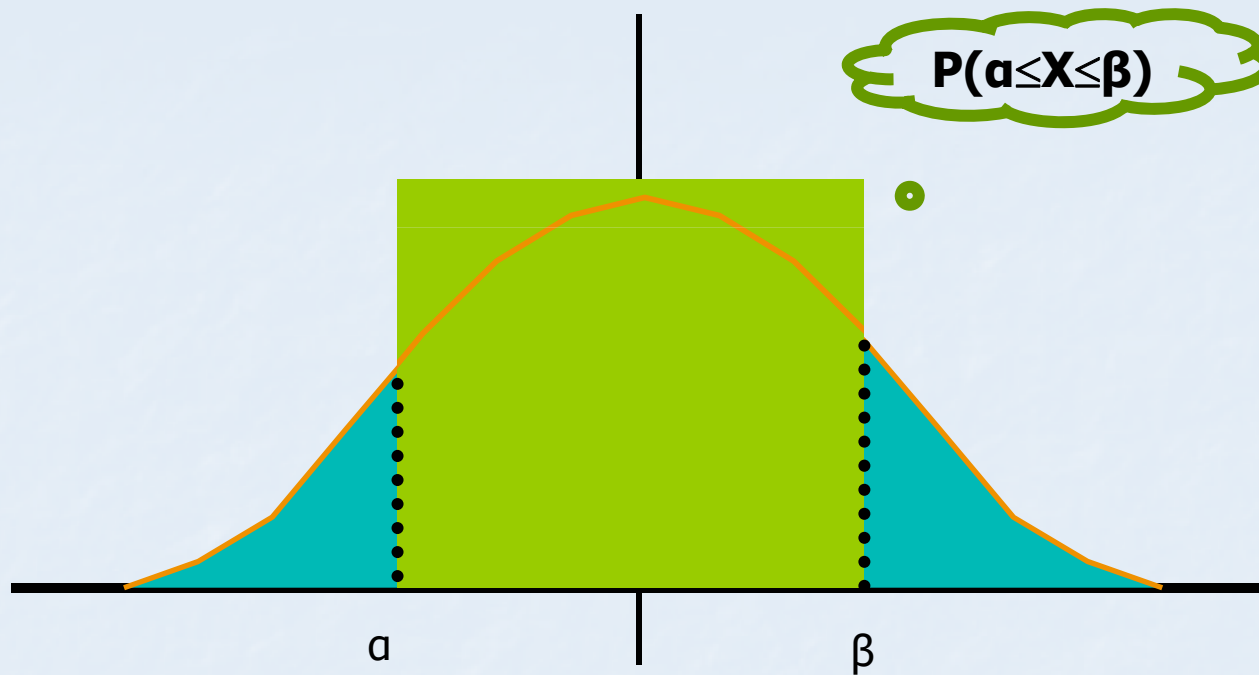
$$V(X) = \sigma^2$$

**Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής
κατανομής με $\mu=50$ και $\sigma^2=25$**



Όσο μεγαλύτερο το σ
τόσο πιο απλωμένη
είναι η $f(x)$





όταν η κανονική κατανομή
δεν είναι η τυποποιημένη
τη μετατρέπουμε σε αυτήν

Η πιθανότητα $P(a \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(a)$ υπολογίζεται με τη βοήθεια των πινάκων της κανονική κατανομής

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας $P(\alpha < X \leq \beta)$ στην περίπτωση που

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ μετασχηματίζουμε τη X στη μεταβλητή

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$.

Η κατανομή αυτή ονομάζεται **τυποποιημένη κανονική κατανομή**

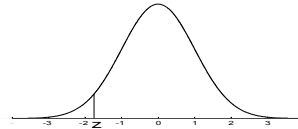
και συμβολίζεται με $Z \sim N(0,1)$.

Για την τυποποιημένη κανονική κατανομή είναι δυνατή η κατάρτιση πίνακα, ο οποίος να περιέχει τις τιμές της $\Phi(z) = P(Z \leq z)$.

Ισχύει ότι:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z); -\infty < z < \infty.$$

Πίνακας Τυποποιημένη κανονική κατανομή



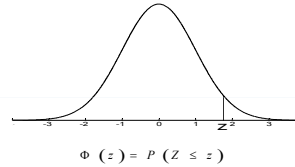
$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

Τα στοιχεία του πίνακα εκφράζουν τις πιθανότητες $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ που παριστάνονται από το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της τυποποιημένης κανονικής κατανομής αριστερά από το z .

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
- 3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
- 3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
- 3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
- 3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
- 3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
- 3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
- 3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
- 3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
- 3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
- 3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
- 2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
- 2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
- 2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
- 2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
- 2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
- 2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
- 2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
- 2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
- 2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
- 2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
- 1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
- 1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
- 1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
- 1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
- 1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
- 1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
- 1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
- 1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
- 1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
- 1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
- 0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
- 0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
- 0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
- 0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
- 0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
- 0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
- 0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
- 0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
- 0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
- 0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

(συνεχίζεται)

Πίνακας 4 Τυποποιημένη κανονική κατανομή
(συνέχεια)

[illegible]

Παράδειγμα Έστω η τυχαία μεταβλητή Z η οποία ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

i. $P(Z > 2)$

ii. $P(-3 < Z < 3)$.

Λύση

Με βάση τα γνωστά θεωρήματα των πιθανοτήτων, τη σχέση (6.32) και τον Πίνακα 4 της τυποποιημένης κανονικής κατανομής έχουμε διαδοχικά:

i. $P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$.

$$P(-3 < Z < 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) - 1 + \Phi(3) = 2\Phi(3) - 1 = 2(0,9987) - 1 = 0,9974$$

Παράδειγμα Εργοστάσιο παραγωγής ζάχαρης χρησιμοποιεί αυτόματες μηχανές κατά τη διαδικασία συσκευασίας των πακέτων ζάχαρης. Σύμφωνα με τις προδιαγραφές του προϊόντος, για να θεωρηθεί μια συσκευασία αποδεκτή, πρέπει το βάρος των πακέτων ζάχαρης ενός κιλού να είναι εντός των ορίων [989 gr, 1010 gr]. Σύμφωνα με στοιχεία του εργοστασίου, το βάρος των πακέτων ζάχαρης που συσκευάζονται μπορεί να θεωρηθεί ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 999,5$ gr και τυπική απόκλιση $\sigma = 6$ gr. Με βάση τα στοιχεία αυτά:

- i. Αν επιλεγεί τυχαία ένα πακέτο ζάχαρης, να υπολογιστεί η πιθανότητα το βάρος του να ξεπερνά τα 1004 gr.
- ii. Αν επιλεγεί τυχαία ένα πακέτο ζάχαρης, να υπολογιστεί η πιθανότητα το βάρος του να βρίσκεται μεταξύ 998 και 1001 gr.
- iii. Ποιο είναι το ποσοστό των μη αποδεκτών συσκευασιών;

Λύση

Έστω X η τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει το βάρος των πακέτων ζάχαρης. Δίνεται ότι $X \sim N(999,5, 6^2)$.

i. Η πιθανότητα το βάρος του πακέτου να ξεπερνά τα 1004 gr είναι

$$\begin{aligned} P(X > 1004) &= 1 - P(X \leq 1004) \\ &= 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{1004 - 999,5}{6}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq 0,75) \\ &= 1 - \Phi(0,75) \\ &= 1 - 0,7734 = 0,2266. \end{aligned}$$

ii. Η πιθανότητα το βάρος του πακέτου να βρίσκεται μεταξύ 998 και 1001 gr είναι

$$\begin{aligned} P(998 < X < 1001) &= P\left(\frac{998 - 999,5}{6} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{1001 - 999,5}{6}\right) \\ &= P(Z < 0,25) - P(Z < -0,25) \\ &= \Phi(0,25) - \Phi(-0,25) \\ &= 0,5987 - 0,4013 = 0,1974. \end{aligned}$$

iii. Οι μη αποδεκτές συσκευασίες είναι αυτές που βρίσκονται εκτός ορίων. Επομένως ζητείται να υπολογιστεί η πιθανότητα $P[(X < 989) \cup (X > 1010)]$. Τα ενδεχόμενα $(X < 989)$ και $(X > 1010)$ είναι ασυμβίβαστα και, κατά συνέπεια, η πιθανότητα της ένωσής τους είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων τους. Δηλαδή η ζητούμενη πιθανότητα είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων:

$$P(X < 989) + P(X > 1010) .$$

Όμως,

$$P(X < 989) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{989 - 999,5}{6}\right) = P(Z < -1,75) = \Phi(-1,75) = 0,0401$$

και

$$\begin{aligned} P(X > 1010) &= 1 - P(X \leq 1010) = \\ &= 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{1010 - 999,5}{6}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq 1,75) = \\ &= 1 - \Phi(1,75) \\ &= 1 - 0,9599 = 0,0401 . \end{aligned}$$

Άρα, η πιθανότητα μη αποδεκτών συσκευασιών είναι

$$P[(X < 989) \cup (X > 1010)] = P(X < 989) + P(X > 1010) = 0,0401 + 0,0401 = 0,0802$$

Δηλαδή το ποσοστό των μη αποδεκτών συσκευασιών είναι 8,02% .

Κατανομή χ^2

Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την κατανομή γάμμα με παραμέτρους $\alpha = \nu/2$, $\nu = 1, 2, \dots$ και $\beta = 2$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή χ^2 με ν βαθμούς ελευθερίας, Το ν , δηλαδή οι βαθμοί ελευθερίας, είναι η μοναδική παράμετρος της κατανομής.

Συμβολικά, $X \sim \chi_\nu^2$.

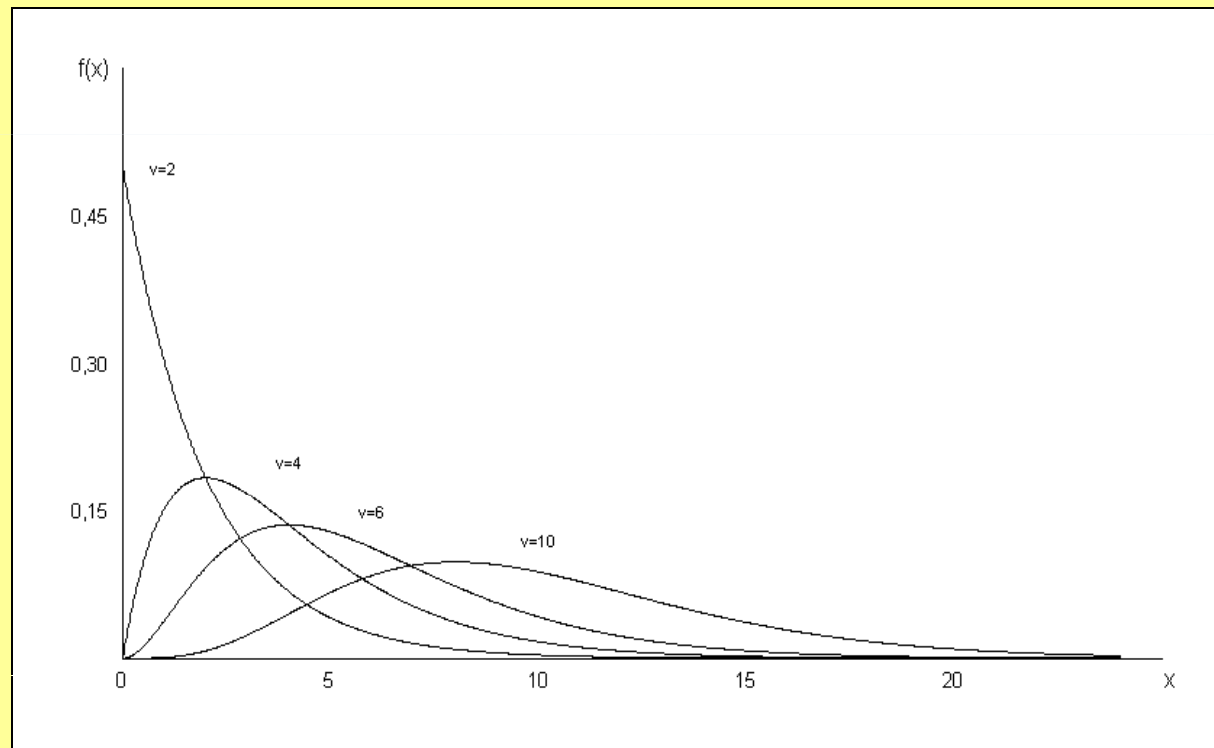
Η **αναμενόμενη τιμή** της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση

$$E(X) = \nu.$$

Η **διακύμανση** της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση

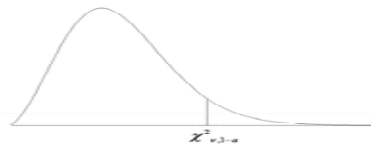
$$V(X) = 2\nu.$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής χ^2 για
διάφορες τιμές των βαθμών ελευθερίας ν



Για τιμές των βαθμών ελευθερίας μεγαλύτερων του 30
η κατανομή χ^2 προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή

Πίνακας Ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2



Τα στοιχεία του πίνακα εκφράζουν τα $(1 - \alpha)$ ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2 με ν βαθμούς ελευθερίας. δηλαδή τις τιμές $\chi^2_{\nu, 1-\alpha}$ για τις οποίες $P(\chi^2 \leq \chi^2_{\nu, 1-\alpha}) = 1 - \alpha$.

$1 - \alpha =$ εμβαδόν

ν	0.005	0.010	0.025	0.050	0.500	0.950	0.975	0.990	0.995
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.4549	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	1.3863	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	2.3660	7.8147	9.3484	11.3449	12.8382
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	3.3567	9.4877	11.1433	13.2767	14.8603
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	4.3515	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	5.3481	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	6.3458	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	7.3441	15.5073	17.5345	20.0902	21.9550
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	8.3428	16.9190	19.0228	21.6660	23.5894
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	9.3418	18.3070	20.4832	23.2093	25.1882
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	10.3410	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	11.3403	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	12.3398	22.3620	24.7356	27.6882	29.8195
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	13.3393	23.6848	26.1189	29.1412	31.3193
15	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	14.3389	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	15.3385	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	16.3382	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	17.3379	28.8693	31.5264	34.8053	37.1565
19	6.8440	7.6327	8.9065	10.1170	18.3377	30.1435	32.8523	36.1909	38.5823
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.8508	19.3374	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.0337	8.8972	10.2829	11.5913	20.3372	32.6706	35.4789	38.9322	41.4011
22	8.6427	9.5425	10.9823	12.3380	21.3370	33.9244	36.7807	40.2894	42.7957
23	9.2604	10.1957	11.6886	13.0905	22.3369	35.1725	38.0756	41.6384	44.1813
24	9.8862	10.8564	12.4012	13.8484	23.3367	36.4150	39.3641	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	24.3366	37.6525	40.6465	44.3141	46.9279
26	11.1602	12.1981	13.8439	15.3792	25.3365	38.8851	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8076	12.8785	14.5734	16.1514	26.3363	40.1133	43.1945	46.9629	49.6449
28	12.4613	13.5647	15.3079	16.9279	27.3362	41.3371	44.4608	48.2782	50.9934
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7084	28.3361	42.5570	45.7223	49.5879	52.3356
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4927	29.3360	43.7730	46.9792	50.8922	53.6720
31	14.4578	15.6555	17.5387	19.2806	30.3359	44.9853	48.2319	52.1914	55.0027
32	15.1340	16.3622	18.2908	20.0719	31.3359	46.1943	49.4804	53.4858	56.3281
33	15.8153	17.0735	19.0467	20.8665	32.3358	47.3999	50.7251	54.7755	57.6484
34	16.5013	17.7891	19.8063	21.6643	33.3357	48.6024	51.9660	56.0609	58.9639
35	17.1918	18.5089	20.5694	22.4650	34.3356	49.8018	53.2033	57.3421	60.2748
40	20.7065	22.1643	24.4330	26.5093	39.3353	55.7585	59.3417	63.6907	66.7660
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7643	49.3349	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	35.5345	37.4849	40.4817	43.1880	59.3347	79.0819	83.2977	88.3794	91.9517
120	83.8516	86.9233	91.5726	95.7046	119.3340	146.5674	152.2114	158.9502	163.6482
200	152.2410	156.4320	162.7280	168.2786	199.3337	233.9943	241.0579	249.4451	255.2642

Η κατανομή χ^2 έχει σπουδαίες εφαρμογές στον έλεγχο καλής προσαρμογής, στον έλεγχο ανεξαρτησίας ιδιοτήτων αλλά και στη μελέτη των κατανομών ορισμένων στατιστικών συναρτήσεων. Λόγω της σπουδαιότητας που έχει η κατανομή χ^2 στις εφαρμογές, υπάρχουν έτοιμοι πίνακες, οι οποίοι για δοσμένη πιθανότητα α δίνουν τα $(1-\alpha)$ ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2 με ν βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή τις τιμές $\chi^2_{\nu,1-\alpha}$ για τις οποίες

$$P(\chi^2 \leq \chi^2_{\nu,1-\alpha}) = 1 - \alpha .$$

Έτσι, για παράδειγμα, όταν $1-\alpha = 0,95$ και, $\nu = 10$ η τιμή $\chi^2_{10,0,95}$, για την οποία ισχύει η σχέση $P(\chi^2 \leq \chi^2_{10,0,95}) = 0,95$, είναι, με βάση το σχετικό Πίνακα, 18,307.

Κατανομή t

Ορισμός Η τυχαία κατανομή $X = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}$, όπου Z και Y είναι

ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομές την τυποποιημένη κανονική $N(0,1)$ και την χ^2_ν αντίστοιχα, λέμε ότι ακολουθεί την κατανομή t του Student με ν βαθμούς ελευθερίας. Το ν είναι η μοναδική παράμετρος της κατανομής.

Συμβολικά, $X \sim t_\nu$.

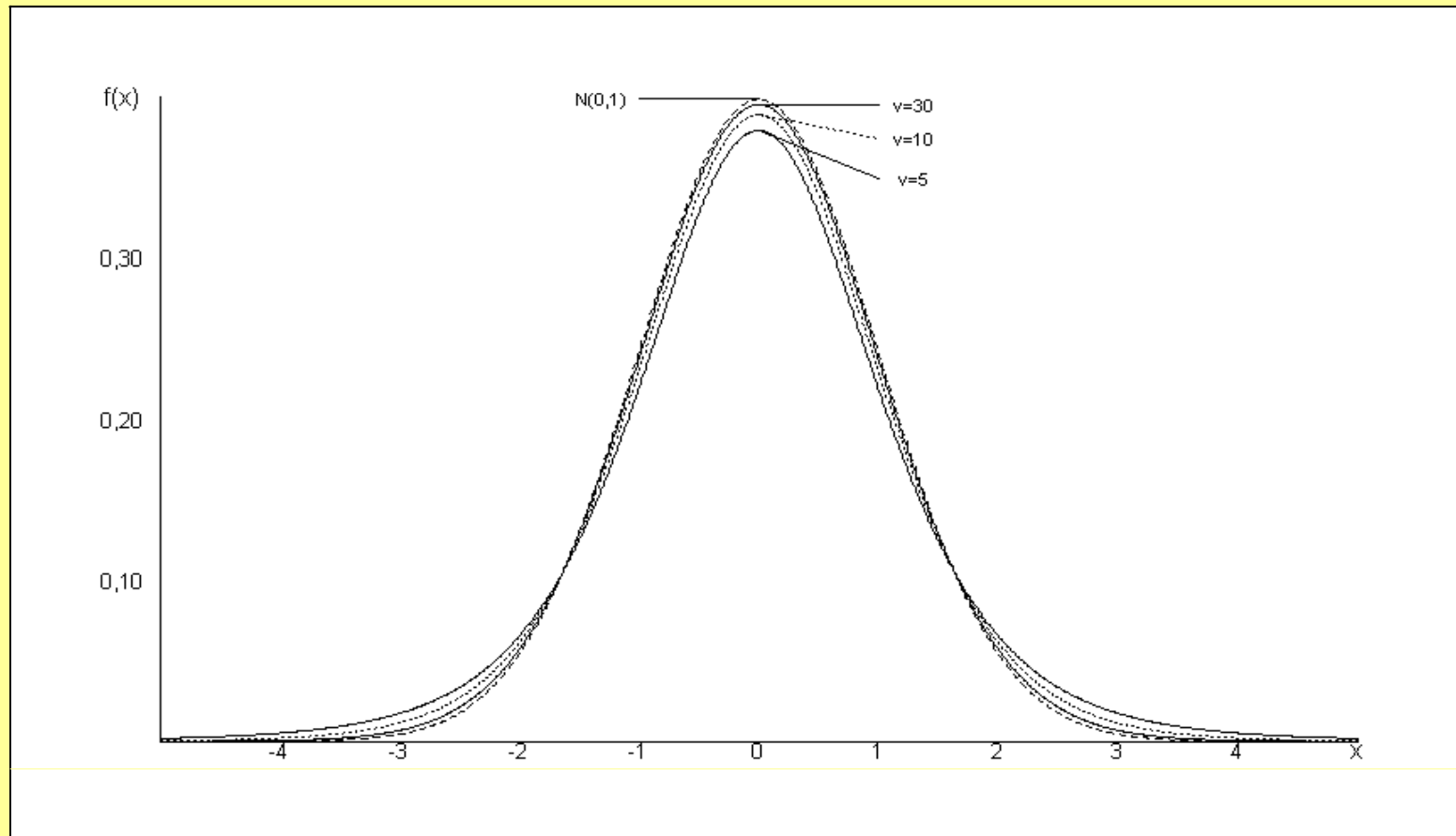
Η **αναμενόμενη τιμή** της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση

$$E(X) = 0.$$

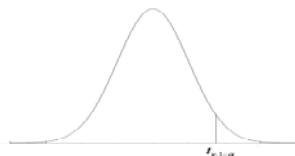
Η **διακύμανση** της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση

$$V(X) = \frac{\nu}{\nu - 2}; \nu > 2.$$

Στο Σχήμα που ακολουθεί δίνεται η γραφική απεικόνιση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής t για διάφορους βαθμούς ελευθερίας σε σύγκριση με την γραφική απεικόνιση (με διακεκομμένη γραμμή) της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής, δηλαδή της κατανομής t όταν $\nu \rightarrow \infty$.



Πίνακας Ποσοστιαία σημεία της κατανομής t



Τα στοιχεία του πίνακα εκφράζουν τα $(1 - \alpha)$ ποσοστιαία σημεία της κατανομής t με ν βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή τις τιμές $t_{\nu, 1-\alpha}$ για τις οποίες $P(T \leq t_{\nu, 1-\alpha}) = 1 - \alpha$. Τα κατώτερα ποσοστιαία σημεία προσδιορίζονται από την σχέση $t_{\nu, \alpha} = -t_{\nu, 1-\alpha}$.

$1 - \alpha =$ εμβαδόν															
ν	0.550	0.600	0.650	0.700	0.750	0.800	0.850	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.997	0.998	0.999
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	106.100	159.153	318.309
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	12.852	15.764	22.327
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	6.994	8.053	10.215
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.321	5.951	7.173
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.570	5.030	5.893
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.152	4.524	5.208
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	3.887	4.207	4.785
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.705	3.991	4.501
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.573	3.835	4.297
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.472	3.716	4.144
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.393	3.624	4.025
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.330	3.550	3.930
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.278	3.489	3.852
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.234	3.438	3.787
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.197	3.395	3.733
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.165	3.358	3.686
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.138	3.326	3.646
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.113	3.298	3.610
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.092	3.273	3.579
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.073	3.251	3.552
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.056	3.231	3.527
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.041	3.214	3.505
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.027	3.198	3.485
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.014	3.183	3.467
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.003	3.170	3.450
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	2.992	3.158	3.435
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	2.982	3.147	3.421
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	2.973	3.136	3.408
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	2.965	3.127	3.396
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	2.957	3.118	3.385
31	0.127	0.256	0.389	0.530	0.682	0.853	1.054	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	2.950	3.109	3.375
32	0.127	0.255	0.389	0.530	0.682	0.853	1.054	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	2.943	3.102	3.365
33	0.127	0.255	0.389	0.530	0.682	0.853	1.053	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	2.937	3.094	3.356
34	0.127	0.255	0.389	0.529	0.682	0.852	1.052	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	2.931	3.088	3.348
35	0.127	0.255	0.388	0.529	0.682	0.852	1.052	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	2.926	3.081	3.340
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.902	3.055	3.307
50	0.126	0.255	0.388	0.528	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.870	3.018	3.261
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.849	2.994	3.232
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.798	2.935	3.160
Inf	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.748	2.878	3.090

Η κατανομή t είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη Στατιστική Συμπερασματολογία, όπως θα δειχθεί στα επόμενα κεφάλαια. Λόγω της σπουδαιότητας και της χρησιμότητάς της υπάρχει έτοιμος πίνακας, ο οποίος δίνει, για δοσμένη πιθανότητα τα $(1-\alpha)$ ποσοστιαία σημεία της κατανομής t με ν βαθμούς ελευθερίας,

δηλαδή τις τιμές $t_{\nu,1-\alpha}$ για τις οποίες $P(t \leq t_{\nu,1-\alpha}) = 1-\alpha$.

Έτσι, για παράδειγμα, όταν $1-\alpha = 0,95$ και $\nu = 10$, η τιμή $t_{10,0,95}$ για την οποία ισχύει η σχέση $P(t \leq t_{10,0,95}) = 0,95$ είναι, με βάση το σχετικό Πίνακα, 1,8125

Κατανομή F

Ορισμός Έστω U και V ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομές $\chi_{\nu_1}^2$ και $\chi_{\nu_2}^2$ αντίστοιχα. Τότε η τυχαία μεταβλητή

$$X = \frac{U / \nu_1}{V / \nu_2} \text{ ακολουθεί την κατανομή } F \text{ με } \nu_1 \text{ και } \nu_2 \text{ βαθμούς}$$

ελευθερίας. Τα ν_1 και ν_2 είναι οι παράμετροι της κατανομής.

$$\text{Συμβολικά, } X \sim F_{\nu_1, \nu_2}.$$

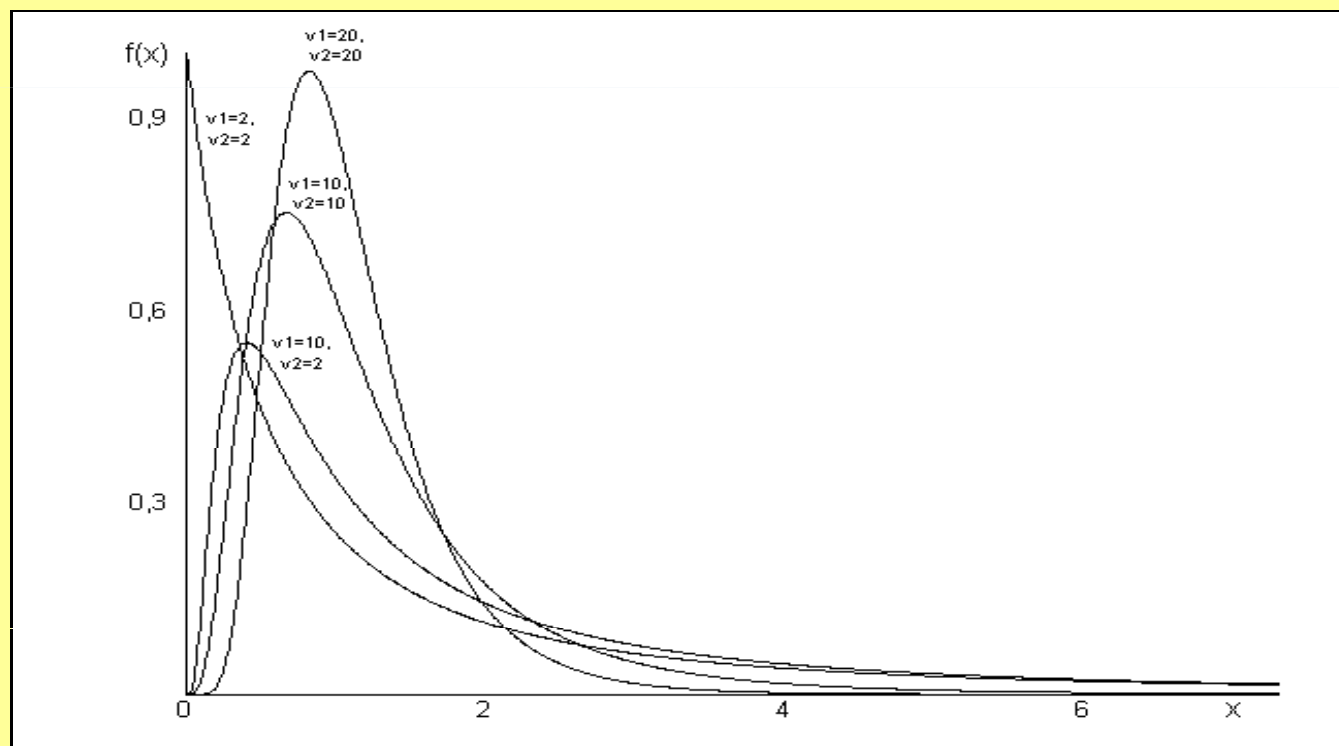
Η **αναμενόμενη τιμή** της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση

$$E(X) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}.$$

Η **διακύμανση** της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση

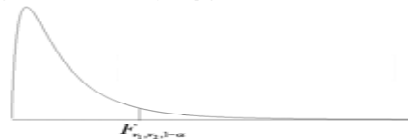
$$V(X) = \frac{2\nu_2^2 (\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1 (\nu_2 - 2)^2 (\nu_2 - 4)}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής F για διάφορα ζευγάρια των βαθμών ελευθερίας ν_1 και ν_2



Η μορφή της κατανομής εξαρτάται γενικά από τους βαθμούς ελευθερίας. Για μικρές τιμές των ν_1 και ν_2 η κατανομή παρουσιάζει έντονη θετική ασυμμετρία.

Πίνακας Ποσοστιαία σημεία της κατανομής F



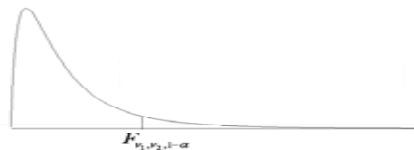
Τα στοιχεία του πίνακα εκφράζουν τα $(1 - \alpha)$ ποσοστιαία σημεία της κατανομής F με ν_1 και ν_2 βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή τις τιμές $F_{\nu_1, \nu_2, 1-\alpha}$ για τις οποίες $P(F \leq F_{\nu_1, \nu_2, 1-\alpha}) = 1 - \alpha$ για $1 - \alpha = 0,90, 0,95, 0,975, 0,99, 0,995$.

Τα κατώτερα ποσοστιαία σημεία προσδιορίζονται από την σχέση $F_{\nu_1, \nu_2, \alpha} = 1/F_{\nu_2, \nu_1, 1-\alpha}$.

		ν_2									
ν_1	$1 - \alpha$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.900	39.863	8.526	5.538	4.545	4.060	3.776	3.589	3.458	3.360	3.285
	0.950	161.448	18.513	10.128	7.709	6.608	5.987	5.591	5.318	5.117	4.965
	0.975	647.789	38.506	17.443	12.218	10.007	8.813	8.073	7.571	7.209	6.937
	0.990	4052.181	98.503	34.116	21.198	16.258	13.745	12.246	11.259	10.561	10.044
	0.995	16210.723	198.501	55.552	31.333	22.785	18.635	16.236	14.688	13.614	12.826
2	0.90	49.500	9.000	5.462	4.325	3.780	3.463	3.257	3.113	3.006	2.924
	0.95	199.500	19.000	9.552	6.944	5.786	5.143	4.737	4.459	4.256	4.103
	0.975	799.500	39.000	16.044	10.649	8.434	7.260	6.542	6.059	5.715	5.456
	0.990	4999.500	99.000	30.817	18.000	13.274	10.925	9.547	8.649	8.022	7.559
	0.995	19999.500	199.000	49.799	26.284	18.314	14.544	12.404	11.042	10.107	9.427
3	0.90	53.593	9.162	5.391	4.191	3.619	3.289	3.074	2.924	2.813	2.728
	0.95	215.707	19.164	9.277	6.591	5.409	4.757	4.347	4.066	3.863	3.708
	0.975	864.163	39.165	15.439	9.979	7.764	6.599	5.890	5.416	5.078	4.826
	0.990	5403.352	99.166	29.457	16.694	12.060	9.780	8.451	7.591	6.992	6.552
	0.995	21614.741	199.166	47.467	24.259	16.530	12.917	10.882	9.596	8.717	8.081
4	0.90	55.833	9.243	5.343	4.107	3.520	3.181	2.961	2.806	2.693	2.605
	0.95	224.583	19.247	9.117	6.388	5.192	4.534	4.120	3.838	3.633	3.478
	0.975	899.583	39.248	15.101	9.605	7.388	6.227	5.523	5.053	4.718	4.468
	0.990	5624.583	99.249	28.710	15.977	11.392	9.148	7.847	7.006	6.422	5.994
	0.995	22499.583	199.250	46.195	23.155	15.556	12.028	10.050	8.805	7.956	7.343
5	0.90	57.240	9.293	5.309	4.051	3.453	3.108	2.883	2.726	2.611	2.522
	0.95	230.162	19.296	9.013	6.256	5.050	4.387	3.972	3.687	3.482	3.326
	0.975	921.848	39.298	14.885	9.364	7.146	5.988	5.285	4.817	4.484	4.236
	0.990	5763.650	99.299	28.237	15.522	10.967	8.746	7.460	6.632	6.057	5.636
	0.995	23055.798	199.300	45.392	22.456	14.940	11.464	9.522	8.302	7.471	6.872
6	0.90	58.204	9.326	5.285	4.010	3.405	3.055	2.827	2.668	2.551	2.461
	0.95	233.986	19.330	8.941	6.163	4.950	4.284	3.866	3.581	3.374	3.217
	0.975	937.111	39.331	14.735	9.197	6.978	5.820	5.119	4.652	4.320	4.072
	0.990	5858.986	99.333	27.911	15.207	10.672	8.466	7.191	6.371	5.802	5.386
	0.995	23437.111	199.333	44.838	21.975	14.513	11.073	9.155	7.952	7.134	6.545
7	0.90	58.906	9.349	5.266	3.979	3.368	3.014	2.785	2.624	2.505	2.414
	0.95	236.768	19.353	8.887	6.094	4.876	4.207	3.787	3.500	3.293	3.135
	0.975	948.217	39.355	14.624	9.074	6.853	5.695	4.995	4.529	4.197	3.950
	0.990	5928.356	99.356	27.672	14.976	10.456	8.260	6.993	6.178	5.613	5.200
	0.995	23714.566	199.357	44.434	21.622	14.200	10.786	8.885	7.694	6.885	6.302
8	0.90	59.439	9.367	5.252	3.955	3.339	2.983	2.752	2.589	2.469	2.377
	0.95	238.883	19.371	8.845	6.041	4.818	4.147	3.726	3.438	3.230	3.072
	0.975	956.656	39.373	14.540	8.980	6.757	5.600	4.899	4.433	4.102	3.855
	0.990	5981.070	99.374	27.489	14.799	10.289	8.102	6.840	6.029	5.467	5.057
	0.995	23925.406	199.375	44.126	21.352	13.961	10.566	8.678	7.496	6.693	6.116
9	0.90	59.858	9.381	5.240	3.936	3.316	2.958	2.725	2.561	2.440	2.347
	0.95	240.543	19.385	8.812	5.999	4.772	4.099	3.677	3.388	3.179	3.020
	0.975	963.285	39.387	14.473	8.905	6.681	5.523	4.823	4.357	4.026	3.779
	0.990	6022.473	99.388	27.345	14.659	10.158	7.976	6.719	5.911	5.351	4.942
	0.995	24091.004	199.388	43.882	21.139	13.772	10.391	8.514	7.339	6.541	5.968
10	0.90	60.195	9.392	5.230	3.920	3.297	2.937	2.703	2.538	2.416	2.323
	0.95	241.882	19.396	8.786	5.964	4.735	4.060	3.637	3.347	3.137	2.978
	0.975	968.627	39.398	14.419	8.844	6.619	5.461	4.761	4.295	3.964	3.717
	0.990	6055.847	99.399	27.229	14.546	10.051	7.874	6.620	5.814	5.257	4.849
	0.995	24224.487	199.400	43.686	20.967	13.618	10.250	8.380	7.211	6.417	5.847

(συνεχίζεται)

Πίνακας 7 Ποσοστιαία σημεία της κατανομής F
(συνέχεια)



		ν_2									
ν_1	$1 - \alpha$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.900	3.225	3.177	3.136	3.102	3.073	3.048	3.026	3.007	2.990	2.975
	0.950	4.844	4.747	4.667	4.600	4.543	4.494	4.451	4.414	4.381	4.351
	0.975	6.724	6.554	6.414	6.298	6.200	6.115	6.042	5.978	5.922	5.871
	0.990	9.646	9.330	9.074	8.862	8.683	8.531	8.400	8.285	8.185	8.096
	0.995	12.226	11.754	11.374	11.060	10.798	10.575	10.384	10.218	10.073	9.944
2	0.90	2.860	2.807	2.763	2.726	2.695	2.668	2.645	2.624	2.606	2.589
	0.95	3.982	3.885	3.806	3.739	3.682	3.634	3.592	3.555	3.522	3.493
	0.975	5.256	5.096	4.965	4.857	4.765	4.687	4.619	4.560	4.508	4.461
	0.990	7.206	6.927	6.701	6.515	6.359	6.226	6.112	6.013	5.926	5.849
	0.995	8.912	8.510	8.186	7.922	7.701	7.514	7.354	7.215	7.093	6.986
3	0.90	2.660	2.606	2.560	2.522	2.490	2.462	2.437	2.416	2.397	2.380
	0.95	3.587	3.490	3.411	3.344	3.287	3.239	3.197	3.160	3.127	3.098
	0.975	4.630	4.474	4.347	4.242	4.153	4.077	4.011	3.954	3.903	3.859
	0.990	6.217	5.953	5.739	5.564	5.417	5.292	5.185	5.092	5.010	4.938
	0.995	7.600	7.226	6.926	6.680	6.476	6.303	6.156	6.028	5.916	5.818
4	0.90	2.536	2.480	2.434	2.395	2.361	2.333	2.308	2.286	2.266	2.249
	0.95	3.357	3.259	3.179	3.112	3.056	3.007	2.965	2.928	2.895	2.866
	0.975	4.275	4.121	3.996	3.892	3.804	3.729	3.665	3.608	3.559	3.515
	0.990	5.668	5.412	5.205	5.035	4.893	4.773	4.669	4.579	4.500	4.431
	0.995	6.881	6.521	6.233	5.998	5.803	5.638	5.497	5.375	5.268	5.174
5	0.90	2.451	2.394	2.347	2.307	2.273	2.244	2.218	2.196	2.176	2.158
	0.95	3.204	3.106	3.025	2.958	2.901	2.852	2.810	2.773	2.740	2.711
	0.975	4.044	3.891	3.767	3.663	3.576	3.502	3.438	3.382	3.333	3.289
	0.990	5.316	5.064	4.862	4.695	4.556	4.437	4.336	4.248	4.171	4.103
	0.995	6.422	6.071	5.791	5.562	5.372	5.212	5.075	4.956	4.853	4.762
6	0.90	2.389	2.331	2.283	2.243	2.208	2.178	2.152	2.130	2.109	2.091
	0.95	3.095	2.996	2.915	2.848	2.790	2.741	2.699	2.661	2.628	2.599
	0.975	3.881	3.728	3.604	3.501	3.415	3.341	3.277	3.221	3.172	3.128
	0.990	5.069	4.821	4.620	4.456	4.318	4.202	4.102	4.015	3.939	3.871
	0.995	6.102	5.757	5.482	5.257	5.071	4.913	4.779	4.663	4.561	4.472
7	0.90	2.342	2.283	2.234	2.193	2.158	2.128	2.102	2.079	2.058	2.040
	0.95	3.012	2.913	2.832	2.764	2.707	2.657	2.614	2.577	2.544	2.514
	0.975	3.759	3.607	3.483	3.380	3.293	3.219	3.156	3.100	3.051	3.007
	0.990	4.886	4.640	4.441	4.278	4.142	4.026	3.927	3.841	3.765	3.699
	0.995	5.865	5.525	5.253	5.031	4.847	4.692	4.559	4.445	4.345	4.257
8	0.90	2.304	2.245	2.195	2.154	2.119	2.088	2.061	2.038	2.017	1.999
	0.95	2.948	2.849	2.767	2.699	2.641	2.591	2.548	2.510	2.477	2.447
	0.975	3.664	3.512	3.388	3.285	3.199	3.125	3.061	3.005	2.956	2.913
	0.990	4.744	4.499	4.302	4.140	4.004	3.890	3.791	3.705	3.631	3.564
	0.995	5.682	5.345	5.076	4.857	4.674	4.521	4.389	4.276	4.177	4.090
9	0.90	2.274	2.214	2.164	2.122	2.086	2.055	2.028	2.005	1.984	1.965
	0.95	2.896	2.796	2.714	2.646	2.588	2.538	2.494	2.456	2.423	2.393
	0.975	3.588	3.436	3.312	3.209	3.123	3.049	2.985	2.929	2.880	2.837
	0.990	4.632	4.388	4.191	4.030	3.895	3.780	3.682	3.597	3.523	3.457
	0.995	5.537	5.202	4.935	4.717	4.536	4.384	4.254	4.141	4.043	3.956
10	0.90	2.248	2.188	2.138	2.095	2.059	2.028	2.001	1.977	1.956	1.937
	0.95	2.854	2.753	2.671	2.602	2.544	2.494	2.450	2.412	2.378	2.348
	0.975	3.526	3.374	3.250	3.147	3.060	2.986	2.922	2.866	2.817	2.774
	0.990	4.539	4.296	4.100	3.939	3.805	3.691	3.593	3.508	3.434	3.368
	0.995	5.418	5.085	4.820	4.603	4.424	4.272	4.142	4.030	3.933	3.847

(συνεχίζεται)

Η κατανομή F είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη Στατιστική Συμπερασματολογία, όπως άλλωστε θαδειχθεί στα επόμενα κεφάλαια. Λόγω της σπουδαιότητας και της χρησιμότητάς της υπάρχει έτοιμος πίνακας, ο οποίος δίνει, για δοσμένη πιθανότητα, τα $(1-\alpha)$ ποσοστιαία σημεία της κατανομής F με ν_1 και ν_2 βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή τις τιμές $F_{\nu_1, \nu_2, 1-\alpha}$ για τις οποίες

$$P(F \leq F_{\nu_1, \nu_2, 1-\alpha}) = 1 - \alpha .$$

Έτσι, για παράδειγμα, όταν $1-\alpha = 0,95$, $\nu_1 = 9$ και $\nu_2 = 6$, η τιμή $F_{9, 6, 0,95}$ για την οποία ισχύει η σχέση $P(F \leq F_{9, 6, 0,95}) = 0,95$ είναι, με βάση το σχετικό Πίνακα, 4,099.

Είναι προφανές ότι από τον Πίνακα της κατανομής F ,
μπορούν να προσδιοριστούν μόνο τα ανώτερα σημεία της..
Τα κατώτερα ποσοστιαία σημεία της προσδιορίζονται από
τη σχέση

$$F_{v_1, v_2, \alpha} = 1 / F_{v_2, v_1, 1-\alpha} .$$

Έτσι, για παράδειγμα, ο υπολογισμός της τιμής $F_{8,7,0,025}$

γίνεται ως εξής:

$$F_{8,7,0,025} = 1 / F_{7,8,0,975} = 1 / 4,529 = 0,221 .$$

6. Δειγματικές Κατανομές

Όπως έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα, αντικειμενικός στόχος της δειγματοληψίας είναι η επιλογή αντιπροσωπευτικών δειγμάτων από έναν πληθυσμό και η με βάση αυτά εκτίμηση των τιμών συγκεκριμένων παραμέτρων του πληθυσμού. Είναι προφανές ότι από ένα δοσμένο πληθυσμό μπορούν να επιλεγούν περισσότερα του ενός δείγματα συγκεκριμένου μεγέθους. Οι τιμές των στατιστικών συναρτήσεων που θα υπολογιστούν με βάση καθένα από αυτά για να εκτιμήσουν την άγνωστη τιμή της υπό μελέτη παραμέτρου του πληθυσμού, θα διαφέρουν από δείγμα σε δείγμα. Αν μπορούσαμε να επιλέξουμε όλα τα δυνατά δείγματα από το δοσμένο πληθυσμό, να υπολογίσουμε με βάση αυτά την τιμή της στατιστικής συνάρτησης που μας ενδιαφέρει, και να σχηματίσουμε την κατανομή πιθανότητας των αποτελεσμάτων, τότε θα είχαμε δημιουργήσει τη **δειγματική κατανομή** της συγκεκριμένης στατιστικής συνάρτησης. Στην πράξη, όμως, η λήψη όλων των δυνατών δειγμάτων είναι απαγορευτική. Για το λόγο αυτόν έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι και τεχνικές που επιτρέπουν την εκτίμηση των χαρακτηριστικών μιας δειγματικής κατανομής, χωρίς να είναι απαραίτητη η επιλογή πολλών δειγμάτων. Κατά συνέπεια, στις περισσότερες περιπτώσεις επιλέγεται μόνο ένα δείγμα από τον υπό μελέτη πληθυσμό. Με βάση αυτό, υπολογίζεται η τιμή της κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης και, έτσι, εξάγονται συμπεράσματα για την άγνωστη τιμή της αντίστοιχης παραμέτρου του πληθυσμού.

Οι κατανομές πιθανότητας των στατιστικών συναρτήσεων ονομάζονται **δειγματικές κατανομές**, ο μέσος τους αναφέρεται ως **μέσος της δειγματικής κατανομής** και η τυπική τους απόκλιση ως **τυπικό σφάλμα** της στατιστικής συνάρτησης.

Από το παράδειγμα που ακολουθεί προκύπτει η διαδικασία σχηματισμού της δειγματικής κατανομής του δειγματικού μέσου για την περίπτωση ενός πολύ μικρού υποθετικού πληθυσμού.

Παράδειγμα Έστω ότι ένας πληθυσμός αποτελείται από $N = 4$ αριθμούς: 4, 6, 8, 10. Επιλέγουμε, **με επανατοποθέτηση**, όλα τα τυχαία δείγματα μεγέθους $n = 2$. Να προσδιορισθεί η δειγματική κατανομή του δειγματικού μέσου και να απεικονιστεί με ένα ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Λύση

Τα δείγματα μεγέθους $n = 2$, τα οποία μπορούν να προκύψουν από το δοσμένο πληθυσμό είναι 16. Στον Πίνακα 1 περιέχονται τα δειγματικά σημεία και οι αντίστοιχες τιμές του δειγματικού μέσου. Στον Πίνακα 2 περιέχεται η δειγματική κατανομή του δειγματικού μέσου ενώ στο Σχήμα που ακολουθεί απεικονίζεται το αντίστοιχο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Παρατηρούμε ότι το ιστόγραμμα της δειγματικής κατανομής του $\bar{X}$ φαίνεται να έχει σχήμα κανονικής κατανομής κάτι το οποίο είναι, όπως θα δούμε στη συνέχεια, ιδιαίτερα σημαντικό. Βέβαια, στο συμπέρασμα αυτό οδηγηθήκαμε γιατί πήραμε όλα τα δυνατά δείγματα, συγκεκριμένου μεγέθους, από τον υπό μελέτη πληθυσμό. Στις πραγματικές εφαρμογές όμως, αυτό δεν είναι εφικτό.

Κατά συνέπεια, πρέπει να εξειδικευτούν τα γενικά χαρακτηριστικά της δειγματικής κατανομής του $\bar{X}$.

Πίνακας 1

Δειγματικά σημεία και οι αντίστοιχες τιμές του δειγματικού μέσου
στην περίπτωση που $N = 4$ και $n = 2$

Δείγμα	Δειγματικό σημείο	Τιμή δειγματικού μέσου $\bar{X} = \bar{x}$	Δείγμα	Δειγματικό σημείο	Τιμή δειγματικού μέσου $\bar{X} = \bar{x}$
1	4, 4	4	9	8, 4	6
2	4, 6	5	10	8, 6	7
3	4, 8	6	11	8, 8	8
4	4, 10	7	12	8, 10	9
5	6, 4	5	13	10, 4	7
6	6, 6	6	14	10, 6	8
7	6, 8	7	15	10, 8	9
8	6, 10	8	16	10, 10	10

Πίνακας 2

Δειγματική κατανομή του μέσου
στην περίπτωση που $N = 4$ και $n = 2$

$\bar{X} = \bar{x}$	4	5	6	7	8	9	10
$P(\bar{X} = \bar{x})$	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

Πηγή: Πίνακας 1

Πίνακας 2

Δειγματική κατανομή του μέσου
στην περίπτωση που $N = 4$ και $n = 2$

$\bar{X} = \bar{x}$	4	5	6	7	8	9	10
$P(\bar{X} = \bar{x})$	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

Πηγή: Πίνακας 1



Ιστόγραμμα της δειγματικής κατανομής του
δειγματικού μέσου όταν $N = 4$ και $n = 2$

Πηγή: Πίνακας 2

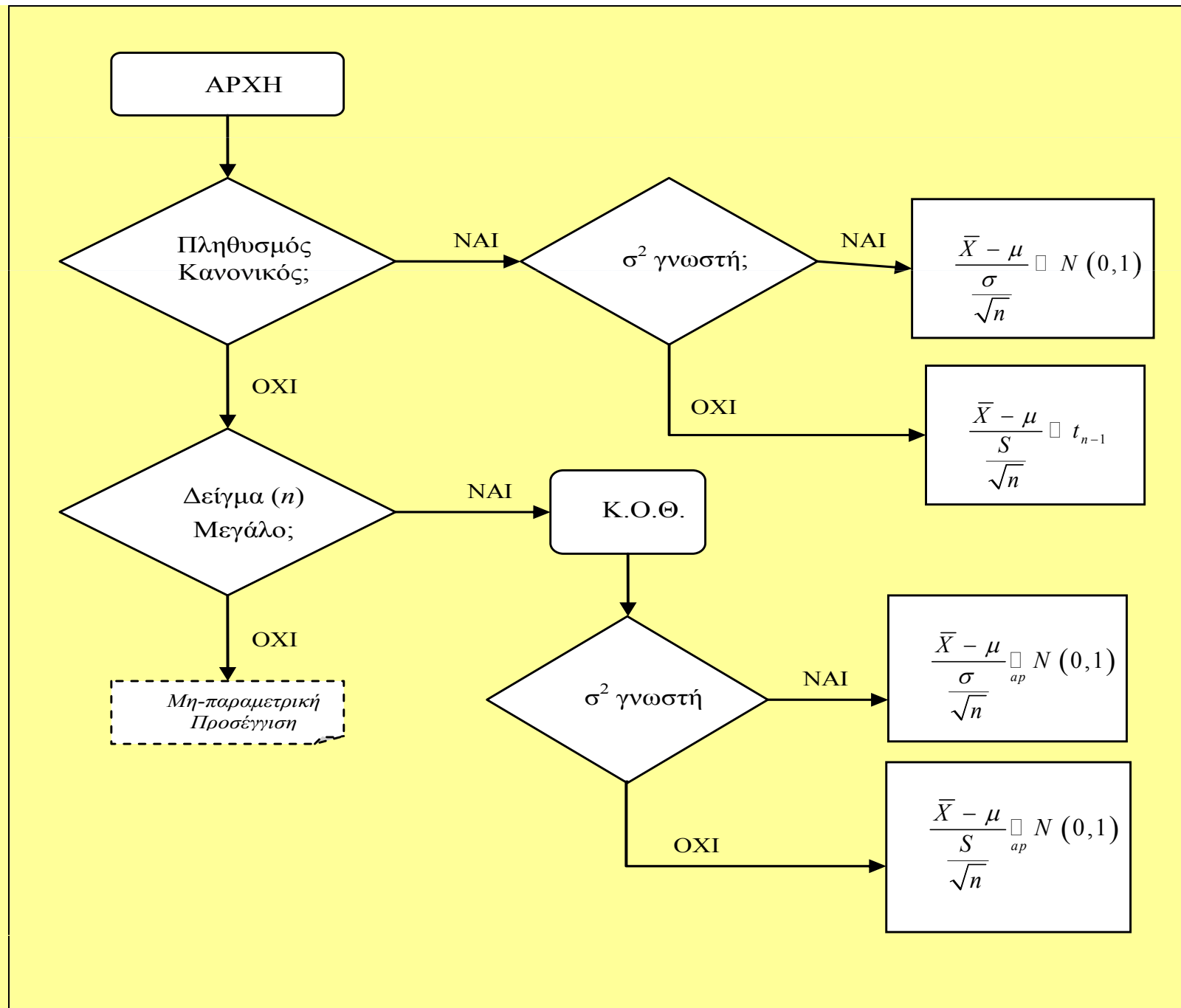
ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΟΡΙΑΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Η εξειδίκευση των γενικών χαρακτηριστικών της δειγματικής κατανομής του $\bar{X}$ επιτυγχάνεται μέσω του **Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος**. Το θεώρημα αυτό, το σπουδαιότερο ίσως θεώρημα των Πιθανοτήτων, εξετάζει την ασυμπτωτική συμπεριφορά αθροισμάτων ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

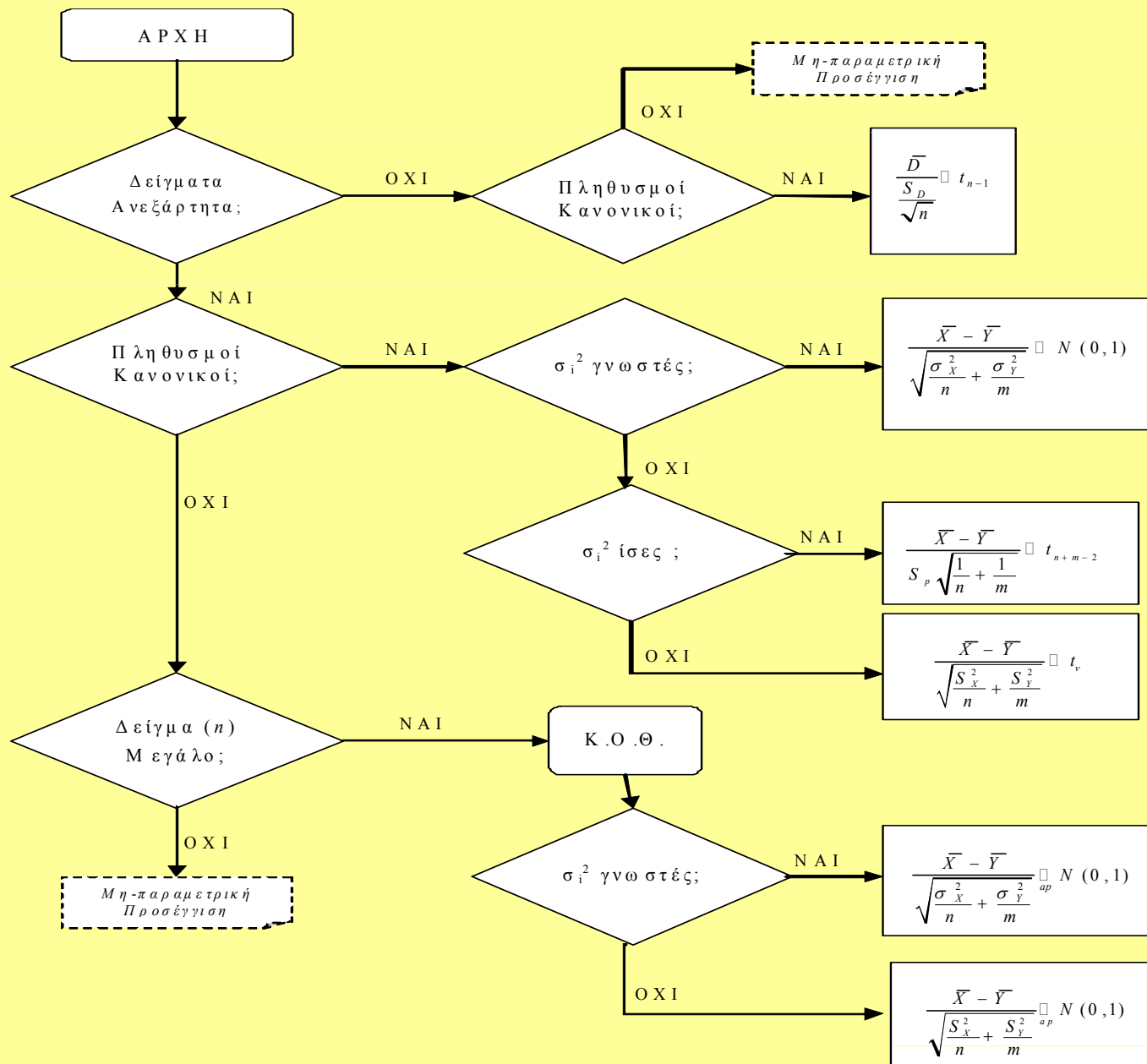
Για τις ανάγκες των συγκεκριμένων διαλέξεων θα δώσουμε μια απλή διατύπωση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος.

Θεώρημα Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες μετρήσεις πάνω στην τυχαία μεταβλητή X , η οποία περιγράφει τον υπό μελέτη πληθυσμό με πεπερασμένη μέση τιμή και πεπερασμένη διακύμανση. Δηλαδή, $E(X_i) = \mu < \infty$ και $V(X_i) = \sigma^2 < \infty$ για $i = 1, 2, \dots, n$. Τότε, για μεγάλες τιμές του n ο δειγματικός μέσος $\bar{X}$ ακολουθεί, **κατά προσέγγιση**, κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διακύμανση $\frac{\sigma^2}{n}$. Συμβολικά, $\bar{X} \underset{ap}{\sim} N(\mu, \sigma^2/n)$.

Η σημαντική πληροφορία την οποία μας παρέχει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα είναι ότι στην περίπτωση που το μέγεθος n του δείγματος **είναι αρκετά μεγάλο**, η προσεγγιστική κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ είναι η τυποποιημένη κανονική $N(0,1)$, χωρίς να ενδιαφέρει το είδος της κατανομής από την οποία λάβαμε το τυχαίο δείγμα.



Σχήμα 3. Συνοπτική παρουσίαση της δειγματικής κατανομής του μέσου ενός πληθυσμού



Σχήμα 1. Συνοπτική παρουσίαση της δειγματικής κατανομής της διαφοράς των μέσων δύο πληθυσμών