

Παράδειγμα

	I \ II	q	1-q
		(t ₁)	(t ₂)
p	(s ₁)	4	2
1-p	(s ₂)	1	3

Ο₁ μπορείς στρατηγική να 1 είναι

$P = (p, 1-p), p \in [0, 1]$ και το Ο₂ είναι $q = (q, 1-q)$
 $q \in [0, 1]$

Θέλω να υπολογίσω το

$$w_1 = \max_p \min_q h_1(p, q) \text{ και}$$

$$w_2 = \min_q \max_p h_2(p, q).$$

$$\equiv \text{ευνόησε με το } w_1 = \max_p \min_q h_1(p, q)$$

$$\text{Πρώτα θέλω το } \min_q h_1(p, q).$$

$$\nabla \equiv \text{έφαυε ου } h_1(p, q) = q h_1(p, (t_1)) + (1-q) h_1(p, (t_2))$$

$$\text{Αρα } \min_q h_1(p, q) = \min \{h_1(p, (t_1)), h_1(p, (t_2))\}$$

Οπότε, το $\min_q h_1(p, q)$ εξαρτάται από 6 διαφορετικές
 στρατηγικές του II ($q=0$ ή $q=1$)

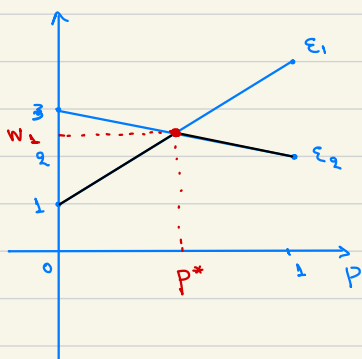
Ανάλυση,

$$w_1 = \max_p \min_q h_1(p, q) = \max_p \min \{h_1(p, (t_1)), h_1(p, (t_2))\}$$

$$= \max_p \min \{4 \cdot p + 1(1-p), 2p + 3(1-p)\} =$$

$$= \max_p \min \left\{ \underbrace{1+3p}_{\varepsilon_1}, \underbrace{3-p}_{\varepsilon_2} \right\}$$

	I \ II	(t ₁)	(t ₂)
p	(s ₁)	4	2
1-p	(s ₂)	1	3



- Σχεδιάζω τα αντί-γραμμε τμήματα.
- Σχεδιάζω τη γραμμή που αντιστοιχεί στο minimum (κάτω περιβάλλουσα)
- Βρίσκω το maximum πάνω σε αυτή τη γραμμή και πάλι αυτό η ενοχλείται.

Βρίσκω το p^* από το σημείο κομής των E_1 και E_2 :

$$1 + 3p^* = 3 - p^* \Leftrightarrow 4p^* = 2 \Leftrightarrow p^* = \frac{1}{2}$$

$$\text{και } w_2 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Άρα, η κάτω τιμή του παιχνιδιού σε μείζους στρατηγικές είναι $w_2 = \frac{5}{2}$ και

η maxmin στρατηγική είναι η $p^* = (p^*, 1-p^*) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Τώρα, θέλω να υπολογίσω την

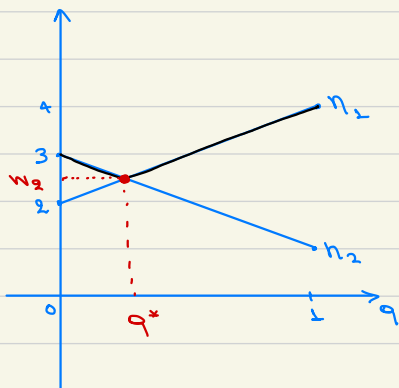
$$w_2 = \min_q \max_p h_2(p, q)$$

$$= \min_q \max_p \{h_2((s_1), q), h_2((s_2), q)\}$$

$$= \min_q \max \{4q + 2(1-q), 1q + 3(1-q)\}$$

$$= \min_q \max \left\{ \underbrace{2q + 2}_{n_1}, \underbrace{3 - 2q}_{n_2} \right\}$$

I \ II	q (t ₁)	1-q (t ₂)
(s ₁)	4	2
(s ₂)	1	3



- Σχεδιάζω τα ευθύγραμμα τμήματα για $q \in [0, 1]$
- Σχεδιάζω τη γραμμή που αντιστοιχεί στο maximum.
(όπου περιβάλλουμε).
- Βρίσκω το minimum πάνω σε αυτή τη γραμμή και για ποιο q πινχαίνεται αυτό.

Το q^* βρίσκεται από την ισχύ των n_1 και n_2

$$2q^* + 2 = 3 - 2q^* \Leftrightarrow$$

$$4q^* = 1 \Leftrightarrow$$

$$q^* = \frac{1}{4}$$

$$\text{και } w_2 = 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 = \frac{5}{2}$$

Έχουμε $w_2 = \frac{5}{2}$ και η minmax στρατηγική είναι
 $q^* = (q^*, 1 - q^*) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

Εξά
 έχουμε $w_1 = w_2 = \frac{5}{2}$

και $\Sigma \Sigma I : (p^*, q^*) = ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}))$

Θεώρημα Minimax

Για κάθε πεπερασμένο παίγριο μηδενικού αθροίσματος 2 παικτών ισχύουν τα εξής:

(i) $w_1 = w_2$: τιμή του παιγνιδιού

(ii) Το ποσό (p, q) που νευχαίνει τον παίκτη είναι ΣΣΙ.

(iii) Αν (p, q) και (p', q') ΣΣΙ, τότε και τα (p, q') και (p', q) θα είναι ΣΣΙ.

(iv) Σε πολλαπλά ΣΣΙ οι αναμενόμενες ωφελίες είναι ίδιες και ισχύει με w_1 για τον I και $-w_1$ για τον II.

Παράδειγμα (παιγνιαίο $2 \times n$, $n > 2$)

Να βρεθούν τα ΣΣΙ του παρακάτω παίγριου μηδενικού αθροίσματος

I \ II	(t_1)	(t_2)	(t_3)	(t_4)
(s_1)	6	5	3	5
(s_2)	1	2	6	4

Λύση

Θα ελέγξω αν υπάρχει ΣΣΙ 6 ε υαθάρεις.

maximin → I \ II	(t_1)	(t_2) ← minmax	(t_3)	(t_4) ← minmax	
	6	5	3	5	3*
(s_2)	1	2	6	4	1
	6	5*	6	5*	

$$5 = v_2$$

$v_1 < v_2 \Rightarrow \nexists$ ΣΣΙ 6 ε υαθάρεις
στρατηγικά

Θα βρούμε $\Sigma \Pi$ σε μινιμξς.

Για τον I οι μινιμξς βεβαιωμξς είναι $f = (p, 1-p)$, $p \in [0,1]$
 $\gg \quad \Pi \quad \gg \quad \gg \quad \gg$

$$g = (q_1, q_2, q_3, 1 - q_1 - q_2 - q_3)$$

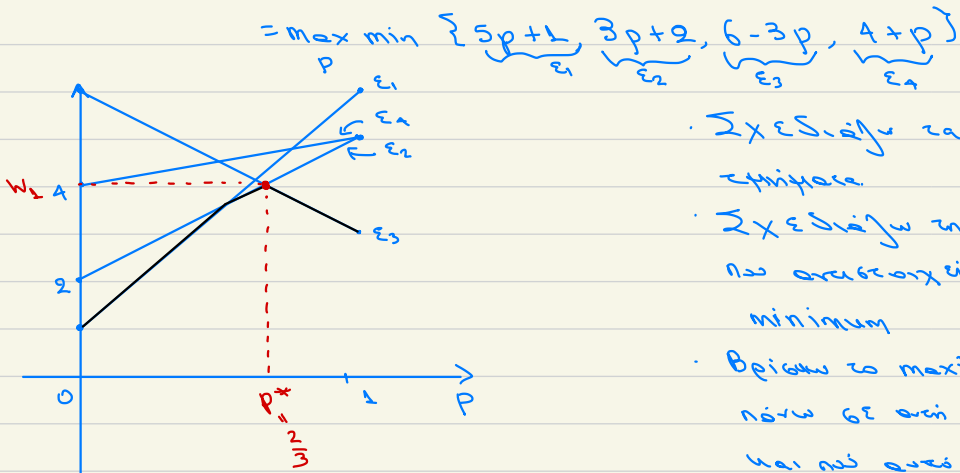
H w_1 είναι

$$w_1 = \max_p \min_g h_1(p, g)$$

$$= \max_p \min [h_1(p, (t_1)), h_1(p, (t_2)), h_1(p, (t_3)), h_1(p, (t_4))]$$

$$= \max_p \min [6p + 1(1-p), 5p + 2(1-p), 3p + 6(1-p), 5p + 4(1-p)]$$

$\Sigma \backslash \Pi$	(t_1)	(t_2)	(t_3)	(t_4)
$p \ (s_1)$	6	5	3	5
$1-p \ (s_2)$	1	2	6	4



• $\Sigma x \in S_1$ είνξ να εινξ.

εμινιμξς

• $\Sigma x \in S_1$ είνξ να εινξ μινιμξς

να αρεσξοξεί ξο

minimum

• Βρούμξ το maximum

νότξ ξο εινξ να εινξ

και να αρεσξοξεί ξο

ξο.

Το p^* είναι στην ταμή των $ε_2$ και $ε_3$:

$$3p^* + 2 = 6 - 3p^* \Leftrightarrow$$

$$6p^* = 4 \Leftrightarrow$$

$$p^* = \frac{2}{3}$$

$$w_1 = 3 \cdot \frac{2}{3} + 2 = 4 = w_2$$

Άρα, η maxmin στρατηγική είναι

$$p^* = (p^*, 1-p^*) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

και η τιμή του παιχνιδιού είναι $w_1 = w_2 = 4$.

Για το II:

Για να βρούμε η minmax στρατηγική υπολογίζουμε w_2

$$w_2 = \min_q \max_p h_I(p, q)$$

$$= \min_q \max_{\substack{p \\ (q_1, q_2, q_3, 1-q_1-q_2-q_3)}} \{h_I((s_1), q), h_I((s_2), q)\}$$

Δεν εφαρμόζεται η ίδια μέθοδος για να
εμφράξουμε όλα ως προς q_1, q_2, q_3 .

✓ Ενυπέρχεται:

$$(p^*, q^*) \text{ SSI} \Leftrightarrow \begin{cases} p^* \in BR_I(q^*) \\ q^* \in BR_{II}(p^*) \end{cases}$$
$$q^* \in BR_{II}(p^*) \stackrel{p^* = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})}{\Rightarrow} q^* \in BR_{II}\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$$

Κοιτάμε τη γραμμή παύση σε p^* για να
βρούμε με ποιες καθαρές στρατηγικές το II ελαχί-
στοποιείται η πληρωμή το I. Στο p^* , ελαχιστοποιείται

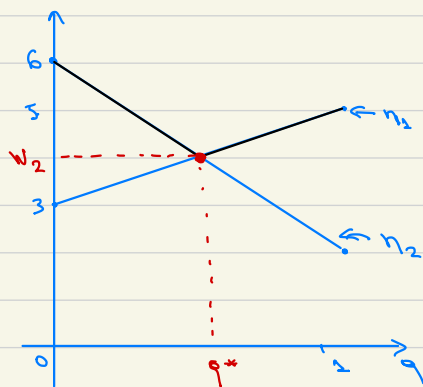
η πιθανότητα να I , αν ο II αποφασίσει να (t_2) ή (t_3) . Η βέλτεστη ανάρτηση του II είναι q^* είναι η τιμή $q^* = (0, q, 1-q, 0)$

$$\text{Αρα } w_2 = \min_q \max \{ h_1((s_1), q), h_2((s_2), q) \}$$

$I \backslash II$	0 (t_1)	q (t_2)	$1-q$ (t_3)	0 (t_4)
(s_1)	6	5	3	5
(s_2)	1	2	6	4

$$= \min_q \max \{ 5q + 3(1-q), 2q + 6(1-q) \}$$

$$= \min_q \max \{ \underbrace{2q + 3}_{h_1}, \underbrace{6 - 4q}_{h_2} \}$$



• Σχεδιάζω τα w_1

σημεία

• Σχεδιάζω τη γραμμή
που αντιστοιχεί στο
maximum

• Βρίσκω το minimum
όπου οι δύο w
γραμμές και για
αυτό q^* προκύπτει.

Το q^* είναι στην κορυφή των h_1, h_2 .

$$2q^* + 3 = 6 - 4q^* \Leftrightarrow$$

$$6q^* = 3 \Leftrightarrow$$

$$q^* = \frac{1}{2}$$

Η $\min \max$ στρατηγική είναι η $q^* = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Επομένως, το ΣΠΙ είναι το $(p^*, q^*) = ((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0))$ και η πληρωμή το παίχτη Ι είναι $w_1 = w_2 = 4$. Η πληρωμή του II είναι -4 .

Παράδειγμα (niveaux $m \times 2$, $m > 2$)

Να βρούμε τα ΣΠΙ στο παρακάτω παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος. Να ξεκινήσει οποιοδήποτε τις υπερεχαιμένες στρατηγικές αν υπάρχουν.

I \ II	(t_1)	(t_2)
(s_1)	3	0
(s_2)	4	-1
(s_3)	-1	2
(s_4)	-2	-1

Λύση

Για τον Ι: Η (s_4) υπερεχαιται από την (s_1)

Για τον II: —

Θα γράψουμε για ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές.

I/II	(t ₁) (t ₂)		minimax
	(s ₁)	(s ₂)	
(s ₁)	3	0	0*
(s ₂)	4	-1	-1
(s ₃)	-1	2	-1
	4	2*	

$$2 = v_2$$

$v_1 < v_2 \Rightarrow \nexists$ ΣΣΙ σε καθαρές.

Θα βρούμε ΣΣΙ σε μίξεις.

≡ Εύρεση v_2 $\Leftrightarrow$ βρούμε v_2 και minmax στρατηγική

0, μίξη σε καθαρές στο II είναι $q = (q, 1-q)$.

0, >> >> στο I είναι $p = (p_1, p_2, 1-p_1-p_2)$

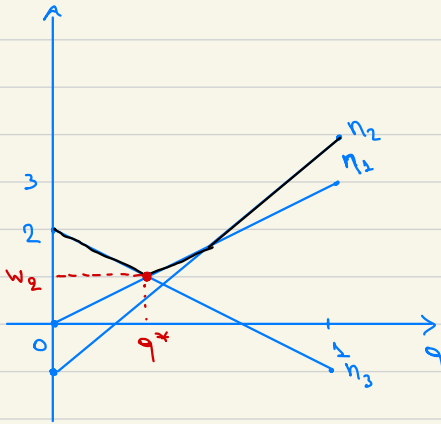
$$v_2 = \min_q \max_p h_2(p, q)$$

$$= \min_q \max \{h_2(s_1, q), h_2(s_2, q), h_2(s_3, q)\}$$

I/II	q (t ₁)	$1-q$ (t ₂)
(s ₁)	3	0
(s ₂)	4	-1
(s ₃)	-1	2

$$= \min_q \max \{3 \cdot q + 0(1-q), 4q - 1(1-q), -1q + 2(1-q)\}$$

$$= \min_q \max \left\{ \underbrace{3q}_{n_1}, \underbrace{5q - 1}_{n_2}, \underbrace{2 - 3q}_{n_3} \right\}.$$



Το q^* είναι συνολικά
 των n_1 και n_3
 $3q^* = 2 - 3q^* \Leftrightarrow$
 $6q^* = 2 \Leftrightarrow$
 $q^* = \frac{1}{3}$
 και $w_2 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

Επομένως, η minmax στρατηγική είναι η
 $q^* = (q^*, 1 - q^*) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
 και $w_1 = 1 = w_2$

Τύπο $\exists!$ να βρούμε τη maxmin στρατηγική για το I.
 $(p^*, q^*) \text{ SSI} \Leftrightarrow \begin{cases} p^* \in BR_I(q^*) \\ q^* \in BR_{II}(p^*) \end{cases}$

$$p^* \in BR_I(q^*)$$

Κοιτάμε το σύστημα συν q^* . Βλέπουμε να
 πληρούμε το I όταν ο II αντάσσει την q^* . Ο I
 θα προτιμάει να αντάσσει τις μεθεξής ποσότητες
 στην τιμή που πληροί, έστω αναφέρεται την
 (s_1) και την (s_2) . Οπότε η βέλτεστη ενέργεια
 συν q^* θα είναι η μορφή
 $p^* = (p, 0, 1 - p)$

$$W_1 = \max_p \min_q h_2(p, q) =$$

$$= \max_p \min \{h_2(p, (t_1)), h_2(p, (t_2))\}$$

Give ϵ xi $\int \epsilon \alpha_1 \dots$