Διάλεξη 07

Παράδειγμα (Φυσικό μονοπώλιο) - Συνέχεια

(iv) Θα βρούμε τη βέλτιστη απάντηση του I στη στρατηγική $q=(q_1, q_2, 1-q_1-q_2)$ του II, $BR_I(q)$

I \ II	q_1 (0)	q_2 (1)	$1-q_1-q_2$ (2)
(0)	$(0,0)$	$(0,\pi)$	$(0,2\pi)$
(1)	$(\pi,0)$	$(-c,-c)$	$(-c,\pi-c)$
(2)	$(2\pi,0)$	$(\pi-c,-c)$	$(-2c,-2c)$

$$h_I((0), q) = q_1 \cdot 0 + q_2 \cdot 0 + (1-q_1-q_2)\cdot 0 = 0$$

$$h_I((1), q) = q_1 \cdot \pi + q_2(-c) + (1-q_1-q_2)(-c) = q_1(\pi + c) - c$$

$$h_I((2), q) = q_1 \cdot 2\pi + q_2(\pi - c) + (1-q_1-q_2)(-2c) = q_1(2\pi + 2c) + q_2(\pi + c) - 2c$$

Για να έχω ως βέλτιστη απάντηση μία μεικτή στρατηγική, θα πρέπει

$$h_I((0), q) = h_I((1), q) = h_I((2), q) \iff$$

$$\begin{cases} h_I((0), q) = h_I((1), q) \\ h_I((0), q) = h_I((2), q) \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = q_1(\pi + c) - c \\ 0 = q_1 2(\pi + c) + q_2(\pi + c) - 2c \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{c}{\pi + c} \\ q_2 = 0 \end{cases}$$

Άρα, ο II θα πρέπει να ακολουθήσει τη

$$q = (q_1, q_2, 1-q_1-q_2) = \left(\frac{c}{\pi+c}, 0, \frac{\pi}{\pi+c}\right)$$

για να είναι η βέλτιστη απάντηση του 1ου παίκτη οποιαδήποτε μεικτή στρατηγική.

Επειδή το παιχνίδι είναι συμμετρικό, αν ο I ακολουθήσει τη στρατηγική $p = \left(\frac{c}{n+c}, 0, \frac{n}{n+c}\right)$, η βέλτιστη απάντηση του II θα είναι οποιαδήποτε μεικτή στρατηγική.

Άρα, το $(p, q) = \left(\left(\frac{c}{n+c}, 0, \frac{n}{n+c}\right), \left(\frac{c}{n+c}, 0, \frac{n}{n+c}\right)\right)$ είναι συμμετρικό ΣΣΙ σε μεικτές στρατηγικές.

?: Δε βρήκα όλα τα ΣΣΙ.

4.3. Παίγνια μηδενικού αθροίσματος (Κεφάλαιο 10)

Ορισμός

Ένα παίγνιο 2 παικτών ονομάζεται <u>μηδενικού αθροίσματος</u> αν οι πληρωμές των 2 παικτών σε κάθε προφίλ στρατηγικών αθροίζουν στο 0.

Σημείωση

Σε ένα παίγνιο 2 παικτών μηδενικού αθροίσματος, όταν ένας παίκτης κάνει το καλύτερο για τον εαυτό του, κάνει το χειρότερο για τον άλλο παίκτη. Οπότε, ο άλλος μπορεί να αισθάνεται ότι ο αντίπαλος παίζει με σκοπό να τον καταστρέψει.

Παράδειγμα

I \ II	(A)	(B)
(a)	(4, −4)	(2, −2)
(b)	(1, −1)	(3, −3)

Δε χρειάζεται να δίνουμε τις πληρωμές και των 2 παικτών. Θα δίνουμε τις πληρωμές του I.

	I \ II	(A)	(B) minmax	
maxmin →	(a)	4	2	2*
	(b)	1	3	1
		4	3*	

$2 = v_1$

$3 = v_2$

Πώς μπορούν να επιλέξουν στρατηγικές οι παίκτες;

Σκεπτικό: Ο καθένας παίζει συντηρητικά (conservative approach)

Ο I σκέφτεται: Ό,τι και να διαλέξω εγώ, ο II θα επιλέξει τη στρατηγική που μεγιστοποιεί τη δική του πληρωμή και ελαχιστοποιεί τη δική μου πληρωμή.

Αν επιλέξω (a), θα διαλέξει (B) και αυτό μου δίνει 2

Αν επιλέξω (b), » » (A) » » » » 1

Κάτω από αυτό το σενάριο, θα παίξει τη στρατηγική που του εξασφαλίζει τη μεγαλύτερη πληρωμή. Δηλαδή, θα ακολουθήσει τη στρατηγική (a).

Αυτή η στρατηγική που του εξασφαλίζει πληρωμή 2, λέγεται maxmin στρατηγική και η πληρωμή λέγεται maxmin πληρωμή ή κάτω τιμή του παιχνιδιού.

Ορισμός

Η <u>maxmin πληρωμή</u> είναι η μεγαλύτερη από τις χειρότερες πληρωμές κάθε γραμμής. Ισούται με

$$V_1 = \max_{i} \min_{j} A_{ij}$$

και ονομάζεται και <u>κάτω τιμή του παιχνιδιού</u>.
Η στρατηγική που εξασφαλίζει την πληρωμή V_1 ονομάζεται <u>maxmin στρατηγική</u>.

$$V_1 = \underbrace{\max_{i} \underbrace{\min_{j} A_{ij}}_{\text{minimum κάθε γραμμής}}}_{\text{maximum από τα στοιχεία που βρήκα}}$$

i → στρατηγική του I

j → στρατηγική του II

A_{ij} → στοιχεία του A = πληρωμές του I

Αντίστοιχα, ο II σκέφτεται: Ό,τι και να διαλέξω εγώ, ο I θα επιλέξει τη στρατηγική που μεγιστοποιεί τη δική του πληρωμή. Άρα, θα επιλέξω τη στρατηγική που ελαχιστοποιεί τη δική μου.
Αν επιλέξω (A), ο I θα επιλέξει (a) και αυτό του δίνει 4.
Αν επιλέξω (B), » » (b) » » 3.
Κάτω από αυτό το σκεπτικό, θα επιλέξει τη στρατηγική που του εξασφαλίζει τη μεγαλύτερη πληρωμή και δίνει στον I τη μικρότερη, δηλαδή την (B).
Αυτή η στρατηγική δίνει στον I πληρωμή 3.

Ορισμός

Η <u>minmax πληρωμή</u> είναι η χειρότερη από τις μεγαλύτερες πληρωμές του Ι. Άρα, είναι η αντίθετη της μεγαλύτερης από τις χειρότερες πληρωμές του ΙΙ.

Ισούται με

$$v_2 = \min_j \max_i A_{ij}$$

και ονομάζεται και <u>άνω τιμή του παιχνιδιού</u>.

Η στρατηγική που εξασφαλίζει την άνω τιμή ονομάζεται <u>minmax στρατηγική</u>.

Παράδειγμα

Θεωρούμε παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος

Ι \ ΙΙ	(t_1) minmax	(t_2)		
maxmin → (s_1)	2	3	2^*	$2 = v_1$ ← κάτω τιμή
(s_2)	1	−1	−1	
	2^*	3		

$2 = v_2$ ← άνω τιμή

Παρατηρούμε ότι $v_1 = v_2 = 2$.

Ι \ ΙΙ	(t_1)	(t_2)
(s_1)	$(2^*, -2^*)$	$(3^*, -3)$
(s_2)	$(1, -1)$	$(-1, 1^*)$

ΣΣΙ : $((s_1), (t_1))$

με πληρωμές $(2, -2)$

Παράδειγμα

minmax

Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος

	I\II	(t_1)	(t_2)	
maxmin	(s_1)	5	−2	-2^*
	(s_2)	−3	4	−3
		5	4^*	

$-2 = v_1$

$4 = v_2$

$-2 = v_1 < v_2 = 4$

I\II	(t_1)	(t_2)
(s_1)	$(5^*, -5)$	$(-2, 2^*)$
(s_2)	$(-3, 3^*)$	$(4^*, -4)$

Δεν υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές.

Θεώρημα

Για κάθε πεπερασμένο παίγνιο μηδενικού αθροίσματος 2 παικτών ισχύουν τα παρακάτω:

(i) $v_1 \leq v_2$

(ii) Υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές αν και μόνο αν $v_1 = v_2$ και το ΣΣΙ αντιστοιχεί στις maxmin και minmax στρατηγικές.

(iii) Αν τα προφίλ στρατηγικών (s, t) και (s', t') είναι ΣΣΙ, τότε και τα (s, t') και (s', t) είναι ΣΣΙ.

(iv) Όλα τα ΣΣΙ έχουν τις ίδιες πληρωμές.

Πόρισμα

Αν $v_1 < v_2$, δεν έχουμε ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με τον παρακάτω πίνακα πληρωμών

	I \ II	(L)	(C)	(R) ← minmax		
maxmin →	(U)	5	8	4	4*	
	(M)	-7	9	0	-7	$4 = v_1$
	(D)	9	1	-2	-2	
		9	9	4*		

$4 = v_2$

$v_1 = v_2 \Rightarrow$ υπάρχει ΣΣΙ, το ((U), (R)) με πληρωμές (4, -4)

Σε μεικτές στρατηγικές.

Ίδιο σκεπτικό: conservative approach

Θεωρούμε παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με 2 καθαρές στρατηγικές για κάθε παίκτη.

Τότε, για τον I, οι μεικτές στρατηγικές είναι $\underline{p} = (p, 1-p)$, $p \in [0,1]$ και, για τον II, οι μεικτές στρατηγικές είναι $\underline{q} = (q, 1-q)$, $q \in [0,1]$.

Ορίζουμε,

<u>κάτω τιμή σε μεικτές στρατηγικές</u>

$$w_1 = \max_{p} \min_{q} h_I(p,q)$$

και <u>άνω τιμή σε μεικτές στρατηγικές</u>

$$w_2 = \min_q \max_p h_I(p,q)$$

Παράδειγμα

	I \ II	q (t_1)	$1-q$ (t_2)
p	(s_1)	4	2
$1-p$	(s_2)	1	3

Θέλω να υπολογίσω τα $w_1 = \max_p \min_q h_I(p,q)$ και

$$w_2 = \min_q \max_p h_I(p,q).$$

Ξεκινάμε με το $w_1 = \max_p \min_q h_I(p,q)$

Πρώτα θέλω το $\min_q h_I(p,q)$.

$\dot{?}$ Ξέρουμε ότι $h_I(p,q) = q\, h_I(p,(t_1)) + (1-q)\, h_I(p,(t_2))$

Άρα $\min_q h_I(p,q) = \min\{h_I(p,(t_1)), h_I(p,(t_2))\}$

Οπότε, το $\min_q h_I(p,q)$ πετυχαίνεται σε καθαρές στρατηγικές του II ($q=0$ ή $q=1$)

Δηλαδή,

$$w_1 = \max_p \min_q h_I(p,q) = \max_p \min\{h_I(p,(t_1)), h_I(p,(t_2))\}$$

$$= \max_p \min\{4 \cdot p + 1(1-p), 2p + 3(1-p)\} =$$

$$= \max_p \min\{1+3p, 3-p\}$$

Για να το υπολογίσω κάνω τα εξής βήματα

- Σχεδιάζω τα ευθύγραμμα τμήματα $1+3p$ και $3-p$, για $p \in [0,1]$
- Σχεδιάζω τη γραμμή που αντιστοιχεί στο minimum
- Βρίσκω το maximum πάνω στη γραμμή και πού αυτό πετυχαίνεται.
- Βρίσκω το w_1.