Παράδειγμα

Δύο οδηγοί οδηγούν αντίθετα και κοντράρονται για τον έλεγχο του δρόμου. Ο καθένας έχει δύο επιλογές: να υποχωρήσει ή να μην υποχωρήσει. Οι οδηγοί αποφασίζουν ταυτόχρονα.

Αν και οι δύο δεν υποχωρήσουν, η πληρωμή του καθενός είναι $a<0$.

Αν υποχωρήσει μόνο ο ένας, τότε αυτός που υποχώρησε έχει πληρωμή 0 και ο άλλος d με $d>0$.

Αν και οι δύο υποχωρήσουν έχει ο καθένας πληρωμή b, με $d>b>0$.

(i) Να γράψετε το παίγνιο σε κανονική μορφή.

(ii) Να βρεθούν τα ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές.

(iii) Να » » » σε μεικτές στρατηγικές.

Λύση

(i) Παίκτες: I, II

Σύνολα στρατηγικών: $S_I = \{(t_1), (c_1)\}$

$S_{II} = \{(t_2), (c_2)\}$

t -> tough

c -> concede

I \ II	(t_2)	(c_2)
(t_1)	(a, a)	$(d, 0)$
(c_1)	$(0, d)$	(b, b)

(ii)

I \ II	(t_2)	(c_2)
(t_1)	(a,a)	$(d^*,0^*)$
(c_1)	$(0^*,d^*)$	(b,b)

Έχουμε 2 ΣΣΙ: το $((c_1),(t_2))$ με πληρωμές $(0,d)$
και το $((t_1),(c_2))$ με πληρωμές $(d,0)$.

(iii) Θα βρούμε ΣΣΙ σε μεικτές στρατηγικές.
Επειδή κάθε παίκτης έχει 2 καθαρές στρατηγικές, μπορούμε να βρούμε τα ΣΣΙ σε μεικτές σχεδιάζοντας τις βέλτιστες αποκρίσεις.

Θα βρούμε τη βέλτιστη απάντηση του Ι στη στρατηγική του ΙΙ $q=(q,1-q)$, $BR_I(q)$.

	q	$1-q$
I \ II	(t_2)	(c_2)
(t_1)	(a,a)	$(d,0)$
(c_1)	$(0,d)$	(b,b)

$$h_I((t_1),q) = q\cdot a + (1-q)\,d$$

$$h_I((c_1),q) = q\cdot 0 + (1-q)\cdot b$$

• Αν $h_I((t_1),q) > h_I((c_1),q) \Leftrightarrow q\cdot a + (1-q)d > (1-q)b$
$\Leftrightarrow qa + d - qd > b - qb \Leftrightarrow d-b > q(d-b-a) \Leftrightarrow$
$$q < \frac{d-b}{d-b-a}$$
τότε $BR_I(q) = \{(t_1)\} = \{(1,0)\}$

• Αν $h_I((t_1),q) < h_I((c_1),q) \Leftrightarrow q\cdot a + (1-q)d < (1-q)b$
$\Leftrightarrow$ $q > \dfrac{d-b}{d-b-a}$,
τότε $BR_I(q) = \{(c_1)\} = \{(0,1)\}$

· Αν $h_I((t_1),q) = h_I((c_1),q) \iff q\cdot a + (1-q)d = (1-q)b \iff$
$q = \frac{d-b}{d-b-a}$,

τότε $BR_I(q) = \{(p,1-p),\ p\in[0,1]\}$

Άρα

$$BR_I(q) = \begin{cases} \{(1,0)\}, & \text{αν } q < \frac{d-b}{d-b-a} \\ \{(0,1)\}, & \text{αν } q > \frac{d-b}{d-b-a} \\ \{(p,1-p),\ p\in[0,1]\}, & \text{αν } q = \frac{d-b}{d-b-a} \end{cases}$$

Θα βρούμε τη βέλτιστη απόκριση του II στη στρατηγική του I $p=(p,1-p)$, $BR_{II}(p)$.

$h_{II}(p,(t_2)) = p\cdot a + (1-p)d$

$h_{II}(p,(c_2)) = p\cdot 0 + (1-p)\cdot b$

	I \ II	(t_2)	(c_2)
p	(t_1)	(a,a)	$(d,0)$
$1-p$	(c_1)	$(0,d)$	(b,b)

· Αν $h_{II}(p,(t_2)) > h_{II}(p,(c_2)) \Leftrightarrow pa + (1-p)d > (1-p)b \Leftrightarrow$
$p < \dfrac{d-b}{d-b-a}$,

τότε $BR_{II}(p) = \{(t_2)\} = \{(1,0)\}$

· Αν $h_{II}(p,(t_2)) < h_{II}(p,(c_2)) \Leftrightarrow pa + (1-p)d > (1-p)b$
$\Leftrightarrow \quad p > \dfrac{d-b}{d-b-a}$,

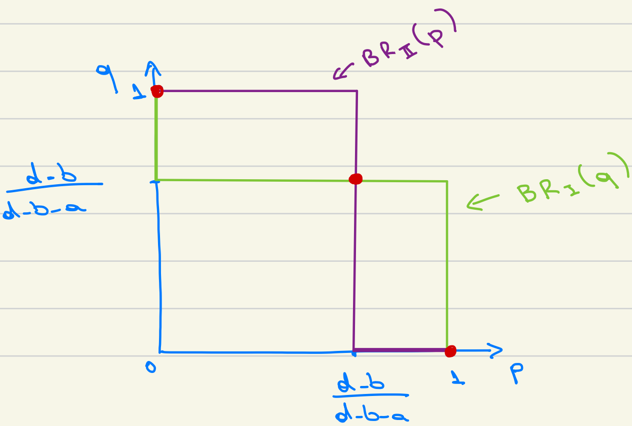
τότε $BR_{II}(p) = \{(c_2)\} = \{(0,1)\}$

· Αν $h_{II}(p,(t_2)) = h_{II}(p,(c_2)) \Leftrightarrow pa + (1-p)d = (1-p)b$
$\Leftrightarrow \quad p = \dfrac{d-b}{d-b-a}$,

τότε $BR_{II}(p) = \{(q,1-q),\ q \in [0,1]\}$

Άρα,

$$BR_{II}(p) = \begin{cases} \{(1,0)\}, & p < \dfrac{d-b}{d-b-a} \\ \{(0,1)\}, & p > \dfrac{d-b}{d-b-a} \\ \{(q,1-q),\ q\in[0,1]\}, & p = \dfrac{d-b}{d-b-a} \end{cases}$$



$$\big((\underset{\substack{\uparrow\\0}}{p},1-p),(\underset{\substack{\uparrow\\1}}{q},1-q)\big)$$

Έχουμε 3 ΣΣΙ σε μεικτές στρατηγικές:

1) $\big(\underbrace{(0,1)}_{\substack{\shortparallel\\(c_1)}},\underbrace{(1,0)}_{\substack{\shortparallel\\(t_2)}}\big)$ με πληρωμές $(0,d)$

2) $$\left(\left(\frac{d-b}{d-b-a},1-\frac{d-b}{d-b-a}\right),\left(\frac{d-b}{d-b-a},1-\frac{d-b}{d-b-a}\right)\right)=$$

$$\left(\left(\frac{d-b}{d-b-a},\frac{-a}{d-b-a}\right),\left(\frac{d-b}{d-b-a},\frac{-a}{d-b-a}\right)\right)$$

με πληρωμές

για τον Ι: $$\left(\frac{d-b}{d-b-a}\right)^2\cdot a+\frac{-a}{d-b-a}\cdot\frac{d-b}{d-b-a}\cdot 0+\frac{d-b}{d-b-a}\cdot\frac{-a}{d-b-a}\cdot d+\left(\frac{-a}{d-b-a}\right)^2 b=\cdots=\frac{-ab}{d-b-a}$$

		I \ II	$\frac{d-b}{d-b-a}$ (t_2)	$\frac{-a}{d-b-a}$ (c_2)
$\frac{d-b}{d-b-a}$		(t_1)	(a,a)	$(d,0)$
$\frac{-a}{d-b-a}$		(c_1)	$(0,d)$	(b,b)

Ομοίως, για τον ΙΙ: $\dfrac{-ab}{d-b-a}$

Άρα, οι πληρωμές θα είναι $\left(\dfrac{-ab}{d-b-a},\dfrac{-ab}{d-b-a}\right)$

3) $\big(\underbrace{(1,0)}_{\substack{\shortparallel\\(t_1)}},\underbrace{(0,1)}_{(c_2)}\big)$ με πληρωμές $(d,0)$

1.2. Συμμετρικά παίγνια
Κεφάλαιο 2

Ορισμός
Ένα παίγνιο 2 παικτών είναι συμμετρικό αν
(i) το σύνολο των στρατηγικών για κάθε παίκτη είναι ίδιο
(ii) οι παίκτες έχουν ίδια πληρωμή κάτω από τις ίδιες στρατηγικές. Δηλαδή,

$$\pi_I(t,s) = \pi_{II}(s,t)$$

(Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας πληρωμών του I είναι ανάστροφος του πίνακα πληρωμών του II)

Ορισμός
Ένα ΣΣΙ καλείται συμμετρικό όταν κάθε παίκτης έχει την ίδια στρατηγική.

Παράδειγμα (Φυσικό μονοπώλιο)
Έχουμε μία αγορά στην οποία μπορεί να επιβιώσει μία εταιρεία.
Αν σε αυτή την αγορά ξεκινήσουν 2 εταιρείες, πότε θα αποχωρήσει μία από αυτές;
Έχουμε 2 εταιρείες με ίδια χαρακτηριστικά.
Έχουμε χρονικό ορίζοντα 2 ετών.
Όσο παραμένουν και οι 2 εταιρείες, κάθε μία έχει απώλειες c €/έτος.
Αν μία εταιρεία είναι μόνη της, τότε έχει κέρδος π €/έτος, $\pi > c$.
Απόφαση για κάθε εταιρεία: σε ποιο έτος θα αποχωρήσει; 0, 1 ή 2;
Σκοπός κάθε εταιρείας: Μεγιστοποίηση κέρδους της.

(i) Να γράψουμε το παίγνιο σε κανονική μορφή.
(ii) Είναι συμμετρικό;
(iii) Έχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές;
Είναι αυτό συμμετρικό;
(iv) Να βρεθεί συμμετρικό ΣΣΙ σε μεικτές.

<u>Λύση</u>

(i) Παίκτες: Ι, ΙΙ

Σύνολα στρατηγικών: $S_I = \{(0),(1),(2)\}$

$S_{II} = \{(0),(1),(2)\}$

Ι \ ΙΙ	(0)	(1)	(2)
(0)	$(0,0)$	$(0,n)$	$(0,2n)$
(1)	$(n,0)$	$(-c,-c)$	$(-c,n-c)$
(2)	$(2n,0)$	$(n-c,-c)$	$(-2c,-2c)$

(ii) Είναι συμμετρικό, γιατί

- $S_I = S_{II}$

- πίνακας πληρωμών του Ι: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ n & -c & -c \\ 2n & n-c & -2c \end{bmatrix}$

  πίνακας πληρωμών του ΙΙ: $\begin{bmatrix} 0 & n & 2n \\ 0 & -c & n-c \\ 0 & -c & -2c \end{bmatrix}$

  είναι ανάστροφοι.

(iii)

I \ II	(0)	(1)	(2)
(0)	$(0,0)$	$(0,\pi)$	$(0^*,2\pi^*)$
(1)	$(\pi,0)$	$(-c,-c)$	$(-c,\pi-c^*)$
(2)	$(2\pi^*,0^*)$	$(\pi-c^*,-c)$	$(-2c,-2c)$

Τα ΣΣΙ είναι :

((0),(2)) με πληρωμές $(0,2\pi)$

((2),(0)) » » $(2\pi,0)$

Τα παραπάνω ΣΣΙ δεν είναι συμμετρικά.

(iv). Δε μπορούμε να βρούμε τα ΣΣΙ σε μεικτές γρήγορα γιατί δεν έχει κάθε παίκτης 2 καθαρές στρατηγικές.

Ζητάμε συμμετρικά ΣΣΙ σε μεικτές