Στρατηγικές και Παίγνια
Διάλεξη 3

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

2.2 Επαναλαμβανόμενη αφαίρεση κυριαρχούμενων στρατηγικών-Iterated elimination of dominated strategies (IEDS)

(Κεφάλαιο 4)

Συνέχεια...

Παράδειγμα: The odd couple

- Υπάρχουν 2 συγκάτοικοι. Η Felix και ο Oscar.
- Κάθε ένας μπορεί να αφιερώσει στην καθαριότητα του σπιτιού 3, 6, ή 9 ώρες.
- Αν αφιερώσουν συνολικά
  τουλάχιστον 12 ώρες, το σπίτι θα χαρακτηρίζεται ως καθαρό.
  9 ώρες, το σπίτι θα χαρακτηρίζεται ως υποφερτό.
  το πολύ 6 ώρες, το σπίτι θα χαρακτηρίζεται ως βρόμικο.
- Οι μονάδες ωφέλειας που λαμβάνει η Felix ανάλογα με την κατάσταση του σπιτιού είναι
  10, αν το σπίτι είναι καθαρό.
  2, αν το σπίτι είναι υποφερτό.
  -10, αν το σπίτι είναι βρόμικο.
- Οι μονάδες ωφέλειας που λαμβάνει ο Oscar ανάλογα με την κατάσταση του σπιτιού είναι
  5, αν το σπίτι είναι καθαρό.
  2, αν το σπίτι είναι υποφερτό.
  -5, αν το σπίτι είναι βρόμικο.
- Η πληρωμή ενός παίκτη ισούται με τις μονάδες ωφέλειας που λαμβάνει από την κατάσταση του σπιτιού μείον τις ώρες που αφιέρωσε στην καθαριότητα.

Θέλουμε να διατυπώσουμε το παιχνίδι σε κανονική μορφή και να το λύσουμε.

Το παιχνίδι σε κανονική μορφή είναι

I \ II	(3)	(6)	(9)
(3)	(-13, -8)	(-1, -4)	(7, -4)
(6)	(-4, -1)	(4, -1)	(4, -4)
(9)	(1, 2)	(1, -1)	(1, -4)

Υπάρχει λύση σε κυρίαρχες;

Ο Ι δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική.

Ο ΙΙ δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική.

Δεν υπάρχει λύση σε κυρίαρχες.

Υπάρχει λύση με ΕΑΚΣ;

Για τον Ι: —

Για τον ΙΙ: Η (9) κυριαρχείται από την (6).

Για τον Ι: Η (3) κυριαρχείται από την (6).

Για τον ΙΙ: Η (6) κυριαρχείται από την (3)

Για τον Ι: Η (6) κυριαρχείται από την (9)

Υπάρχει λύση με ΕΑΚΣ, η ((9), (3)), με πληρωμές (1, 2)

- Δεν υπάρχει πάντα λύση σε κυρίαρχες.
- Λύση με ΕΑΚΣ $\not\Rightarrow$ λύση σε κυρίαρχες.

Παράδειγμα: Bertrand price competition

- Θεωρούμε ένα δυοπώλιο.
- Κάθε εταιρεία επιλέγει τιμή για το προϊόν της: 12, 10 ή 8 Ευρώ.
- Η αγορά αποτελείται από 1000 πελάτες.
- Αν οι εταιρείες επιλέξουν διαφορετικές τιμές, όλοι οι πελάτες θα αγοράσουν από την εταιρεία με τη χαμηλότερη τιμή.
- Αν οι εταιρείες επιλέξουν ~~διαφορετικές~~ ίδιες τιμές, οι πελάτες θα μοιραστούν.
- Η πληρωμή κάθε εταιρείας είναι τα έσοδα από την πώληση του προϊόντος.

Θέλουμε να διατυπώσουμε το παιχνίδι σε κανονική μορφή και να το λύσουμε.

σε χιλ. €

I \ II	(8)	(10)	(12)
(8)	(4, 4)	(8, 0)	(8, 0)
(10)	(0, 8)	(5, 5)	(10, 0)
(12)	(0, 8)	(0, 10)	(6, 6)

I \ II	(8)	(10)	(12)
(8)	(4, 4)	(8, 0)	(8, 0)
(10)	(0, 8)	(5, 5)	(10, 0)
(12)	(0, 8)	(0, 10)	(6, 6)

Υπάρχει λύση σε κυριαρχία;

ο Ι δεν έχει κυρίαρχη

ο ΙΙ δεν έχει κυρίαρχη.

Δεν υπάρχει λύση σε κυρίαρχες.

Υπάρχει λύση με ΕΑΚΣ;

Για τον Ι: Η (12) κυριαρχείται από την (10).

Για τον ΙΙ: Η (10) » » » (8)

Η (12) » » » (8)

Για τον Ι: Η (10) » » » (8)

Η λύση με ΕΑΚΣ είναι η ((8),(8)) με πληρωμές (4, 4).

Παράδειγμα

I\II	(a)	(b)
(a)	(0,0)	(0,1)
(b)	(1,0)	(0,0)

Υπάρχει λύση σε κυρίαρχες;

Για τον I η (b) είναι κυρίαρχη.

Για τον II η (b) είναι κυρίαρχη.

Λύση σε κυρίαρχες: ((b),(b))

με πληρωμές (0,0).

Λύση με ΕΑΚΣ

<u>Ξεκινάμε με τον I:</u>

Για τον I: Η (a) κυριαρχείται από την (b)

I\II	(a)	(b)
~~(a)~~	~~(0,0)~~	~~(0,1)~~
(b)	(1,0)	(0,0)

Για τον II: —

Δεν υπάρχει λύση με ΕΑΚΣ

<u>Ξεκινάμε με τον II:</u>

Για τον II: Η (a) κυριαρχείται από την (b)

I\II	~~(a)~~	(b)
(a)	~~(0,0)~~	(0,1)
(b)	~~(1,0)~~	(0,0)

Για τον I: —

Δεν υπάρχει λύση με ΕΑΚΣ.

Παράδειγμα

Αν αποφασίζουν ταυτόχρονα:

Για τον I: η (a) κυριαρχείται από τη (b)

Για τον II: » » » » » »

Υπάρχει λύση με ΕΑΚΣ.

I \ II	(a)	(b)
(a)	(0,0)	(0,1)
(b)	(1,0)	(0,0)

Μειονεκτήματα λύσης με IEDS

- Υποθέτουμε ότι ένας παίκτης δε θα παίξει μια στρατηγική που δεν ήταν κυριαρχούμενη αρχικά, αλλά έγινε κυριαρχούμενη μετά από πλήθος απαλοιφών. Μπορεί όμως ένας παίκτης να μην είναι τόσο ορθολογικός.
- Η σειρά που γίνεται η απαλοιφή παίζει ρόλο (προηγούμενο παράδειγμα).
- Υπάρχουν παιγνίδια που δεν έχουν λύση με IEDS.

2.3 Σημείο στρατηγικής ισορροπίας- Nash equilibrium

(Κεφάλαιο 5)

Βέλτιστη απάντηση

- Μία στρατηγική s_i^* του παίκτη i είναι **βέλτιστη απάντηση** στη στρατηγική $\underline{s}_{-i}^*$ των άλλων παικτών αν $\pi_i(s_i^*, \underline{s}_{-i}^*) \geq \pi_i(s_i, \underline{s}_{-i}^*)$, για κάθε $s_i \in S_i$.
  Δηλαδή, η στρατηγική s_i^* του παίκτη i είναι βέλτιστη απάντηση στη στρατηγική $\underline{s}_{-i}^*$ των άλλων παικτών, όταν, δεδομένου ότι οι άλλοι ακολουθούν τη στρατηγική $\underline{s}_{-i}^*$, η πληρωμή του i μεγιστοποιείται όταν ακολουθεί την s_i^*.
- Το **σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων** του i στη στρατηγική $\underline{s}_{-i}^*$ των άλλων παικτών είναι το $BR_i(\underline{s}_{-i}^*) = \{s_i \in S_i : s_i = argmax_{s_i}\{\pi_i(s_i, \underline{s}_{-i}^*)\}\}$.

Παράδειγμα: Ο πόλεμος των φύλων

- Ένα ζευγάρι θέλει να αποφασίσει που θα πάει το βράδυ.
- Η σύζυγος (παίκτης Ι) θέλει να πάει στο θέατρο και ο σύζυγος (παίκτης ΙΙ) θέλει να πάει σε εστιατόριο.
- Αποφασίζουν ταυτόχρονα πού θα πάνε και χωρίς ο ένας να γνωρίζει τι αποφάσισε ο άλλος.
- Ο καθένας παίρνει
  0 μονάδες ωφέλειας, αν πάει κάπου μόνος του.
  1 μονάδα ωφέλειας, αν πάει εκεί που δεν θέλει αλλά είμαι μαζί με τον/την σύζυγό της/του.
  3 μονάδες ωφέλειας, αν πάει εκεί που θέλει μαζί με τον/την σύζυγό της/του.

Θέλουμε να διατυπώσουμε το παιχνίδι σε κανονική μορφή και να βρούμε τις βέλτιστες απαντήσεις.

Ι \ ΙΙ	(Θ)	(Ε)
(Θ)	(3^*, 1^*)	(0, 0)
(Ε)	(0, 0)	(1^*, 3^*)

στρατηγική του ΙΙ

$BR_{I}((\Theta)) = \{(\Theta)\}$

$BR_{I}((E)) = \{(E)\}$

στρατηγική του Ι

$BR_{II}((\Theta)) = \{(\Theta)\}$

$BR_{II}((E)) = \{(E)\}$

Υπάρχουν 2 ΣΣΙ:

- ((Θ), (Θ)) με πληρωμές (3, 1)
- ((Ε), (Ε)) » » (1, 3)

Σημείο στρατηγικής ισορροπίας - Nash equilibrium

- Μία στρατηγική κατάσταση $\underline{s}^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_N^*)$ είναι **σημείο στρατηγικής ισορροπίας (ΣΣΙ) - Nash equilibrium**, αν για κάθε παίκτη i η s_i^* είναι βέλτιστη απάντηση στη στρατηγική $\underline{s}_{-i}^*$ των άλλων παικτών.
- Διαισθητικά, μία στρατηγική κατάσταση $\underline{s}^*$ είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας, αν κάποιος προτείνει σε όλους του παίκτες να ακολουθήσουν την $\underline{s}^*$ και ο καθένας πιστεύει ότι οι υπόλοιποι δε θα μετακινηθούν από αυτή, τότε ούτε αυτός θα μετακινηθεί από αυτή.

I \ II	(3)	(6)	(9)
(3)	$(-13,-8)$	$(-1,-4^*)$	$(7^*,-4^*)$
(6)	$(-4,-1^*)$	$(4^*,-1^*)$	$(4,-4)$
(9)	$(1^*,2^*)$	$(1,-1)$	$(1,-4)$

$BR_I((3)) = \{(9)\}$

$BR_I((6)) = \{(6)\}$

$BR_I((9)) = \{(3)\}$

$BR_{II}((3)) = \{(6),(9)\}$

$BR_{II}((6)) = \{(3),(6)\}$

$BR_{II}((9)) = \{(3)\}$

$\exists$ 3 ΣΣΙ:

- $((3),(9))$ με πληρ $(7,-4)$
- $((6),(6))$ >> $(4,-1)$
- $((9),(3))$ >> $(1,2)$

ΣΣΙ $\not\Rightarrow$ λύση σε κυριαρχίες

ΣΣΙ $\not\Rightarrow$ >> με ΕΑΚΣ

Παράδειγμα: Bertrand price competition

I \ II	(8)	(10)	(12)
(8)	$(4^*, 4^*)$	$(8^*, 0)$	$(8, 0)$
(10)	$(0, 8^*)$	$(5, 5)$	$(10^*, 0)$
(12)	$(0, 8)$	$(0, 10^*)$	$(6, 6)$

έχει ένα ΣΣΙ:

((8),(8)) με πληρωμές (4,4).

Παράδειγμα: Το δίλημμα του φυλακισμένου

Ι \ ΙΙ	(Ο)	(Sο)
(Ο)	$(-5^*, -5^*)$	$(0^*, -10)$
(Sο)	$(-10, 0^*)$	$(-1, -1)$

ΣΣΙ : ((Ο),(Ο)) με πληρωμές $(-5,-5)$