Στρατηγικές και Παίγνια
Διάλεξη 2

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

1.2. Μαθηματική διατύπωση παιγνίων

Συνέχεια...

Παιχνίδι σε κανονική μορφή

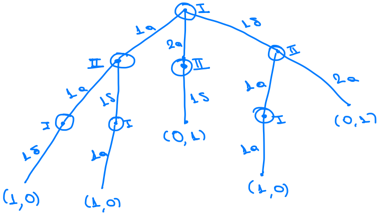
Το **παιχνίδι σε κανονική μορφή** δίνει πληροφορίες για

- Το σύνολο των παικτών.
- Το σύνολο στρατηγικών κάθε παίκτη.
- Τις πληρωμές των παικτών αν ακολουθήσουν οποιεσδήποτε στρατηγικές.

Όλα αυτά παρουσιάζονται σε μορφή πίνακα.

Παράδειγμα: Παιχνίδι Nim(2, 1) - Κανονική μορφή

Παίκτες: I και II



Σύνολα στρατηγικών

Σύνολο στρατηγικών παίκτη I: S_I

Ο I έχει 4 σύνολα πληροφόρησης. Κάθε στρατηγική του είναι ένα διάνυσμα με 4 στοιχεία

$$(\underbrace{\quad}_{\text{κίνηση του I στο 1ο σύνολο πληρ.}},\underbrace{\quad}_{\text{κίνηση του I στο 2ο σύνολο πληρ.}},\underbrace{\quad}_{\text{κίνηση του I στο 3ο σ.π.}},\underbrace{\quad}_{\text{κίνηση του I στο 4ο σ.π.}})$$

κίνηση του I στο 1ο σύνολο πληρ.: 1a, 2a, 1δ

κίνηση του I στο 2ο σύνολο πληρ.: 1δ

κίνηση του I στο 3ο σ.π.: 1a

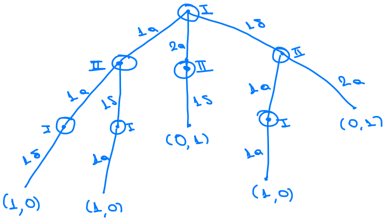
κίνηση του I στο 4ο σ.π.: 1a

$$|S_I| = 3\times1\times1\times1 = 3$$

$$S_I = \{(1a,1\delta,1a,1a),(2a,1\delta,1a,1a),(1\delta,1\delta,1a,1a)\}$$

Σύνολο στρατηγικών του ΙΙ : S_{II}

Έχει 3 σύνολα πληροφόρησης, οπότε κάθε στρατηγική θα έχει 3 στοιχεία



$(\underbrace{\qquad}, \underbrace{\qquad}, \underbrace{\qquad})$

κίνηση του ΙΙ στο 1ο συν. πληρ. 1a ή 1s

κίνηση του ΙΙ στο 2ο σύνολο.πληρ 1s

κίνηση του ΙΙ στο 3ο συν. πληρ. 1a ή 2a

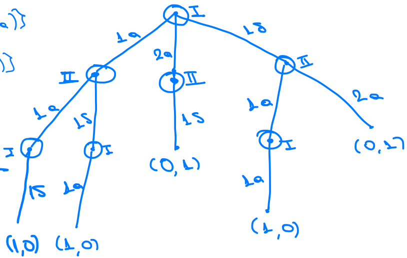
$$|S_{II}| = 2 \times 1 \times 2 = 4$$

$$S_{II} = \{(1a, 1s, 1a), (1a, 1s, 2a), (1s, 1s, 1a), (1s, 1s, 2a)\}$$

$S_I = \{(1a,1\delta,1a,1a),(2a,1\delta,1a,1a),(1\delta,1\delta,1a,1a)\}$

$S_{II} = \{(1a,1\delta,1a),(1a,1\delta,2a),(1\delta,1\delta,1a),(1\delta,1\delta,2a)\}$

I \ II	(1a,1δ,1a)	(1a,1δ,2a)	(1δ,1δ,1a)	(1δ,1δ,2a)
(1a,1δ,1a,1a)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)
(2a,1δ,1a,1a)				
(1δ,1δ,1a,1a)	(1,0)		(1,0)	



Παράδειγμα: Το δίλημμα του φυλακισμένου - Κανονική μορφή

Παίκτες: I, II

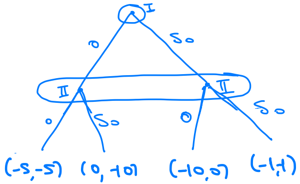
Σύνολα στρατηγικών παικτών

$S_I = \{(O), (So)\}$

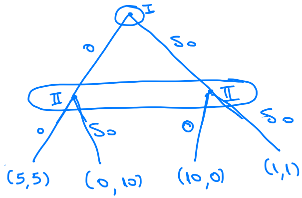
$S_{II} = \{(O), (So)\}$

Πληρωμές

I \ II	(O)	(So)
(O)	(-5,-5)	(0,-10)
(So)	(-10,0)	(-1,-1)



(Θεωρούμε ότι οι πληρωμές είναι κέρδος και κάθε παίκτης θέλει να μεγιστοποιή-σει την πληρωμή του)


I
o
So
II
II
o
So
o
So
(5,5)
(0,10)
(10,0)
(1,1)

Παράδειγμα: Ρώσικη ρουλέτα - Κανονική μορφή

Παίκτες : I, II

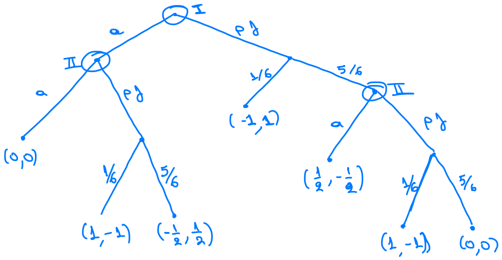
Σύνολα στρατηγικών:

Σύνολο στρατηγικών παίκτη I: S_I

Ο παίκτης I έχει 1 σύνολο πληροφόρησης, οπότε κάθε στρατηγική του θα έχει 1 στοιχείο

$\underbrace{(\quad\quad)}$

κίνηση του I στο 1ο σ.π. a ή ρg



$|S_I| = 2$

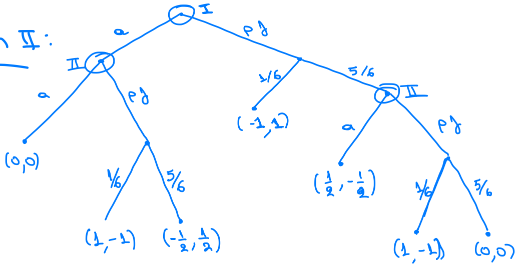
$S_I = \{(a), (\rho g)\}$

Σύνολο στρατηγικών παίκτη ΙΙ:

S_{II}

Ο ΙΙ έχει 2 σύνολα πληροφόρησης, άρα κάθε στρατηγική έχει 2 στοιχεία

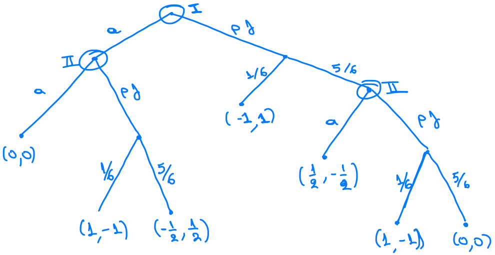
$$(\underbrace{\quad\quad}_{\substack{\text{κίνηση του ΙΙ στο 1ο} \\ \text{σύνολο πληρ.} \\ \text{α ή εδ}}}, \underbrace{\quad\quad}_{\substack{\text{κίνηση του ΙΙ} \\ \text{στο 2ο σ.π.} \\ \text{α ή εδ}}})$$



$$S_{II} = 2 \times 2 = 4$$

$$S_{II} = \{(α, α), (α, εδ), (εδ, α), (εδ, εδ)\}$$

Πληρωμές



$S_I = \{(a),(ρξ)\}$

$S_{II} = \{(a,a),(a,ρξ),(ρξ,a),(ρξ,ρξ)\}$

I \ II	(a,a)	(a,ρξ)	(ρξ,a)	(ρξ,ρξ)
(a)	(0,0)	(0,0)	$(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$	$(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$
(ρξ)	$(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$	$(-\frac{1}{36},\frac{1}{36})$	$(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$	$(-\frac{1}{36},\frac{1}{36})$

(ρξ) vs (a,a): $\frac{1}{6}(-1,1)+\frac{5}{6}(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$

(ρξ) vs (a,ρξ): $\frac{1}{6}(-1,1)+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}(1,-1)+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}(0,0)$

$= \frac{1}{6}(-1,1)+\frac{5}{36}(1,-1)+\frac{25}{36}(0,0) = (-\frac{1}{36},\frac{1}{36})$

(ρξ) vs (ρξ,a): $(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$

(ρξ) vs (ρξ,ρξ): $(-\frac{1}{36},\frac{1}{36})$

(a) vs (a,a): (0,0)

(a) vs (a,ρξ): (0,0)

(a) vs (ρξ,a):

$\frac{1}{6}\cdot(1,-1)+\frac{5}{6}(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

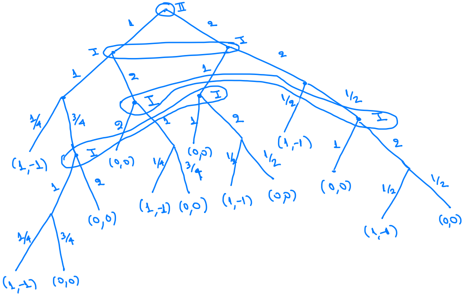
(a) vs (ρξ,ρξ):

$\frac{1}{6}(1,-1)+\frac{5}{6}(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

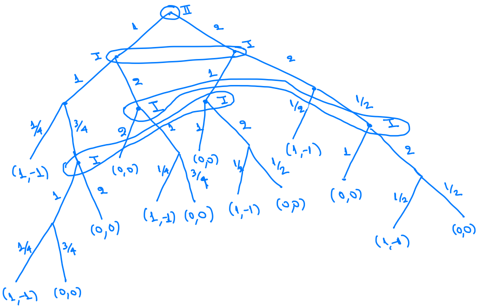
Παράδειγμα: Παιχνίδι αναζήτησης - Κανονική μορφή

$$S_I = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}$$

$$S_{II} = \{(1),(2)\}$$



I \ II	(1)	(2)
(1,1,1)	$(\frac{7}{16}, -\frac{7}{16})$	(0,0)
(1,1,2)	$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$	
(1,2,1)		
(1,2,2)		
(2,1,1)		
(2,1,2)		
(2,2,1)		
(2,2,2)		



(1,1,1) vs (1) :

$$\frac{1}{4}(1,-1) + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}(1,-1) + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\,(0,0) = \left(\frac{7}{16}, -\frac{7}{16}\right)$$

(1,1,1) vs (2) : (0,0)

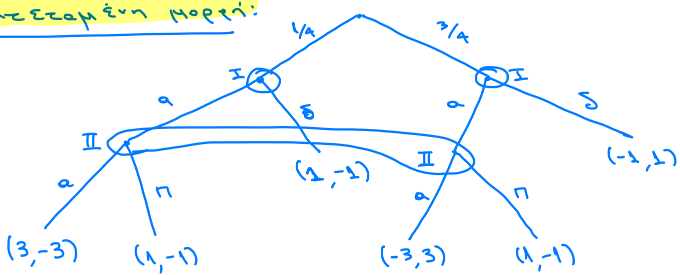
(1,1,2) vs (1) : $\frac{1}{4}(1,-1) + \frac{3}{4}(0,0) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

Παράδειγμα: Στοιχειώδες πόκερ

- Υπάρχουν 2 παίκτες: Ι και ΙΙ.
- Αρχικά, οι παίκτες ποντάρουν από 1 Ευρώ.
- Ο Ι τραβάει ένα φύλλο από συνήθη τράπουλα, το βλέπει και αποφασίζει αν θα ανεβάσει το ποντάρισμα κατά 2 Ευρώ ή θα δείξει το φύλλο του.
- Αν ο Ι δείξει το φύλλο του
  - και το φύλλο είναι κούπα, παίρνει ο Ι όλα τα χρήματα.
  - και το φύλλο δεν είναι κούπα, παίρνει όλα τα χρήματα ο ΙΙ.
- Αν ο Ι ανεβάσει το ποντάρισμα, έχει σειρά ο ΙΙ που αποφασίζει αν θα ανεβάσει το ποντάρισμα κατά 2 Ευρώ ή θα πάει πάσο.
- Αν ο ΙΙ ανεβάσει το ποντάρισμα, ο Ι θα δείξει το φύλλο του και
  - αν το φύλλο είναι κούπα, παίρνει ο Ι όλα τα χρήματα.
  - αν το φύλλο δεν είναι κούπα, παίρνει όλα τα χρήματα ο ΙΙ.
- Αν ο ΙΙ πάει πάσο, τα χρήματα παίρνει ο Ι.

Να διατυπωθεί το παιχνίδι σε εκτεταμένη και κανονική μορφή.

Εκτεταμένη μορφή:



Κανονική μορφή:

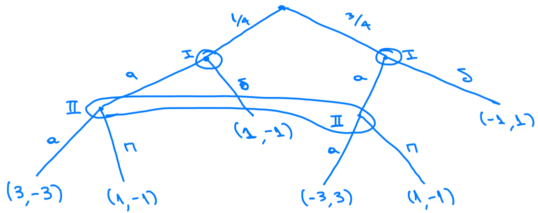
Παίκτες: I, II

Σύνολα στρατηγικών

S_I $\quad S_I = \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\delta),(\delta,\alpha),(\delta,\delta)\}$

S_{II} $\quad S_{II} = \{(\alpha),(\pi)\}$

I \ II	(a)	(π)
(a,a)	$\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$	$(1,-1)$
(a,S)		$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$
(S,a)		
(S,S)		



(a,a) vs (a) : $\frac{1}{4}\cdot(3,-3)+\frac{3}{4}(-3,3)=\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

(a,a) vs (π) : $\frac{1}{4}(1,-1)+\frac{3}{4}(1,-1)=(1,-1)$

(a,S) vs (π) : $\frac{1}{4}(1,-1)+\frac{3}{4}(-1,1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Ενότητα 2:
Θεωρητικό πλαίσιο διαμόρφωσης παιγνίων

2.1 Κυρίαρχες στρατηγικές
(Κεφάλαιο 3)

Συμβολισμοί

- Θεωρούμε ότι το σύνολο των παικτών είναι το $\{1, 2, \ldots, N\}$.
- Το **σύνολο στρατηγικών** του παίκτη i συμβολίζεται με S_i.
- Συμβολίζουμε με s_i $(s_i \in S_i)$ μία **στρατηγική** του πάικτη i.
- Το διάνυσμα $\underline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_N)$ ονομάζεται **προφίλ στρατηγικών ή στρατηγική κατάσταση** και περιγράφει τι στρατηγική θα ακολουθήσει κάθε παίκτης.
- Το $\underline{s}_{-i}$ είναι ένα διάνυσμα που περιέχει τις στρατηγικές όλων των παικτών εκτός από του i. Οπότε, $\underline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_N) = (s_i, \underline{s}_{-i})$.
- Η **πληρωμή** του παίκτη i όταν όλοι οι παίκτες ακολουθούν την $\underline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_N) = (s_i, \underline{s}_{-i})$ συμβολίζεται με $\pi_i(\underline{s}) = \pi_i(s_1, s_2, \ldots, s_N) = \pi_i(s_i, \underline{s}_{-i})$.

Κυρίαρχες / Κυριαρχούμενες στρατηγικές

- Η στρατηγική s_i^* **κυριαρχεί ισχυρά (ή αυστηρά)** της στρατηγικής $s_i^{'}$ του παίκτη i, αν $\pi_i(s_i^*, \underline{s}_{-i}) > \pi_i(s_i^{'}, \underline{s}_{-i})$, για κάθε $\underline{s}_{-i}$.
  Τότε, λέμε ότι η $s_i^{'}$ **κυριαρχείται ισχυρά (ή αυστηρά)** από την s_i^*.
  Επίσης, η $s_i^{'}$ λέγεται **ισχυρά (ή αυστηρά) κυριαρχούμενη στρατηγική**.
- Εάν η στρατηγική s_i^* κυριαρχεί ισχυρά (ή αυστηρά) κάθε άλλης στρατηγικής του παίκτη i, τότε η s_i^* λέγεται **ισχυρά (ή αυστηρά) κυρίαρχη στρατηγική**.
- Η στρατηγική s_i^* **κυριαρχεί (ασθενώς)** της στρατηγικής $s_i^{'}$ του παίκτη i, αν $\pi_i(s_i^*, \underline{s}_{-i}) \geq \pi_i(s_i^{'}, \underline{s}_{-i})$, για κάθε $\underline{s}_{-i}$, και $\pi_i(s_i^*, \underline{s}_{-i}) > \pi_i(s_i^{'}, \underline{s}_{-i})$, για τουλάχιστον ένα $\underline{s}_{-i}$.
  Τότε, λέμε ότι η $s_i^{'}$ **κυριαρχείται (ασθενώς)** από την s_i^*.
  Επίσης, η $s_i^{'}$ λέγεται **(ασθενώς) κυριαρχούμενη στρατηγική**.
- Εάν η στρατηγική s_i^* κυριαρχεί (ασθενώς) κάθε άλλης στρατηγικής του παίκτη i, τότε η s_i^* λέγεται **(ασθενώς) κυρίαρχη στρατηγική**.

Λύση με κυρίαρχες στρατηγικές

- Εάν κάθε παίκτης έχει μία κυρίαρχη στρατηγική, τότε αυτές αποτελούν λύση του παιχνιδιού.
- Δεν υπάρχει πάντα λύση με κυρίαρχες στρατηγικές.

Παράδειγμα: Το δίλημμα του φυλακισμένου

Για τον παίκτη Ι:

Αν ο ΙΙ ακολουθήσει την (Ο):

$$\underbrace{\pi_I((O),(O))}_{=-5} > \underbrace{\pi_I((\Sigma o),(O))}_{=-10}$$

Ι \ ΙΙ	(Ο)	(Σο)
(Ο)	(-5,-5)	(0,-10)
(Σο)	(-10,0)	(-1,-1)

Αν ο ΙΙ ακολουθήσει την (Σο):

$$\underbrace{\pi_I((O),(\Sigma o))}_{=0} > \underbrace{\pi_I((\Sigma o),(\Sigma o))}_{=-1}$$

Για τον Ι, η στρατηγική (Ο) κυριαρχεί αυστηρά της (Σο).

→ Η (Σο) είναι κυριαρχούμενη.

→ Η (Ο) είναι αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική.

⇒ ο Ι θα παίξει (Ο).

Για τον παίκτη ΙΙ:

Αν ο Ι αποφασίσει (o):

$$\underbrace{\pi_{II}((o),(o))}_{=-5} > \underbrace{\pi_{II}((o),(So))}_{=-10}$$

Αν ο Ι αποφασίσει (So):

$$\underbrace{\pi_{II}((So),(o))}_{=0} > \underbrace{\pi_{II}((So),(So))}_{=-1}$$

I \ II	(o)	(So)
(o)	(-5,-5)	(0,-10)
(So)	(-10,0)	(-1,-1)

Για τον παίκτη ΙΙ, η στρατηγική (o) υπερέχει αυστηρά της στρατηγικής (So).

→ Η (So) είναι υπερεχόμενη.

→ Η (o) είναι αυστηρά υπερέχη.

Άρα ο ΙΙ θα αποφασίσει (o).

$\boxed{\text{Λύση σε υπερεχ.ες: } ((o),(o)) \text{ με πληρωμές } (-5,-5)}$

Παράδειγμα

I\II	(left)	(right)
(top)	(7,3)	(5,3)
(bottom)	(7,0)	(3,−1)

Για τον I: η (top) υπερέχει ασθενώς της (bottom) $\Rightarrow$

ο I θα αποφασίσει την (top)

Για τον II: η (left) υπερέχει ασθενώς της (right) $\Rightarrow$

ο II θα αποφασίσει την (left)

Λύση σε υπερέχουσες στρατηγικές:

((top),(left))

με πληρωμές (7,3)

2.2 Επαναλαμβανόμενη αφαίρεση κυριαρχούμενων στρατηγικών- Iterated elimination of dominated strategies (IEDS)

(Κεφάλαιο 4)

Παράδειγμα

I \ II	(left)	(right)
(up)	(1,1)	(0,1)
(middle)	(0,2)	(1,0)
(down)	(0,-1)	(0,0)

Για τον I:
Η (up) κυριαρχεί ασθενώς της (down).

Η (middle) κυριαρχεί ασθενώς της (down).

Η (down) είναι κυριαρχούμενη.
Ο I δεν έχει κυρίαρχη.

Για τον II:

Δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική.

Λύση σε κυρίαρχες στρατηγικές δεν υπάρχει!

Θα κάνουμε επαναλαμβανόμενη αφαίρεση κυριαρχούμενων στρατηγικών,
Για τον I: η (down) κυριαρχείται από την (up)
Για τον II: η (right) κυριαρχείται από την (left)
Για τον I: η (middle) κυριαρχείται από την (up)

Με ΕΑΚΣ η λύση είναι ((up),(left))