- Στο μάθημα Επιχειρησιακή Έρευνα είδαμε προβλήματα στα οποία έπρεπε να βελτιστοποιήσουμε μία συνάρτηση (αντικειμενική συνάρτηση) παίρνοντας κατάλληλες αποφάσεις. Σε αυτά τα προβλήματα η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης εξαρτιόταν μόνο από 'τις δικές μας' αποφάσεις.
- Όμως σε πολλά προβλήματα η ωφέλειά μας εξαρτάται και από τις αποφάσεις των άλλων. Με τέτοια προβλήματα ασχολείται η **Θεωρία Παιγνίων**.
  Παραδείγματα:
  - Τιμολόγηση αγαθών και υπηρεσιών
  - Χρηματοδότηση Έρευνας και Ανάπτυξης
  - Ψήφος στις εκλογές

Ενδιαφέρουσες ερωτήσεις

- Ποιοι είναι οι παίκτες (οντότητες που αποφασίζουν);
- Ποιες είναι οι στρατηγικές (δυνατές αποφάσεις των παικτών);
- Ποια είναι η ωφέλεια κάθε παίκτη ανάλογα με τις στρατηγικές που θα ακολουθήσουν ο ίδιος και οι υπόλοιποι παίκτες;
- Τι θα αποφασίσουν τελικά; Ποια στρατηγική θα ακολουθήσουν; Ποια είναι η λύση του παιχνιδιού;
- Είναι η λύση μοναδική;
- Είναι το αποτέλεσμα του παιχνιδιού καλό για την κοινωνία; Είναι κοινωνικά βέλτιστο;
- Τι γίνεται αν οι παίκτες αλληλεπιδρούν πάνω από μία φορά;
- Τι γίνεται αν υπάρχει αβεβαιότητα ως προς τα χαρακτηριστικά των παικτών;

Βιβλιογραφία

- ⋆ P. K. Dutta – Strategies and Games, The MIT Press
- R. S. Gibbons – Game Theory for Applied Economists, Princeton University Press
- Ε.Φ. Μαγείρου – Παίγνια και Αποφάσεις, Εκδόσεις ΚΡΙΤΙΚΗ

Περιεχόμενα του μαθήματος

Ενότητα 1: Εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων: Κεφάλαια 1-2
Ενότητα 2: Θεωρητικό Πλαίσιο Διαμόρφωσης Παιγνίου: Κεφάλαια 3-5
Ενότητα 3: Στατικά Παίγνια Πλήρους Πληροφόρησης – Εφαρμογές: Κεφάλαια 6-7
Ενότητα 4: Μεικτές Στρατηγικές, Συμμετρικά Παίγνια, και Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος: Κεφάλαια 8-10
Ενότητα 5: Παίγνια σε Εκτεταμένη Μορφή: Κεφάλαια 11-13 και 15-16
Ενότητα 6: Δυναμικά Παίγνια Πλήρους Πληροφόρησης: Κεφάλαιο 18

Βαθμολογία

Βαθμός=
(Τελική βαθμολογία)×0.9+
(Μέσος όρος βαθμολογίας ασκήσεων)×0.1

Ενότητα 1:
Εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων

1.1. Αρχική ματιά στις εφαρμογές

(Κεφάλαιο 1)

Παράδειγμα: Παιχνίδι Nim(n, m)

- Έχουμε 2 στοίβες με ξυλάκια. Η 1η στοίβα έχει n και η 2η στοίβα έχει m ξυλάκια.
- Υπάρχουν 2 παίκτες: ο I και ο II.
- Πρώτα παίζει ο I, μετά ο II, μετά πάλι ο I, κτλ.
- Κάθε παίκτης, όταν έρθει η σειρά του, διαλέγει στοίβα και παίρνει από αυτήν όσα ξυλάκια θέλει.
- Κερδίζει αυτός που θα πάρει το τελευταίο ξυλάκι. Ο χαμένος δίνει 1 στον νικητή.
- Αν $n = m$, το παιχνίδι λέγεται ισορροπημένο, αλλιώς λέγεται μη-ισορροπημένο.

Θα προσπαθήσουμε πρώτα να βρούμε τη λύση στο ισορροπημένο παιχνίδι και μετά στο μη-ισορροπημένο.

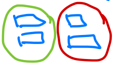
Nim$(1,1)$

Ο I θα διαλέξει ένα ξυλάκι από την αριστερή στοίβα.

Ο II θα διαλέξει το άλλο ξυλάκι και θα κερδίσει το παιχνίδι.

Nim(2, 2)

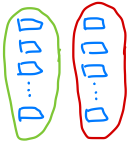
· Αν ο Ι διαλέξει ένα ξυλάκι από την αριστερή στοίβα, ο ΙΙ θα διαλέξει ένα ξυλάκι από τη δεξιά ώστε να οδηγήσει το παιχνίδι στο Nim(1,1) και να κερδίσει.

· 

Αν ο Ι διαλέξει δύο ξυλάκια από την αριστερή στοίβα, ο ΙΙ θα διαλέξει 2 ξυλάκια από την άλλη στοίβα και θα κερδίσει.

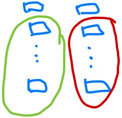
Ο Ι σίγουρα θα χάσει.

$\mathbf{Nim}(n, n), n \geq 3$



- Αν ο Ι πάρει n ξυλάκια, ο ΙΙ θα πάρει n ξυλάκια από την άλλη στοίβα : θα χάσει ο Ι

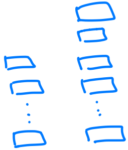
- Αν ο Ι πάρει n-1 ξυλάκια, ο ΙΙ θα πάρει n-1 ξυλάκια από την άλλη στοίβα, θα φέρει το παιχνίδι στο Nim(1,1) και θα χάσει ο Ι.



Γενικά, όσα ξυλάκια και να πάρει ο Ι από την πρώτη στοίβα, τότε θα πάρει και ο ΙΙ από τη 2η στοίβα και θα χάσει τελικά ο Ι.

Μη-ισορροπημένο παιχνίδι:

Nim(n,m) , $n < m$



ο I θα πάρει $m-n$ ξυλάκια από τη $2^η$ στοίβα ώστε να οδηγήσει το παιχνίδι στο Nim(n,n) στο οποίο ξεκινάει ο παίκτης II. Άρα ο II θα χάσει.

Παράδειγμα: Παιχνίδι των Shapley και Shubit

- Υπάρχουν 3 παίκτες: Α, Β και Γ.
- Κάθε παίκτης έχει ένα μπαλόνι και ένα όπλο με το οποίο πυροβολεί τα μπαλόνια των άλλων.
- Ο παίκτης που θα πυροβολήσει προκύπτει με κλήρωση (κίνηση της φύσης).
- Αυτός που θα κληρωθεί επιλέγει ποιο μπαλόνι θα στοχεύσει.
- Αν αστοχήσει, το παιχνίδι ξεκινάει από την αρχή. Αν ευστοχήσει, ο χτυπημένος φεύγει και το παιχνίδι συνεχίζεται με αυτούς που έχουν μείνει.
- Η πιθανότητα να πετύχει τον στόχο ο Α είναι α.
  Η πιθανότητα να πετύχει τον στόχο ο Β είναι β.
  Η πιθανότητα να πετύχει τον στόχο ο Γ είναι γ.
- Έστω $\alpha > \beta > \gamma$.
- Κάθε παίκτης θέλει να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα να επιβιώσει.

Τι θα επιλέξουν να κάνουν οι παίκτες; Ποια θα είναι η πιθανότητα επιβίωσης κάθε παίκτη τελικά;

T: το παίγνιο των 3 παικτών

T_{AB}: το παίγνιο των A και B

$T_{A\Gamma}$: » » » A και Γ

$T_{B\Gamma}$: » » » B και Γ

Ξεκινάμε από το T_{AB}

P_{AB}: πιθανότητα επιβίωσης του A στο παίγνιο T_{AB}

P_{BA}: » » » B » » »

πιθ. υπρε. ο A

ευστοχεί ο A

υπρε. ο B

$$P_{AB} = \frac{1}{2}\cdot a \cdot 1 + \frac{1}{2}(1-a)P_{AB} + \frac{1}{2}b\cdot 0 + \frac{1}{2}(1-b)\cdot P_{AB} \Leftrightarrow$$

$$2P_{AB} - (1-a)P_{AB} - (1-b)P_{AB} = a \Leftrightarrow$$

$$P_{AB} = \frac{a}{a+b}$$

και $P_{BA} = 1 - P_{AB} = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$

Στο $T_{ΒΓ}$

$$P_{ΒΓ} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \quad P_{ΓΒ} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}$$

Στο $T_{ΑΓ}$

$$P_{ΑΓ} = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}, \quad P_{ΓΑ} = \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}$$

Στο T

Ο παίκτης που επιλέγεται από την φύση πρέπει να επιλέξει ποιον θα στοχεύσει.

Η πιθανότητα επιτυχίας είναι ίδια όποιον και αν επιλέξει.

Αν αποτύχει, το παιχνίδι ξεκινάει από την αρχή.

Αν τον πετύχει, θα παίξει το παιχνίδι με τον άλλον παίκτη, άρα θα επιλέξει να στοχεύει τον παίκτη με την μεγαλύτερη ευστοχία ώστε σε περίπτωση επιτυχίας να μείνει με τον παίκτη που έχει μικρότερη ευστοχία.

Άρα, αν επιλέγει από τη ρίζα ο Α, θα στοχεύσει τον Β.

» » ο Β, » » » Α.

» » ο Γ, » » » Α.

Η πιθανότητα επιβίωσης του Α στο Τ είναι

$$P_A = \overset{\text{υπερ. τον Α}}{\frac{1}{3}} \cdot \alpha \cdot P_{A\Gamma} + \overset{\text{υπερ. ο Α}}{\frac{1}{3}}(1-\alpha)\cdot P_A + \cancel{\frac{1}{3}\cdot\beta\cdot 0} + \frac{1}{3}\cdot(1-\beta)\cdot P_A +$$

$$\cancel{\frac{1}{3}\cdot\gamma\cdot 0} + \frac{1}{3}\cdot(1-\gamma)\cdot P_A \iff$$

$$3P_A - (1-\alpha)P_A - (1-\beta)P_A - (1-\gamma)P_A = \alpha\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\gamma} \iff$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)P_A = \frac{\alpha^2}{\alpha+\gamma} \iff P_A = \frac{\alpha^2}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$P_B = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad P_\Gamma = \frac{\gamma(2\alpha+\gamma)}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

Για μεγάλο εύρος των α,β,γ ισχύει $P_A < P_B < P_\Gamma$

Παράδειγμα: Το δίλημμα του φυλακισμένου

- 2 ληστές: ο I και ο II.
- Η αστυνομία τους συλλαμβάνει και τους ανακρίνει χωριστά. Τους προτείνει τα εξής:
  - Αν ομολογήσουν και οι δύο, θα πάνε φυλακή 5 χρόνια.
  - Αν δεν ομολογήσει κανένας, θα πάνε φυλακή 1 χρόνο.
  - Αν ομολογήσει μόνο ο ένας, αυτός που ομολόγησε θα απελευθερωθεί και ο άλλος θα πάει φυλακή 10 χρόνια.

Τι θα επιλέξουν να κάνουν οι παίκτες; Πόσα χρόνια θα μπει ο καθένας στη φυλακή τελικά;

I \ II	ο	δο
ο	(5, 5)	(0, 10)
δο	(10, 0)	(1, 1)

Ο παίκτης Ι σκέφτεται:

Αν ο ΙΙ επιλέξει να ομολογήσει, με συμφέρει να ομολογήσω.

Αν ο ΙΙ επιλέξει να μην ομολογήσει, με συμφέρει να ομολογήσω.

Άρα ο Ι θα ομολογήσει.

Ομοίως και ο ΙΙ θα ομολογήσει.

Άρα η λύση είναι να ομολογήσουν και οι 2.

1.2. Μαθηματική διατύπωση παιγνίων

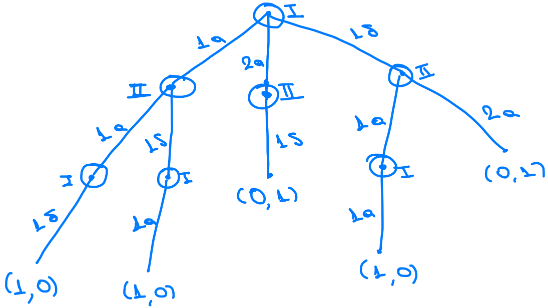
(Κεφάλαιο 2)

Βασικά στοιχεία

- **Ποιος;**
  Παίκτες = στρατηγικές οντότητες που αποφασίζουν.
- **Πότε;**
  Με ποια σειρά αποφασίζουν οι παίκτες.
- **Τι;**
  Στρατηγικές παικτών = οι δυνατές αποφάσεις τους.
- **Πόσο;**
  Η ωφέλεια αν παίξουν συγκεκριμένες στρατηγικές.

- **Εκτεταμένη μορφή**
  Σε μορφή δέντρου.
- **Κανονική μορφή**
  Σε μορφή πίνακα.

Παράδειγμα: Παιχνίδι Nim(2, 1) σε εκτεταμένη μορφή

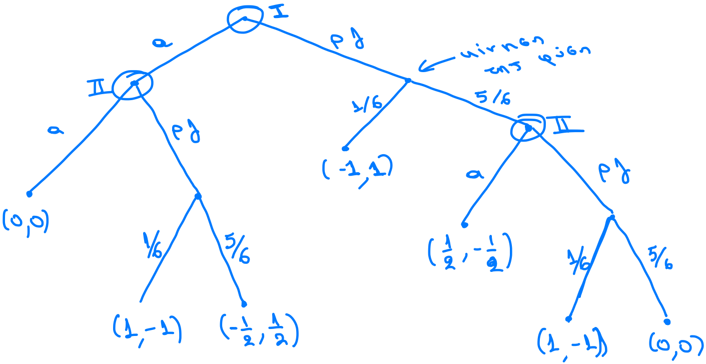


- Στις κορυφές γράφουμε τον παίκτη που παίζει
- Στις ακμές αναφέρουμε τη στρατηγική.
- Στις τερματικές κορυφές γράφουμε τις πληρωμές.

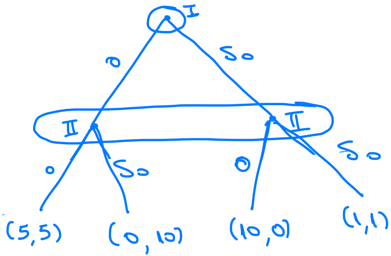
Παράδειγμα: Ρώσικη ρουλέτα σε εκτεταμένη μορφή

- Υπάρχουν 2 παίκτες: Ι και ΙΙ.
- Αρχικά βάζει ο καθένας 1 Ευρώ.
- Ο παίκτης Ι έχει 2 επιλογές.
  1η επιλογή: Βάζει άλλο ένα Ευρώ και περνάει στην επόμενη φάση.
  2η επιλογή: Ρίχνει ένα ζάρι. Αν το ζάρι φέρει 1, ο Ι χάνει και ο ΙΙ παίρνει τα χρήματα. Αν το ζάρι φέρει 2-6, ο Ι περνάει στην επόμενη φάση.
- Αν ο Ι περάσει, παίζει ο ΙΙ με τον ίδιο τρόπο.
- Αν περάσουν και οι δύο, το παιχνίδι τελειώνει και οι παίκτες μοιράζονται τα χρήματα.

Θέλουμε να διατυπώσουμε το παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή.


I
II
II
a
a
a
κίνηση της φύσης
1/6
5/6
1/6
5/6
1/6
5/6
(0,0)
(1,-1)
(-1/2,1/2)
(-1,1)
(1/2,-1/2)
(1,-1)
(0,0)

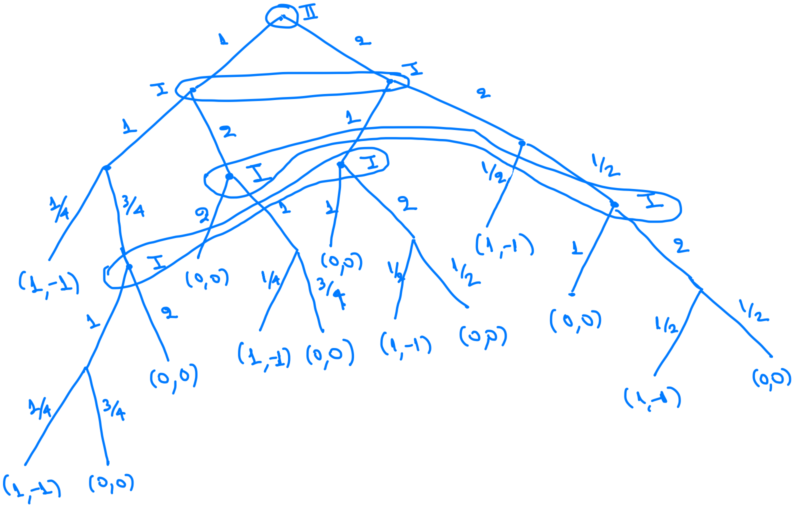
Παράδειγμα: Το δίλημμα του φυλακισμένου σε εκτεταμένη μορφή



Παράδειγμα: Παιχνίδι αναζήτησης σε εκτεταμένη μορφή

- Υπάρχουν 2 παίκτες: I και II.
  Παίκτης I: Αντιτορπιλικό.
  Παίκτης II: Υποβρύχιο.
- Αρχικά, ο II κρύβεται στη θέση 1 ή στη θέση 2.
- Ο I ψάχνει να βρει τον II εώς 2 φορές.
  Η πιθανότητα εντοπισμού στη θέση 1 είναι $\frac{1}{4}$.
  Η πιθανότητα εντοπισμού στη θέση 2 είναι $\frac{1}{2}$.
- Ο I έχει δυνατότητα να αλλάξει θέση πριν τη 2η αναζήτηση.
- Αν ο I βρει τον II, ο I κερδίζει μία μονάδα και ο II χάνει μία μονάδα.
  Αν ο I δεν εντοπίσει τον II, κερδίζουν και οι δύο 0 μονάδες.

Θέλουμε να διατυπώσουμε το παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή.


II
1
2
I
I
(1,-1)
(0,0)
1/4
3/4
1/2

Σύνολο πληροφόρησης: Σύνολο από κόμβους ενός παίκτη στους οποίους ο παίκτης έχει ακριβώς την ίδια πληροφορία.

⋆ Τα σύνολα πληροφόρησης τα αριθμούμε από πάνω προς τα κάτω και από αριστερά προς δεξιά.

Στρατηγικές

- Η **στρατηγική** ενός παίκτη δίνει την κίνηση του σε κάθε σύνολο πληροφόρησης.
- Άρα, κάθε στρατηγική ενός παίκτη θα είναι ένα διάνυσμα με τόσα στοιχεία όσο τα σύνολα πληροφόρησης.
- Η στρατηγική περιγράφει ακριβώς τι θα κάνει ένας παίκτης σε όλο το παιχνίδι.
- Το **σύνολο στρατηγικών** του παίκτη i συμβολίζεται με S_i.

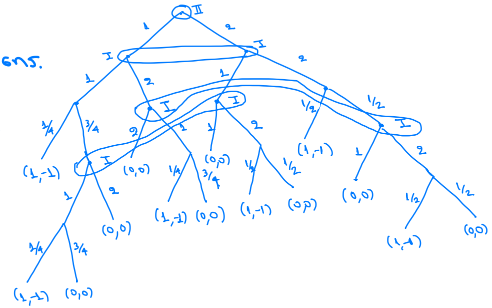
Παράδειγμα: Παιχνίδι αναζήτησης - Σύνολα στρατηγικών

Για τον Ι:

έχει 3 σύνολα πληροφόρησης.

Άρα κάθε στρατηγική θα είναι διάνυσμα με 3 στοιχεία.

$$S_I = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}$$



Για τον ΙΙ:

έχει ένα σύνολο πληροφόρησης.

Άρα κάθε στρατηγική θα έχει ένα στοιχείο.

$$S_{II} = \{(1),(2)\}$$