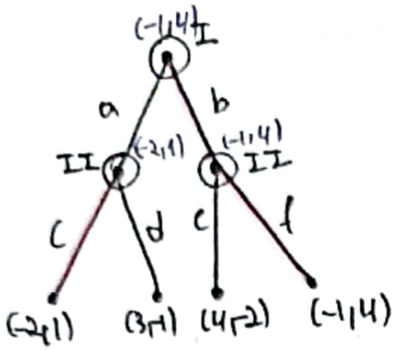
Μάθημα 10



Το λύσαμε με backward induction
Η λύση είναι: ((b), (c,f))
με πληρωμές (−1,4)

Το ((b),(c,f)) είναι και ΣΣΙ.

⇝ Subgame Perfect Equilibrium (SPE)

Ορισμός: (Subgame Perfect Equilibrium)

Θεωρούμε ένα πεπερασμένο παίγνιο 2 παικτών σε εκτεταμένη μορφή και (s_1, s_2) ένα προφίλ στρατηγικών.

Το (s_1, s_2) είναι subgame perfect equilibrium (SPE) αν τα προφίλ $(s_1(g), s_2(g))$ είναι ΣΣΙ στο υποπαίγνιο $\Gamma(g)$

Πρόταση: Σε ένα παίγνιο πλήρους πληροφόρησης, η λύση που παίρνουμε με backward induction είναι τα SPE ■

(*) ούτε με υποπαίγνια και μετά backward induction

Επαναλαμβανόμενα παιχνίδια

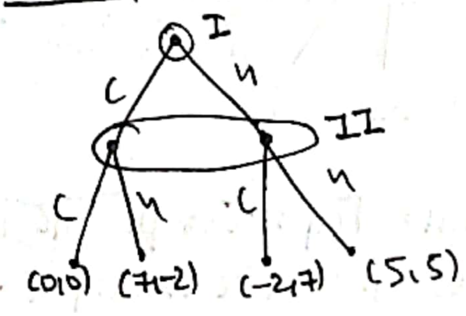
Παράδειγμα (Ένα στάδιο)

Παίγνιο 2 παικτών. Οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα

Κανονική μορφή

I \ II	c	η
c	(0^*, 0^*)	(7^*, −2)
η	(−2, 7^*)	(5,5)

Εκτεταμένη μορφή



→ Δεν λύνεται με backward ind. γιατί ΔΕΝ είναι πλήρους πληροφόρησης (*)

→ Με επίλυση με ΣΣΙ:
έχουμε ένα ΣΣΙ ((c),(c)) με πληρωμές (0,0).

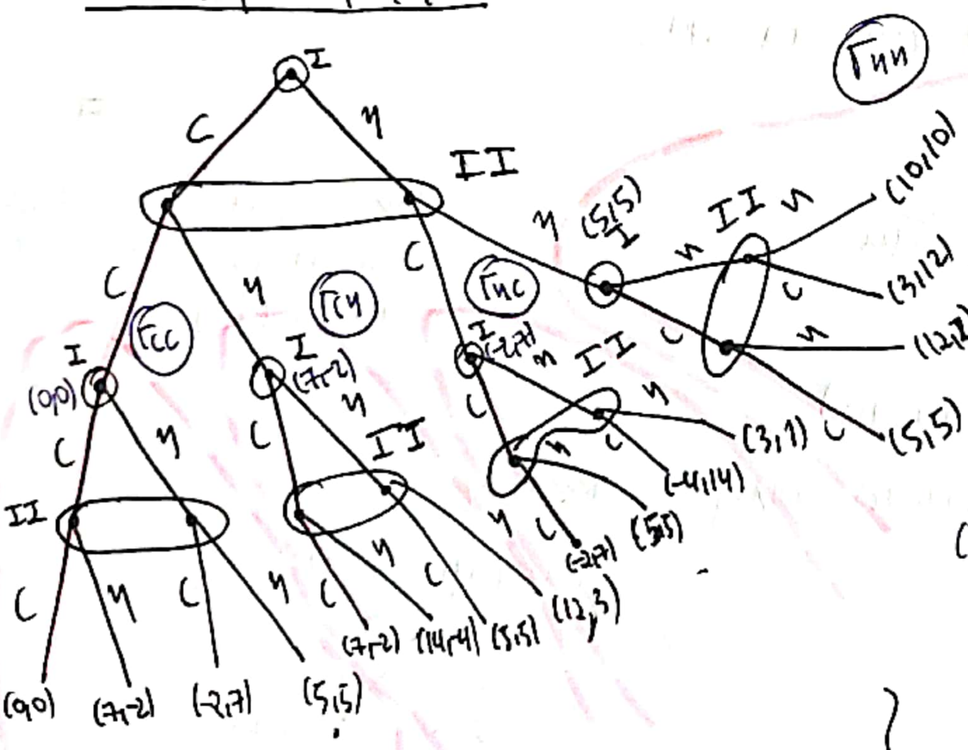
Παράδειγμα (2 στάδια)

Ένα παίγνιο 2 παικτών παίζεται 2 φορές ⟹ 2 στάδια
Στο 1^o στάδιο οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα (c) ή (n).
Οι πληρωμές είναι:

I \ II	c	n
c	(0,0)	(7,-2)
n	(-2,7)	(5,5)

→ Πριν το 2^o στάδιο αποκαλύπτεται τι έχουν παίξει στο 1^o.
Μετά ξαναεπιλέγουν (c) ή (n).
Οι πληρωμές δίνονται στο τέλος του παιχνιδιού.

Εκτεταμένη μορφή



(i) Υποπαίγνιο Γ_{cc}

I \ II	c	n
c	$(0^*,0^*)$	$(7^*,-2)$
n	$(-2,7^*)$	(5,5)

ΣΣΙ: (c,c) με πληρωμές (0,0)

(ii) Υποπαίγνιο Γ_{cn}

I \ II	c	n
c	$(7^*,-2^*)$	$(14^*,-4)$
n	$(5,5^*)$	(12,3)

ΣΣΙ: (c,c) με πληρωμές (7,-2)

↳ Το υποπαίγνιο Γ_{CH} είναι ίσο με το Γ_{CC} μόνο οι πληρωμές του κάθε παίκτη είναι αυξημένες κατά μια σταθερά
(7 για τον παίκτη I, −2 για τον παίκτη II)

Άρα, οι βέλτιστες αποκρίσεις θα είναι ίδιες ⟶ ίδιο ΣΣΙ

↳ Οι πληρωμές θα είναι αυξημένες κατά τις αντίστοιχες σταθερές
(Προκύπτει τελικά του ενός σταδίου)

Ορισμός (Επαναλαμβανόμενο παίγνιο)

Ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο ορίζεται από ένα παιχνίδι Γ το οποίο επαναλαμβάνεται T φορές $(t=1,2,\dots,T)$

- Αν $T<\infty$ έχουμε επαναλαμβανόμενο παίγνιο πεπερασμένων περιόδων
- Αν $T=\infty$ " " " άπειρων περιόδων

Πρόταση: Έστω ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο πεπερασμ. περιόδων (Γ, T).
Αν το Γ όταν παίζεται μια φορά έχει μοναδικό ΣΣΙ έστω $(s_1^*, s_2^*, \dots, s_N^*)$, τότε το (Γ, T) έχει μοναδικό SPE που είναι να παίζει ο παίκτης τη στρατηγική s_i^* σε κάθε μία από τις T περιόδους.

Ενότητα 6

Δυναμικά παίγνια

(Κεφάλαιο 18) (ΕΚΤΟΣ για εξετάσεις !)

Ορισμός (Δυναμικό παίγνιο)

Δυναμικό παίγνιο είναι ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο στο οποίο οι στρατηγικές ή/και οι πληρωμές μεταβάλλονται ανά περίοδο.

Πρόβλημα των κοινών - Δυναμική μορφή

Πρόβλημα πολλών περιόδων $t = T, T-1, \dots, 2, 1$
Το μέγεθος ενός πόρου μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με τις αποφάσεις των παικτών.

- Y_t = μέγεθος πόρου στην αρχή της περιόδου t

  $Y_t \geq 0$

- 2 παίκτες
- Στην αρχή της περιόδου t ο παίκτης i αποφασίζει το ποσοστό του πόρου που θα ζητήσει, θ_{it}, $\theta_{it} \in [0,1]$, $i = 1,2$, $t = T, T-1, \dots, 2, 1$
- δ = discount factor
- Η πληρωμή του i για την περίοδο t είναι:

$$\Pi_{1t}(\theta_{1t}, \theta_{2t}) = \begin{cases} \log(\theta_{1t} Y_t) & , \theta_{1t} Y_t + \theta_{2t} Y_t \leq Y_t \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \log x = -\infty & , \theta_{1t} Y_t + \theta_{2t} Y_t > Y_t \end{cases}$$

Αντίστοιχα για τον II.

• Αν η υπολειπόμενη ποσότητα στο τέλος της περιόδου t είναι $X_t = Y_t - \theta_{1t} Y_t - \theta_{2t} Y_t$, τότε η ποσότητα του πόρου στην αρχή της επόμενης περιόδου θα είναι: $Y_{t-1} = 10\sqrt{X_t}$

• Υποθέτουμε ότι κάθε παίκτης θέλει να μεγιστοποιήσει την πληρωμή του

• Να βρεθούν τα συμμετρικά ΣΣΙ σε αυτό το δυναμικό παίγνιο.

$\boxed{\text{Λύση}}$

Θα λύσουμε το παίγνιο αναδρομικά

<u>Μια περίοδο πριν την λήξη ($t=1$)</u>

Έστω ότι η διαθέσιμη ποσότητα είναι Y_t

Θα βρούμε τη βέλτιστη απάντηση του I στη στρατηγική θ_{21} του II ($BR_I(\theta_{21})$)

$$\Pi_I(\theta_{11}, \theta_{21}) = \begin{cases} \log(\theta_{11} \cdot Y_1) & , \theta_{11} + \theta_{21} \leq 1 \\ -\infty & , \theta_{11} + \theta_{21} > 1 \end{cases}$$

Θέλουμε $\max\limits_{\theta_{11}} \Pi_1(\theta_{11}, \theta_{21}) = \max\limits_{\substack{\theta_{11} \\ \theta_{11}+\theta_{21} \leq 1}} \log(\theta_{11} \cdot Y_1) = \max\limits_{\theta_{11} \in [0, 1-\theta_{21}]} \log(\theta_{11} Y_1) = \log((1-\theta_{21}) Y_1)$

και $BR_I(\theta_{21}) = 1 - \theta_{21}$

Αντίστοιχα, $BR_{II}(\theta_{11}) = 1 - \theta_{11}$

(θ_1^e, θ_1^e) συμμετρικό ΣΣΙ $\Leftrightarrow \theta_1^e \in BR_I(\theta_1^e) \Leftrightarrow \theta_1^e = 1 - \theta_1^e \Leftrightarrow$

equilibrium

$\Leftrightarrow 2\theta_1^e = 1 \Leftrightarrow \theta_1^e = \frac{1}{2}$

Άρα στην περίοδο $t=1$, $(\theta_1^e, \theta_1^e) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

και πληρωμή κάθε παίκτη $\Pi^1(Y_1) = \log\frac{Y_1}{2} = \log Y_1 - \log 2 =$

$= \log Y_1 + C(1)$ → σταθερό

<u>Δύο περίοδοι πριν τη λήξη $(t=2)$</u>

Έστω ότι η διαθέσιμη ποσότητα είναι Y_2 θα βρούμε τη βέλτιστη απάντηση του I στη στρατηγική θ_{22} του II $(BR_I(\theta_{22}))$

$$\Pi_I(\theta_{12}, \theta_{22}) = \begin{cases} \log(\theta_{12}Y_2) + \delta\log(10\sqrt{Y_2 - \theta_{12}Y_2 - \theta_{22}Y_2}) + \delta C(1), & \theta_{12}+\theta_{22} \leq 1 \\ -\infty, & \theta_{22}+\theta_{12} > 1 \end{cases}$$

$$\max_{\theta_{12}} \Pi_I(\theta_{12}, \theta_{22}) = \max_{\theta_{12}\in[0,1-\theta_{22}]} \underbrace{\left\{ \log(\theta_{12}Y_2) + \delta\log\left(10\sqrt{Y_2(1-\theta_{12}-\theta_{22})}\right) \right.}_{f(\theta_{12})} + \delta C(1)$$

$$= \max_{\theta_{12}\in[0,1-\theta_{22}]} \underbrace{\left\{ \log(\theta_{12}Y_2) + \delta + \frac{\delta}{2}\log(Y_2(1-\theta_{12}-\theta_{22})) + \delta C(1) \right\}}_{f(\theta_{12})}$$

$$f'(\theta_{12}) = \frac{\cancel{Y_2}}{\theta_{12}\cancel{Y_2}} - \frac{\delta}{2}\frac{\cancel{Y_2}}{\cancel{Y_2}(1-\theta_{12}-\theta_{22})} = \frac{1}{\theta_{12}} - \frac{\delta}{2}\frac{1}{1-\theta_{12}-\theta_{22}}$$

$$f''(\theta_{12}) = -\frac{1}{\theta_{12}^2} - \frac{\delta}{2}\frac{1}{(1-\theta_{12}-\theta_{22})^2} < 0 \Rightarrow f \text{ κοίλη}$$

$$f'(\theta_{12}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\theta_{12}} = \frac{\delta/2}{1-\theta_{12}-\theta_{22}} \Leftrightarrow$$

$$1 - \theta_{12} - \theta_{22} = \frac{\delta}{2}\theta_{12} \Leftrightarrow 1-\theta_{22} = \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\theta_{12} \Leftrightarrow$$

$$\theta_{12} = \frac{1-\theta_{22}}{1+\delta/2}$$

$$BR_I(\theta_{22}) = \frac{1-\theta_{22}}{1+\frac{\delta}{2}}$$

(θ_2^e, θ_2^e) συμμετρικό ΣΣΙ $\Leftrightarrow \theta_2^e \in BR_I(\theta_2^e) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \theta_2^{2} = \frac{1-\theta_2^e}{1+\frac{\delta}{2}} \Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\theta_2^e = 1-\theta_2^e \Leftrightarrow \left(2+\frac{\delta}{2}\right)\theta_2^e = 1 \Leftrightarrow$$

$$\theta_2^e = \frac{1}{2+\frac{\delta}{2}}$$

Οι πληρωμές θα είναι $\pi^2(Y_2) = \log\left(\frac{1}{2+\frac{\delta}{2}}\right) + \delta\pi^1\left(10\sqrt{Y_2 - 2\cdot\frac{1}{1+\ldots}}\right.$

$$= \log\left(\frac{1}{2+\frac{\delta}{2}}Y_2\right) + \delta\log\left(10\sqrt{\frac{\delta/2}{2+\delta/2}Y_2}\right) + \delta C(1)$$

$$= \log\left(\frac{1}{2+\delta/2}\right) + \log Y_2 + \delta + \frac{\delta}{2}\log\left(\frac{\delta/2}{2+\delta/2}\right) + \frac{\delta}{2}\log(Y_2) + \delta C(1)$$

$(1+\delta)\log(Y_2) + C(2)$

ΜΑΘΗΜΑ 11
29/03/2024

Ασκήσεις

1. Από περιγραφή παιχνιδιού βρίσκω εκτεταμένη μορφή
~ Διάλεξη 1 + 2 ~

επίλυση με backwards induction

- σύνολα στρατηγικών
- πληρωμές
- κανονική μορφή

2. Επίλυση με ΕΑΚΣ

$\boxed{\text{Άσκηση}}$: Να λυθεί με ΕΑΚΣ το παρακάτω παίγνιο

I \ II	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	(0,4)	(-2,2)	(-1,2)	(3,-1)
s_2	(1,1)	(-3,-2)	(2,2)	(-5,-2)
s_3	(-1,1)	(-3,2)	(-1,3)	(1,4)

Λύση

Για τον Ι: Η s_3 κυριαρχείται από την s_1.
Για τον ΙΙ: Η t_2 " " t_1
Η t_4 " " t_1

Για τον Ι: Η s_1 " " s_2
Για τον ΙΙ: Η t_1 " " t_3

Λύση με ΕΑΚΣ: (s_2, t_3) με πληρωμές $(2,2)$.

3 ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές (μέσω BR)
→ όταν έχω παίγνιο σε κανονική μορφή ~Διάλ. 4~

→ όταν το σύνολο στρατηγικών είναι συνεχές
(π.χ. Cournot, tragedy of commons) ~Διάλ. 4+5~

ΑΣΚΗΣΗ Θεωρούμε ένα παίγνιο σε κανονική μορφή

I \ II	t_1	t_2	t_3
s_1	(2,0)	(1,1)	(4,2)
s_2	(3,4)	(1,2)	(2,3)
s_3	(1,3)	(0,2)	(3,0)

(α) Να γίνει απλοποίηση με ΕΑΚΣ

(β) Να βρεθούν ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές στο απλοποιημένο παιχνίδι

<u>Λύση</u>

(α) Για τον I: Η s_3 κυριαρχείται από την s_1
Για τον II: Η t_2 " " t_3.

(β)

I \ II	t_1	t_3
s_1	(2,0)	$(\overset{*}{4},\overset{*}{2})$
s_2	$(\overset{*}{3},\overset{*}{4})$	(2,3)

Σε καθαρές στρατηγικές τα ΣΣΙ είναι:

(s_1,t_3) με πληρωμές $(4,2)$

(s_2,t_1) " $(3,4)$

4] ΣΣΙ σε μεικτές στρατηγικές (μέσω BR) ~Διάλεξη 6~

ΑΣΚΗΣΗ

Στο απλοποιημένο παίγνιο της προηγούμενης άσκησης να βρεθούν ΣΣΙ σε μεικτές στρατηγικές.

	I \ II	q t_1	$1-q$ t_2
p	s_1	$(2,0)$	$(4,2)$
$1-p$	s_2	$(3,4)$	$(2,3)$

Έστω $p=(p, 1-p)$, $p\in[0,1]$ μεικτή στρατηγική του I

$q=(q, 1-q)$, $q\in[0,1]$ " " " II

Θα βρούμε τη βέλτιστη απάντηση του I στη στρατ. $q=(q,1-q)$ του II $(BR_I(q))$.

Υπολογίζουμε τις πληρωμές:

$$h_I(s_1,q) = q\cdot 2 + (1-q)\cdot 4 = 2q - 4q + 4 = 4-2q$$

$$h_I(s_2,q) = q\cdot 3 + (1-q)\cdot 2 = q+2$$

• Αν $h_I(s_1,q) > h_I(s_2,q) \Leftrightarrow 4-2q > q+2$
$\Leftrightarrow 2 > 3q \Leftrightarrow q < \frac{2}{3}$,

τότε $BR_I(q) = \{s_1\} = \{(1,0)\}$

④

• αν $h_I(s_1,q) < h_I(s_2,q) \iff 4-2q < q+2 \iff q > \frac{2}{3}$

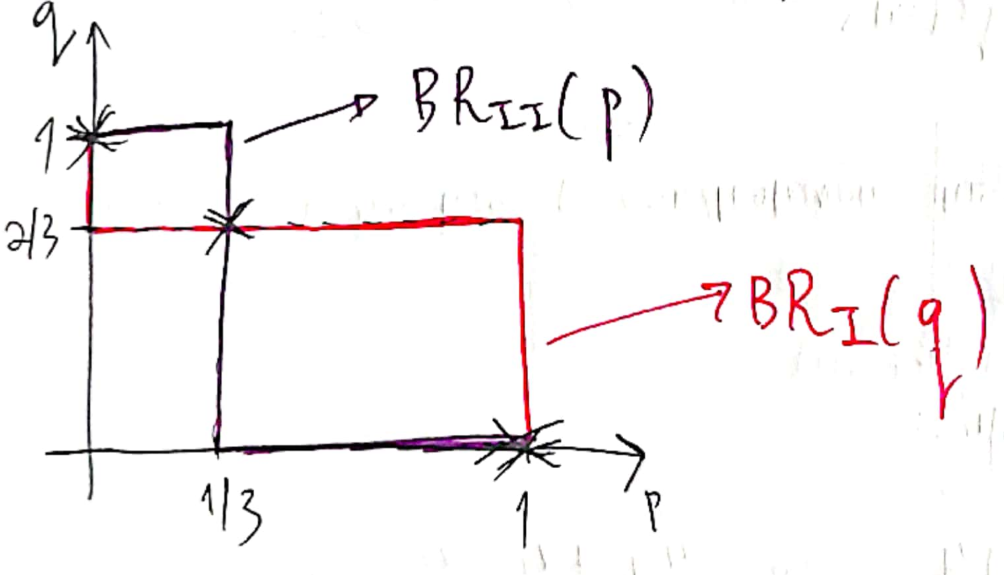
τότε $BR_I(q) = \{(s_2)\} = \{(0,1)\}$

• Αν $h_I(s_1,q) = h_I(s_2,q) \iff q = \frac{2}{3}$

τότε $BR_I(q) = \{(p, 1-p), p\in[0,1]\}$

Άρα:

$$BR_I(q) = \begin{cases} \{(1,0)\}, & \text{αν } q < \frac{2}{3} \\ \{(0,1)\}, & \text{αν } q > \frac{2}{3} \\ \{(p, 1-p)\}, & \text{αν } q = \frac{2}{3} \end{cases}$$



↳ Βρίσκουμε τη βέλτιστη απάντηση του $I\!I$ στη στρατηγική $p=(p, 1-p)$ του I ($BR_{II}(p)$).

Υπολογίζουμε τις πληρωμές:

$h_{II}(p, t_1) = p\cdot 0 + (1-p)\cdot 4 = 4-4p$

$h_{II}(p, t_3) = p\cdot 2 + (1-p)\cdot 3 = -p+3$

- Αν $h_{II}(p,t_1) > h_{II}(p, t_3) \Leftrightarrow 4-4p > -p+3$

$\Leftrightarrow p < \frac{1}{3}$

Τότε $BR_{II}(p) = \{(t_1)\} = \{(1,0)\}$

- Αν $h_{II}(p,t_1) < h_{II}(p,t_3) \Leftrightarrow 4-4p < -p+3$

$\Leftrightarrow p > \frac{1}{3}$

Τότε:

$BR_{II}(p) = \{(t_3)\} = \{(0,1)\}$

- Αν $h_{II}(p,t_1) = h_{II}(p,t_3) \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}$

Τότε $BR_{II}(p) = \{(q, 1-q) : q\in[0,1]\}$

$$BR_{II}(p) = \begin{cases} \{(1,0)\}, & p < \frac{1}{3} \\ \{(0,1)\}, & p > \frac{1}{3} \\ \{(q,1-q) : q\in[0,1]\}, & p = \frac{1}{3} \end{cases}$$ Βλ. διάγραμμα

Υπάρχουν 3 ΣΣΙ: $((0,1), (1,0))$ με πληρωμές $(3,4)$

$((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}))$ " · "

$*$ πίσω

(6)

$((1,0),(0,1))$ με πληρωμές $(4,2)$

(*)

I \ II		$\frac{2}{3}$ t_1	$\frac{1}{3}$ t_3
$\frac{1}{3}$	s_1	$(2,0)$	$(4,2)$
$\frac{2}{3}$	s_2	$(3,4)$	$(2,3)$

- $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 4+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2$
$=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}$

- $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 4+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3$
$=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}$

Άρα το 2° ΣΣΙ: $\left(\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right)$ με πληρωμές $\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right)$ ■

5] Συμμετρικό παιχνίδι: εύρεση συμμετρικών ΣΣΙ

~ Διάλεξη 7 ~

ΑΣΚΗΣΗ

2 φίλοι περπατούν δίπλα σε ένα ποτάμι και κάποιος φωνάζει ότι ένας σκύλος πνίγεται.

Ο καθένας αποφασίζει αν θα πέσει (Π) ή όχι (ΔΠ) χωρίς να γνωρίζει τι θα κάνει ο άλλος.

Η ωφέλεια αν σωθεί ο σκύλος είναι v

Το κόστος αν πέσει στο ποτάμι είναι c

$(v > c > 0)$

(α) Να διατυπωθεί σε κανονική μορφή. Είναι συμμετρικό;

(β) Να βρεθούν ΣΣΙ σε καθ. στρατ. Είναι συμμετρικό ΣΣΙ;

(γ) Να βρεθεί ένα συμμετρικό ΣΣΙ σε μικτές.

Λύση

(α)

		q	$1-q$
	I \ II	Π	δΠ
p	Π	$(r-c, r-c)$	$(r-c^{*}, r^{*})$
$1-p$	δΠ	$(r^{*}, r-c^{*})$	$(0,0)$

$$A=\begin{bmatrix} r-c & r-c \\ r & 0 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} r-c & r \\ r-c & 0 \end{bmatrix}$$

Είναι συμμετρικό παίγνιο γιατί

- $S_I = S_{II}$
- Ο πίνακας πληρωμών είναι ανάστροφος του πιν. πληρ. του ΙΙ. $A=B'$.

(β) Έχουμε 2 ΣΣΙ σε καθαρές.

((Π),(δΠ)) με πληρωμές $(r-c, r)$
((δΠ),(Π)) με πληρωμές $(r, r-c)$

Δεν είναι συμμετρικά ΣΣΙ.

(γ) Έστω λοιπόν $p=(p, 1-p)$, $p\in[0,1]$ οι μικτές στρ. του Ι

και $q=(q,1-q)$, $q\in[0,1]$ οι μικτές στρ. του ΙΙ.

$$h_I(\Pi, q)= q\cdot(r-c)+(1-q)\cdot(r-c)=r-c$$
$$h_I(\delta\Pi, q) = q\cdot r + (1-q)\cdot 0 = q\cdot r$$

Επειδή θέλω ένα συμμετρικό ΣΣΙ σε μικτές θα έχω $h_I(\pi, q) = h_I(\sigma\pi, q) \iff v - c = q \cdot v$

$$\iff q = \frac{v-c}{v}$$

Άρα $q = \left(\frac{v-c}{v}, 1 - \frac{v-c}{v}\right) = \left(\frac{v-c}{v}, \frac{c}{v}\right)$

Επειδή θέλω συμμετρικό ΣΣΙ σε μικτές

$p^* = q^* = \left(\frac{v-c}{v}, \frac{c}{v}\right)$. Άρα, ΣΣΙ:

$$\left(\left(\frac{v-c}{v}, \frac{c}{v}\right), \left(\frac{v-c}{v}, \frac{c}{v}\right)\right)$$

6] Παίγνια μηδενικού αθροίσματος ~Διαλέξεις 8, 9~

- ↳ άνω, κάτω τιμή
- ↳ ΣΣΙ σε καθαρές
- ↳ ΣΣΙ σε μικτές

ΑΣΚΗΣΗ Θεωρούμε το παρακάτω παίγνιο μηδ. αθροίσματος

I \ II	t_1	t_2	t_3
s_1	0	−1	2
s_2	2	−3	4
s_3	−2	3	2

(i) Να απλοποιηθούν οι κυριαρχούμενες

(ii) Στο απλοποιημένο, να βρεθούν ΣΣΙ σε καθαρές, αν υπάρχουν

(iii) " " " σε μικτές.

Ο απλοποιημένος πίνακας:

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & q & 1-q & \\
\mathrm{I} \backslash \mathrm{II} & t_1 & t_2 & \\
\hline
s_1 & 0 & -1 & -1 \\
s_2 & 2 & -3 & -3 \\
s_3 & -2 & 3 & -2 \\
\hline
 & 2 & 3 &
\end{array}
$$

$$\boxed{-1 = r_1 = \max_i \min_j a_{ij}}$$

$$\boxed{2 = r_2 = \min_j \max_i a_{ij}}$$

(ii) $\nexists$ ΣΣΙ σε καθαρές αφού $r_1 < r_2$.

(iii) έχω πίνακα 3×2.

Έστω $p = (p_1, p_2, p_3)$ με $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ η μικτή του Ι και $q = (q, 1-q)$ η μικτή του ΙΙ.

Ξεκινάω με την $r_2 = \min_q \max_p h_I(p, q) =$

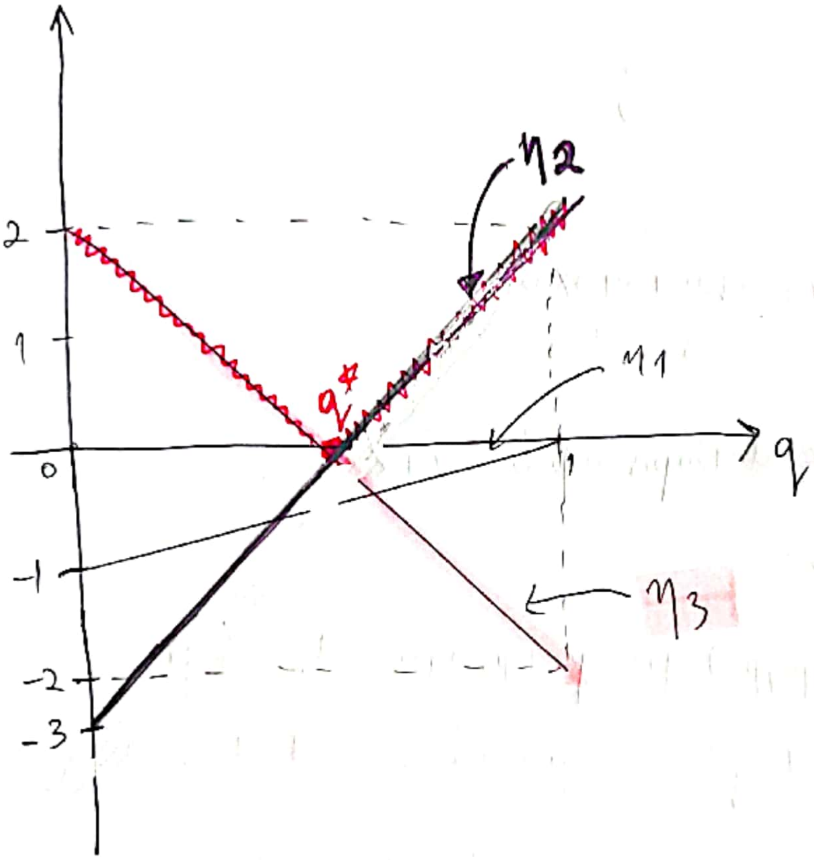
$$= \min_q \max_p h_I(p, q) =$$

$$= \min_q \max \{ h_I(s_1, q), h_I(s_2, q), h_I(s_3, q) \} =$$

$$= \min_q \max \{ q \cdot 0 + (1-q) \cdot (-1), \; q \cdot 2 + (1-q) \cdot (-3), \; q \cdot (-2) + (1-q) \cdot 3 \} =$$

$$= \min_{q} \max \{ q-1, 5q-3, -5q+3 \}$$

↳ Σχεδιάζουμε τα ευθύγραμμα τμήματα:



Βρίσκω το q^* από την τομή των ευθ. τμημάτων η_2, η_3:

$$5q-3 = -5q+3$$
$$\iff 10q = 6$$
$$\iff q^* = \frac{3}{5}$$

Για το w_2: $w_2 = 5 \cdot \frac{3}{5} - 3 = 0$

Άρα, $w_2 = 0 = w_1$.

και η minmax στρατ. του II είναι $q^* = (q^*, 1-q^*)$

$$= \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

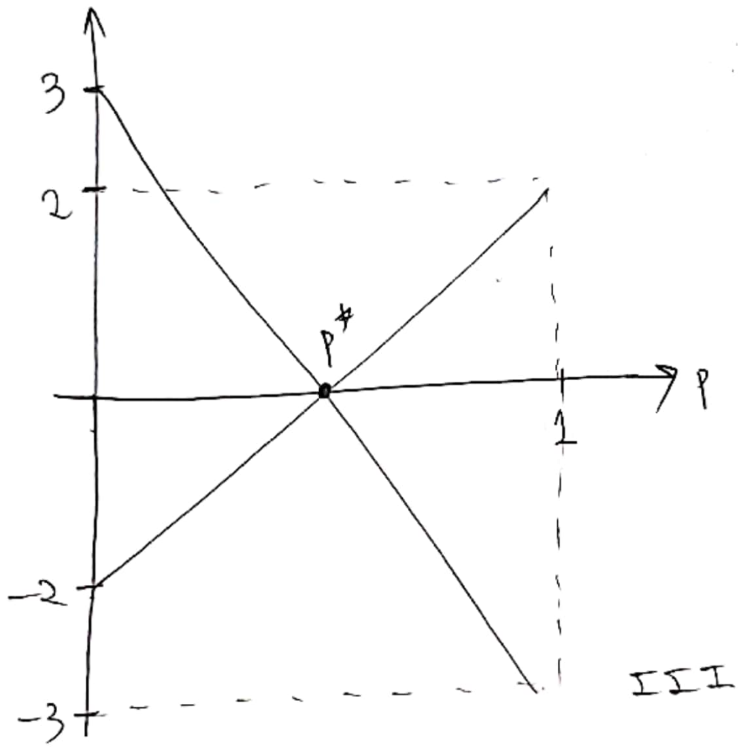
Έχουμε: (p^*, q^*) ΣΣΙ $\iff p^* \in BR_I(q^*) \iff p^* \in BR_I\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$

Οπότε: η βέλτιστη απάντηση θα είναι $p^* = (0, p, 1-p)$

$$w_1 = \max_p \min_q h_I(p,q) = \max_p \min \{ h_I(p,t_1) \,,\, h_I(p,t_2) \} =$$

$$= \max_p \min \{ p\cdot 2 + (1-p)\cdot(-2) \,,\, p\cdot(-3) + (1-p)\cdot 3 \}$$

$$= \max_p \min \{ \overbrace{4p-2}^{\varepsilon_1} \,,\, \overbrace{-6p+3}^{\varepsilon_2} \}$$



Βρίσκω το p^* από την τομή των ε_1 και ε_2.

οπότε: $4p-2 = 3-6p$

$\Leftrightarrow 10p = 5$

$\Leftrightarrow p^* = \frac{1}{2}$

Άρα η maxmin στρατηγική είναι η:

$p^* = (0, p^*, 1-p^*) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

ΙΙΙ σε μικτές:

$((0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{5}, \frac{2}{5}))$ με πληρωμές $(0,0)$

~ ΤΕΛΟΣ ~