Διάλεξη 8

4.3. Παίγνια μηδενικού αθροίσματος

A : πίνακας πληρωμών του I
(ο πίνακας πληρωμών του II θα είναι ο −A)

I \ II	a_2	b_2 (minmax)	
maxmin a_1	4	2	2*
b_1	1	3	1
	4	3*	

$2 = v_1$

$v_2 = 3$

Ορισμός

Η maxmin πληρωμή είναι η καλύτερη από τις χειρότερες πληρωμές. Ισούται με

$$v_1 = \max_i \min_j A_{ij}$$

και ονομάζεται κάτω τιμή του παιχνιδιού.

$$v_1 = \underbrace{\max_{i} \underbrace{\min_{j} A_{ij}}_{\text{min κάθε γραμμής}}}_{\text{max από αυτά τα στοιχεία}}$$

i → στρατ. I

j → στρατ. του II

A_{ij} → στοιχεία του A = πληρ. του I

Η στρατηγική που εξασφαλίζει την v_1 ονομάζεται maxmin στρατηγική.

$$v_2 = \min \max A_{ij} = \min(-\min(-A_{ij})) = -\max \min(-A_{ij})$$

$$\min A_{ij} = -\max(-A_{ij})$$

$$\max A_{ij} = -\min(-A_{ij})$$

Ορισμός

Η minmax πληρωμή είναι η χειρότερη από τις καλύτερες πληρωμές του Ι, άρα και η αντίθετη της καλύτερης από τις χειρότερες πληρωμές του ΙΙ, Ι ισούται με

$$v_2 = \min_j \max_i A_{ij}$$ και καλείται

άνω τιμή του παιχνιδιού.

$$v_2 = \underbrace{\min_{j} \underbrace{\max_{i} A_{ij}}_{\text{max κάθε στήλης}}}_{\text{min των στοιχείων που βρήκαμε}}$$

A_{ij} → πληρ. του Ι

j: στρατ. του ΙΙ

i → στρατ. του Ι

Η στρατηγική που εξασφαλίζει την άνω τιμή ονομάζεται minmax στρατηγική.

Παράδειγμα

Ι\ΙΙ	t_1 (minmax)	t_2	
maxmin → s_1	2	3	2^*
s_2	1	-1	-1
	2^*	3	

$2 = v_1$

$2 = v_2$

$$v_1 = \max_i \min_j A_{ij} = 2$$

$$v_2 = \min_j \max_i A_{ij} = 2$$

$$v_1 = v_2 = 2$$

Ι\ΙΙ	t_1	t_2
s_1	$(2^*, -2^*)$	$(3^*, -3)$
s_2	$(1, -1)$	$(-1, 1^*)$

ΣΣΙ : (s_1, t_1)

πληρωμές $(2, -2)$

Παράδειγμα

I \ II	t_1	t_2	
s_1	5	−2	-2^*
s_2	−3	4	−3
	5	4^*	

maxmin → s_1, t_2 → minmax

$v_1 = -2$

$v_2 = 4$

I \ II	t_1	t_2
s_1	$(5^*, -5)$	$(-2, 2^*)$
s_2	$(-3, 3^*)$	$(4^*, -4)$

Δεν υπάρχει ΣΣΙ.

$$v_1 = \max_i \min_j A_{ij}$$

$$v_2 = \min_j \max_i A_{ij}$$

$$v_1 < v_2$$

Θεώρημα

Για κάθε πεπερασμένο παίγνιο μηδενικού αθροίσματος 2 παικτών ισχύουν τα παρακάτω:

(i) $v_1 \leq v_2$

(ii) Υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές αν $v_1 = v_2$ και αυτό αντιστοιχεί στις maxmin και minmax στρατηγικές.

(iii). Αν τα προφίλ στρατηγικών (s, t) και (s', t') είναι ΣΣΙ, τότε και τα (s, t') και (s', t) είναι ΣΣΙ.

(iv) Όλα τα ΣΣΙ έχουν ίσες πληρωμές.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το παρακάτω παίγνιο μηδενικού αθροίσματος 2 παικτών

			minmax		
I \ II	L	C	R		
maxmin → U	5	8	4	4*	
M	-7	9	0	-7	4 = v_1
D	9	1	-2	-2	
	9	9	4*		

4 = v_2

$v_1 = v_2 = 4 \Rightarrow \exists$ ΣΣΙ, το (U, R) με πληρωμές (4, -4)

Σε μεικτές στρατηγικές

Ίδιο σκεπτικό: Conservative approach.

Θεωρούμε ότι κάθε παίκτης έχει 2 στρατηγικές.

Τότε οι μεικτές στρατηγικές του I είναι $\underline{p} = (p, 1-p)$, $p \in [0,1]$. Αντίστοιχα, οι μεικτές στρατηγικές του II είναι $\underline{q} = (q, 1-q)$, $q \in [0,1]$.

Ορίζουμε,

κάτω τιμή σε μεικτές: $W_1 = \max\limits_{\underbrace{p}_{\text{στρατ. του I}}} \min\limits_{\underbrace{q}_{\text{στρατ. του II}}} \overbrace{h_I(p,q)}^{\text{αναμ. πληρ. του I}}$

άνω τιμή σε μεικτές : $w_2 = \min_{q} \max_{p} h_I(p,q)$

q: στρατ. II $\quad$ p: στρ. του I $\quad$ $h_I(p,q)$: αναμ. πληρ. του I

Παράδειγμα

I \ II	t_1	t_2	
s_1	4	2	2^*
s_2	1	3	1
	4	3^*	

$2 = v_1$

$v_2 = 3$

$v_1 < v_2 \Rightarrow \nexists$ ΣΣΙ σε καθαρές

Θα ψάξω σε μεικτές.
Θα υπολογίσω τα w_1, w_2

$w_1 = \max_{p} \min_{q} h_I(p,q)$

Πρώτα θέλω να υπολογίσω το $\min_{q} h_I(p,q)$

	I \ II	t_1 (q)	t_2 ($1-q$)
p	s_1	4	2
$1-p$	s_2	1	3

! Όμως $h_I(p,q) = q h_I(p,t_1) + (1-q) h_I(p,t_2)$
δηλαδή το $h_I(p,q)$ είναι κυρτός συνδυασμός των $h_I(p,t_1)$ και $h_I(p,t_2)$. Άρα παίρνει τιμές ανάμεσα στα $h_I(p,t_1)$ και $h_I(p,t_2)$.

Οπότε

$$\min_{q} h_I(p,q) = \min\{h_I(p,t_1), h_I(p,t_2)\}$$

Οπότε θέλουμε το

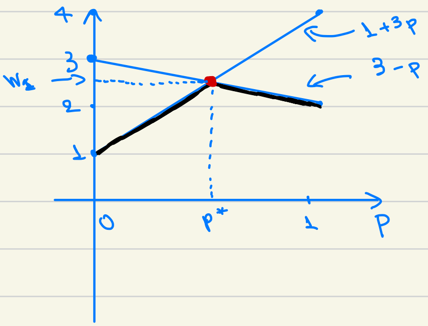
$$w_2 = \max_p \min_q h_I(p,q) = \max_p \min\{h_I(p,t_1), h_I(p,t_2)\}$$

$$= \max_p \min\{p\cdot 4 + (1-p)\cdot 1,\ p\cdot 2 + (1-p)\cdot 3\}$$

$$= \max_p \min\{1+3p,\ 3-p\}$$

	I \ II	t_1	t_2
p	s_1	4	2
$1-p$	s_2	1	3

- Σχεδιάζω τα ευθύγραμμα τμήματα που δίνουν τις πληρωμές
- Σχεδιάζω τη γραμμή που δίνει το ελάχιστο
- Βρίσκω το max πάνω στη γραμμή.
- Βρίσκω την w_1



Το p^* βρίσκεται στην τομή των $1+3p$, $3-p$

$1+3p = 3-p \iff$

$4p = 2 \iff p = \frac{1}{2}$

Άρα $p^* = \frac{1}{2}$

$w_1 = 1 + 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Η maxmin στρατηγική του I είναι η $(p^*, 1-p^*) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Τώρα θα υπολογίσουμε το w_2

	q	$1-q$
I \ II	t_1	t_2
s_1	4	2
s_2	1	3

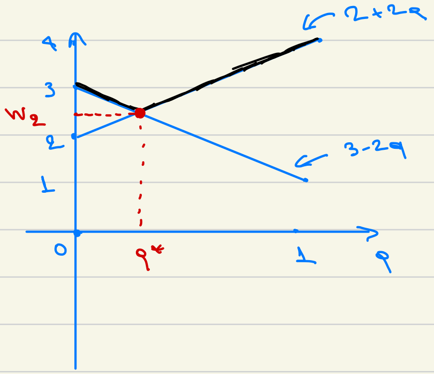
$$w_2 = \min_q \max_p h_I(p,q) =$$

$$\min_q \max\{h_I(s_1,q), h_I(s_2,q)\}$$

$$\min_q \max\{q\cdot 4 + (1-q)\cdot 2,\ q\cdot 1 + (1-q)\cdot 3\}$$

$$= \min_{q} \max\{2+2q\,,\, 3-2q\}$$

- Σχεδιάζω τα ευθύγραμμα τμήματα που αντιστοιχούν στις πληρωμές.
- Σχεδιάζω τη γραμμή που δίνει το maximum των ευθύγραμμων τμημάτων
- Βρίσκω το min πάνω σε αυτή τη γραμμή.
- Βρίσκω την w_2.



Βρίσκω το q^* από την τομή των ευθ. τμημ.

$$2+2q = 3-2q \iff$$
$$4q = 1 \iff$$
$$q = \frac{1}{4}$$

Άρα, $q^* = \frac{1}{4}$

και $w_2 = 2 + 2\frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

Η minmax στρατηγική του II είναι η $(q^*, 1-q^*) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

Παρατηρούμε ότι $w_1 = w_2$.

Το ΣΣΙ σε μεικτές είναι το

$$((p^*, 1-p^*), (q^*, 1-q^*)) = \Big(\underbrace{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})}_{\text{maxmin στρ.}}, \underbrace{(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4})}_{\text{min max στρατ.}}\Big)$$

Θεώρημα

Για κάθε πεπερασμένο παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με 2 παίκτες ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $w_1 = w_2$: τιμή παιγνίου σε μεικτές

(ii) Το προφίλ $(\underline{p}, \underline{q})$ που πετυχαίνει την τιμή του παιχνιδιού είναι ΣΣΙ.

(iii) Αν $(\underline{p}, \underline{q})$ και $(\underline{p}', \underline{q}')$ είναι ΣΣΙ, τότε και $(\underline{p}', \underline{q})$, $(\underline{p}, \underline{q}')$ είναι ΣΣΙ.

(iv) Όλα τα ΣΣΙ δίνουν τις ίδιες πληρωμές.

Παράδειγμα (πίνακες $2 \times n$, $n > 2$)

Θεωρούμε το παίγνιο μηδενικού αθροίσματος

I \ II	t_1	t_2 minmax	t_3	t_4 minmax	
maxmin → s_1	6	5	3	5	3^*
s_2	1	2	6	4	1
	6	5^*	6	5^*	

$3 = v_1$

$v_2 = 5$

$v_1 < v_2 \Rightarrow \nexists$ ΣΣΙ σε καθαρές.

Θα βρούμε ΣΣΙ σε μεικτές.

Ξεκινάμε από την w_1.

Οι μεικτές στρατηγικές του Ι, είναι $\underline{p} = (p, 1-p)$

» » » του ΙΙ, είναι $\underline{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$

με $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$

$$w_1 = \max_{p} \min_{\underline{q}} h_I(p, \underline{q})$$

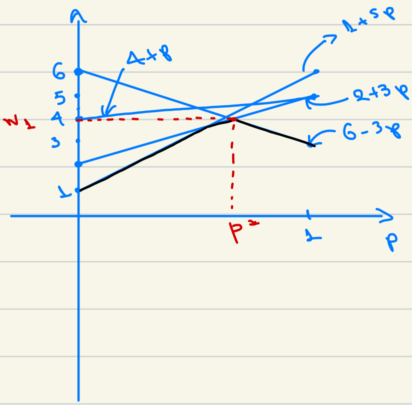
$$= \max_{p} \min \{ h_I(p, t_1), h_I(p, t_2), h_I(p, t_3), h_I(p, t_4) \}$$

I \ II		t_1	t_2	t_3	t_4
p	s_1	6	5	3	5
$1-p$	s_2	1	2	6	4

$$= \max_p \min\{p6+(1-p)\cdot 1,\ p\cdot 5+(1-p)\cdot 2,\ p3+(1-p)\cdot 6,\ p\cdot 5+(1-p)\cdot 4\}$$

$$= \max_p \min\{1+5p,\ 2+3p,\ 6-3p,\ 4+p\}$$

- Σχεδιάζω τα ευθύγραμμα τμήματα που αντιστοιχούν στις πληρωμές
- Σχεδιάζω τη γραμμή που δίνει το min
- Βρίσκω το max πάνω σε αυτή τη γραμμή.
- Βρίσκω την w_1 και την maxmin στρατηγική.



Βρίσκω το p^* από την τομή των $6-3p$ και $2+3p$

$6-3p = 2+3p \iff 4=6p \iff$
$p = \frac{2}{3}$

$p^* = \frac{2}{3}$

maxmin στρατηγική:
$(p^*, 1-p^*) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$w_1 = 6 - 3\cdot\frac{2}{3} = 4$

Θέλουμε να βρούμε την w_2 και την minmax στρατηγική του II.

Γνωρίζουμε ότι $w_2 = w_1 = 4$.

Αν (p^*, q^*) ΣΣΙ $\iff q^* \in BR_{II}(p^*)$

Από το γράφημα βλέπουμε ότι ο II θα αναμίξει μόνο την t_2 και την t_3 άρα $q = (0, q, 1-q, 0)$

συνεχίζεται...