Διάλεξη 7

Παράδειγμα

Δυο οδηγοί κοντράρονται για τον έλεγχο του δρόμου.

$S_I = S_{II} = \{t, c\}$ $\quad t = \text{tough}$

$c = \text{concede}$.

I \ II	t_2	c_2
t_1	(a, a)	$(d^*, 0^*)$
c_1	$(0^*, d^*)$	(b, b)

με a, b, d : $d > b > 0 > a$

2 ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές:

(c_1, t_2) και (t_1, c_2)

Ελέγχουμε αν έχει ΣΣΙ σε μεικτές.

Θα βρούμε τη βέλτιστη απάντηση του I στη στρατηγική του II $\quad q = (q, 1-q)$

Οι αναμενόμενες πληρωμές του παίκτη I είναι:

	q	$1-q$
I \ II	t_2	c_2
t_1	(a, a)	$(d^*, 0^*)$
c_1	$(0^*, d^*)$	(b, b)

$$h_I(t_1, q) = q \cdot a + (1-q) d$$

$$h_I(c_1, q) = q \cdot 0 + (1-q) b = (1-q) b$$

- Αν $h_I(t_1, q) > h_I(c_1, q) \iff q \cdot a + (1-q) d > (1-q) b \iff$
  $d - b > q(d - b - a) \iff q < \dfrac{d-b}{d-b-a}$,

  τότε $BR_I(q) = \{(t_1)\} = \{(1, 0)\}$
- Αν $h_I(t_1, q) < h_I(c_1, q) \iff q > \dfrac{d-b}{d-b-a}$,

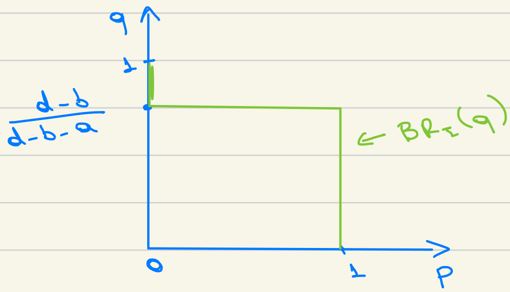
  τότε

  $BR_I(q) = \{(c_1)\} = \{(0, 1)\}$

· Αν $h_I(t_1, q) = h_I(c_1, q) \iff q = \dfrac{d-b}{d-b-a}$,

τότε $BR_I(q) = \{(p, 1-p),\ p \in [0,1]\}$

Άρα $BR_I(q) = \begin{cases} (1,0), & q < \dfrac{d-b}{d-b-a} \\ (0,1), & q > \dfrac{d-b}{d-b-a} \\ (p,1-p),\ p\in[0,1], & q = \dfrac{d-b}{d-b-a} \end{cases}$



Θα βρούμε τη βέλτιστη απάντηση του II στη στρατηγική του I $p = (p, 1-p)$

Οι αναμενόμενες πληρωμές του II είναι:

		I \ II	t_2	c_2
p	t_1		(a,a)	$(d,0)$
$1-p$	c_1		$(0,d)$	(b,b)

$h_{II}(p, t_2) = pa + (1-p)d$

$h_{II}(p, c_2) = p \cdot 0 + (1-p)\cdot b = (1-p)b$

· Αν $h_{II}(p, t_2) > h_{II}(p, c_2) \iff pa + (1-p)d > (1-p)b \iff d-b > p(d-b-a) \iff p < \dfrac{d-b}{d-b-a}$,

τότε $BR_{II}(p) = \{(t_2)\} = \{(1,0)\}$.

· Αν $h_{II}(p, t_2) < h_{II}(p, c_2) \iff p < \dfrac{d-b}{d-b-a}$, τότε

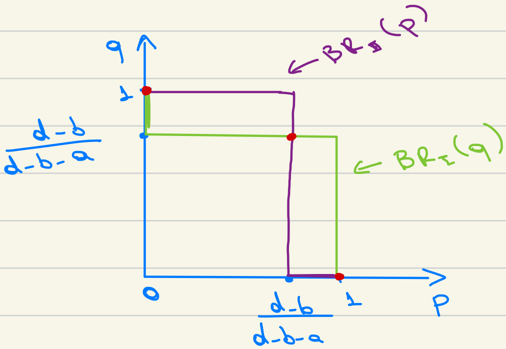
$BR_{II}(p) = \{(c_2)\} = \{(0,1)\}$

· Αν $h_{II}(p,t_2) = h_{II}(p,c_2) \iff p = \dfrac{d-b}{d-b-a}$, τότε

$BR_{II}(p) = \{(q,1-q), q \in [0,1]\}$

Άρα,

$$BR_{II}(p) = \begin{cases} \{(1,0)\}, & \text{αν } p < \dfrac{d-b}{d-b-a} \\ \{(0,1)\}, & \text{αν } p > \dfrac{d-b}{d-b-a} \\ \{(q,1-q), q\in[0,1]\}, & \text{αν } p = \dfrac{d-b}{d-b-a} \end{cases}$$



Υπάρχουν 3 ΣΣΙ

$(p_1,q_1) = \big((\underset{p}{0}, \underset{1-p}{1}), (\underset{q}{1}, \underset{1-q}{0})\big)$

$(p_2,q_2) = \left(\left(\dfrac{d-b}{d-b-a}, \underbrace{1-\dfrac{d-b}{d-b-a}}_{\frac{-a}{d-b-a}}\right), \left(\dfrac{d-b}{d-b-a}, \underbrace{1-\dfrac{d-b}{d-b-a}}_{\frac{-a}{d-b-a}}\right)\right)$

$(p_3,q_3) = \big((1,0),(0,1)\big)$

Οι πληρωμές των παικτών κάτω από τα ΣΣΙ:

		1	0
	I \ II	t_2	c_2
0	t_1	(a,a)	$(d^*,0^*)$
1	c_1	$(0^*,d^*)$	(b,b)

Κάτω από το (p_1,q_1):

$h_I(p_1,q_1) = h_I((0,1),(1,0)) = 0$

$h_{II}(p_1,q_1) = d$

Κάτω από το (p_2,q_2):

		$\frac{d-b}{d-b-a}$	$\frac{-a}{d-b-a}$
	I \ II	t_2	c_2
$\frac{d-b}{d-b-a}$	t_1	(a,a)	$(d^*,0^*)$
$\frac{-a}{d-b-a}$	c_1	$(0^*,d^*)$	(b,b)

$$h_I(p_2,q_2) = \left(\frac{d-b}{d-b-a}\right)^2 a + \frac{d-b}{d-b-a}\,\frac{-a}{d-b-a}\cdot d + 0 + \left(\frac{-a}{d-b-a}\right)^2 \cdot b = \dots = \frac{-a\cdot b}{d-b-a}$$

Για τον II: $h_{II}(p_2,q_2) = \dfrac{-a\cdot b}{d-b-a}$

κάτω από το (p_3, q_3)

$h_I(p_3, q_3) = d$

$h_{II}(p_3, q_3) = 0$

		0	1
	I \ II	t_2	c_2
1	t_1	(a,a)	$(d^*,0^*)$
0	c_1	$(0^*,d^*)$	(b,b)

4.2. Συμμετρικά παιχνίδια

Κεφάλαιο 9

Ορισμός

Ένα <u>παίγνιο 2 παικτών</u> είναι <u>συμμετρικό</u> αν

(i) το σύνολο στρατηγικών για κάθε παίκτη είναι ίδιο

(ii) οι παίκτες έχουν ίδια πληρωμή κάτω από τις ίδιες στρατηγικές, δηλαδή

$$h_I(t,s) = h_{II}(s,t).$$

(Αυτό συμβαίνει αν ο πίνακας πληρωμών του I είναι ανάστροφος του πίνακα πληρωμών του II)

Ορισμός

Ένα <u>ΣΣΙ</u> καλείται <u>συμμετρικό</u> όταν κάθε παίκτης έχει την ίδια στρατηγική

Παράδειγμα (Φυσικό μονοπώλιο)

Έχουμε μία αγορά στην οποία μπορεί να επιβιώσει μία μόνο εταιρεία.

Αν σε αυτή την αγορά ξεκινήσουν 2 εταιρείες, πότε θα αποχωρήσει μία από αυτές;

- 2 εταιρείες με τα ίδια χαρακτηριστικά.
- Χρονικός ορίζοντας 2 έτη.
- Απώλειες: c € / έτος αν παράγουν και οι 2.
- Κέρδη: n € / έτος αν η εταιρεία είναι μόνη της
  $n > c$

Απόφαση για κάθε εταιρεία: σε ποιο έτος θα αποχωρήσει; 0 ή 1 ή 2;
Σκοπός: Μεγιστοποίηση συνολικού κέρδους.

<u>Λύση</u>

Περιγραφή παιχνιδιού σε κανονική μορφή
Παίκτες: I, II
$S_I = \{0, 1, 2\}$
$S_{II} = \{0, 1, 2\}$

I \ II	0	1	2
0	$(0,0)$	$(0,n)$	$(0^*, 2n^*)$
1	$(n,0)$	$(-c,-c)$	$(-c, n-c^*)$
2	$(2n^*, 0^*)$	$(n-c^*, -c)$	$(-2c,-2c)$

Είναι συμμετρικό?
- $S_I = S_{II}$ ✓
- πίνακας πληρωμών του I: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ n & -c & -c \\ 2n & n-c & -2c \end{bmatrix}$

πίνακας πληρωμών του II: $\begin{bmatrix} 0 & n & 2n \\ 0 & -c & n-c \\ 0 & -c & -2c \end{bmatrix}$

Είναι ανάστροφοι ✓

Το παιχνίδι είναι <u>συμμετρικό</u>.

έχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές;

έχουμε 2 ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές.

όχι συμμετρικό ΣΣΙ $\to ((0),(2))$ με πληρ. $(0, 2\pi)$

$\to ((2),(0))$ » » $(2\pi, 0)$

<u>Θα ψάξουμε συμμετρικό ΣΣΙ σε μικτές στρατηγικές</u>

Θα βρούμε τη βέλτιστη απάντηση του Ι στη στρατηγική του ΙΙ $\underline{q} = (q_1, q_2, 1-q_1-q_2)$.

Οι αναμενόμενες πληρωμές θα είναι:

	q_1	q_2	$1-q_1-q_2$
Ι \ ΙΙ	0	1	2
0	$(0,0)$	$(0,\pi)$	$(0^*, 2\pi^*)$
1	$(\pi, 0)$	$(-c,-c)$	$(-c, \pi-c^*)$
2	$(2\pi^*, 0^*)$	$(\pi-c^*, -c)$	$(-2c,-2c)$

$$h_I(0,\underline{q}) = q_1 \cdot 0 + q_2 \cdot 0 + (1-q_1-q_2)\cdot 0 = 0$$

$$h_I(1,\underline{q}) = q_1 \cdot \pi + q_2(-c) + (1-q_1-q_2)(-c) = q_1\pi + (-c)(1-q_1) = q_1(\pi+c) - c$$

$$h_I(2,\underline{q}) = q_1 \cdot 2\pi + q_2\cdot(\pi - c) + (1-q_1-q_2)\cdot(-2c) = q_1(2\pi+2c) + q_2(\pi+c) - 2c$$

Για να είναι βέλτιστη απάντηση οποιαδήποτε μικτή στρατηγική, πρέπει

$$h_I(0,\underline{q}) = h_I(1,\underline{q}) = h_I(2,\underline{q}) \iff$$

$$\begin{cases} h_I(0,\underline{q}) = h_I(1,\underline{q}) \\ h_I(0,\underline{q}) = h_I(2,\underline{q}) \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = q_1(\pi+c) - c \\ 0 = q_1(2\pi+2c) + q_2(\pi+c) - 2c \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{c}{\pi+c} \\ 0 = \dfrac{c}{\cancel{\pi+c}} 2(\cancel{\pi+c}) + q_2(\pi+c) - 2c \end{cases} \iff \begin{cases} q_1 = \dfrac{c}{\pi+c} \\ q_2 = 0 \end{cases}$$

Άρα, ο ΙΙ θα πρέπει να ακολουθήσει τη

$$\underline{q} = \left(\frac{c}{\pi+c}, 0, \frac{\pi}{\pi+c}\right)$$

ώστε η βέλτιστη απάντηση του I να είναι οποιαδήποτε μεικτή στρατηγική.

Επειδή το παιχνίδι είναι συμμετρικό, αν ο I ακολουθήσει τη στρατηγική $p = \left(\frac{c}{n+c}, 0, \frac{n}{n+c}\right)$, οποιαδήποτε μεικτή στρατηγική του II θα είναι βέλτιστη απάντηση.

Άρα το $(p, q) = \left(\left(\frac{c}{n+c}, 0, \frac{n}{n+c}\right), \left(\frac{c}{n+c}, 0, \frac{n}{n+c}\right)\right)$ είναι συμμετρικό ΣΣΙ.

4.3. Παίγνια μηδενικού αθροίσματος

Κεφάλαιο 10

Ορισμός

Ένα παίγνιο 2 παικτών ονομάζεται μηδενικού αθροίσματος αν οι πληρωμές των 2 παικτών σε κάθε προφίλ στρατηγικών αθροίζουν στο 0.

Παράδειγμα

I\II	A	B
a	(4, -4)	(2, -2)
b	(1, -1)	(3, -3)

Δε χρειάζεται να δίνουμε τις πληρωμές και των 2 παικτών. Αρκούν οι πληρωμές του I

Οπότε θα έχουμε

I\II	A	B	min	max
a	4	2	2*	2
b	1	3	1	
max	4	3		
min	3			

Πώς επιλέγουν οι παίκτες στρατηγική;

Συντηρητικά: Conservative approach.

Ο I σκέφτεται: Ότι και να διαλέξω εγώ, ο II θα επιλέξει τη στρατηγική που μεγιστοποιεί τη δική του ωφέλεια, άρα ελαχιστοποιεί τη δική μου.

Αν διαλέξω a, θα διαλέξει B και αυτό μου δίνει 2.

Αν διαλέξω b, " " A " " 1

Κάτω από αυτό το σκεπτικό, θα επιλέξει στρατηγική που του δίνει τη μεγαλύτερη ωφέλεια, δηλαδή την a.

Ορισμός

Η maximin πληρωμή είναι η καλύτερη από τις χειρότερες πληρωμές. Ισούται με

$$v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

Αυτή είναι η κάτω τιμή του παιχνιδιού.