

Στρατηγικές και Παίγνια

Διάλεξη 2

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

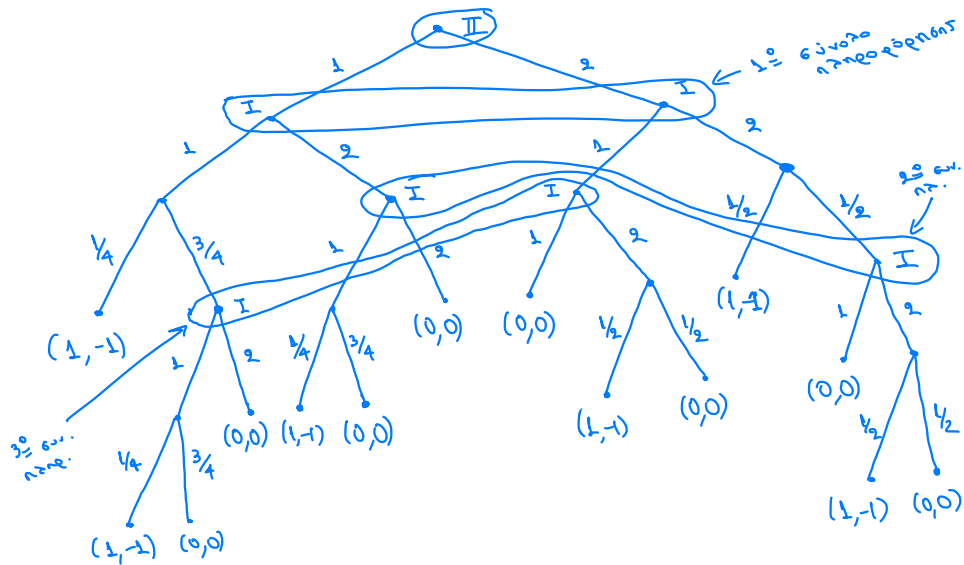
1.2. Μαθηματική διατύπωση παιγνίων

Συνέχεια...

Παράδειγμα: Παιχνίδι αναζήτησης σε εκτεταμένη μορφή

- Υπάρχουν 2 παίκτες: I και II.
Παίκτης I: Αντιτορπιλικό.
Παίκτης II: Υποβρύχιο.
- Αρχικά, ο II κρύβεται στη θέση 1 ή στη θέση 2.
- Ο I ψάχνει να βρει τον II έως 2 φορές.
Η πιθανότητα εντοπισμού στη θέση 1 είναι $\frac{1}{4}$.
Η πιθανότητα εντοπισμού στη θέση 2 είναι $\frac{1}{2}$.
- Ο I έχει δυνατότητα να αλλάξει θέση πριν τη 2η αναζήτηση.
- Αν ο I βρει τον II, ο I κερδίζει μία μονάδα και ο II χάνει μία μονάδα.
Αν ο I δεν εντοπίσει τον II, κερδίζουν και οι δύο 0 μονάδες.

Θέλουμε να διατυπώσουμε το παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή.



Σύνολο πληροφόρησης: Σύνολο από κόμβους ενός παίκτη στους οποίους ο παίκτης έχει ακριβώς την ίδια πληροφορία.

* Τα σύνολα πληροφόρησης τα αριθμούμε από πάνω προς τα κάτω και από αριστερά προς δεξιά.

$0 \quad \Sigma, \omega \quad \Sigma^0$ σύνολο πληροφόρησης, δε γνωρίζει τίποτα.

$\Sigma \omega \quad \Sigma^1$ σύνολο πληροφόρησης, γνωρίζει ότι έλαξε στη θέση 2 και δε βρήκε το υποβίχιο.

$\Sigma \omega \quad \Sigma^2$ σύνολο πληροφόρησης, γνωρίζει ότι έλαξε στη θέση 1 και δε βρήκε το υποβίχιο.

- Η **στρατηγική** ενός παίκτη δίνει την κίνηση του σε κάθε σύνολο πληροφόρησης.
- Άρα, κάθε στρατηγική ενός παίκτη θα είναι ένα διάνυσμα με τόσα στοιχεία όσο τα σύνολα πληροφόρησης.
- Η στρατηγική περιγράφει ακριβώς τι θα κάνει ένας παίκτης σε όλο το παιχνίδι.
- Το **σύνολο στρατηγικών** του παίκτη i συμβολίζεται με S_i .

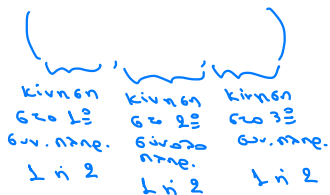
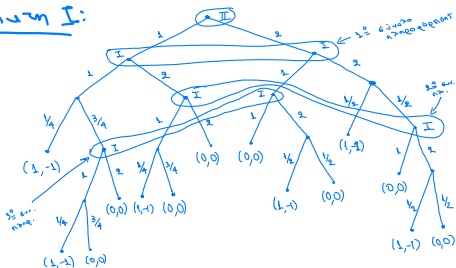
Παράδειγμα: Παιχνίδι αναζήτησης - Σύνολα στρατηγικών

Σύνολο στρατηγικών του παίκτη I:

S_I :

Ο παίκτης I έχει 3 σύνολα πληροφορίας.

Κάθε στρατηγική θα είναι διάνυσμα με 3 στοιχεία.



$$|S_I| = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$S_I = \{ (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2) \}$$

Παράδειγμα: Παιχνίδι αναζήτησης - Σύνολα στρατηγικών

Σύνολο στρατηγικών του παίκτη II

S_{II}

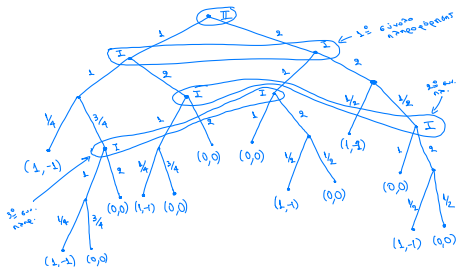
Ο παίκτης II έχει 1 σύνολο πληροφορίας.

Άρα, κάθε στρατηγική του θα είναι δ-άννημα με 1 βήγισιο.

()
 κίνηση
 του II
 στο 1^ο
 δίν. π.π.
 1 ή 2

$$|S_{II}| = 2$$

$$S_{II} = \{(1), (2)\}$$



Παιχνίδι σε κανονική μορφή

Το **παιχνίδι σε κανονική μορφή** δίνει πληροφορίες για

- Το σύνολο των παικτών.
- Το σύνολο στρατηγικών κάθε παίκτη.
- Τις πληρωμές των παικτών αν ακολουθήσουν οποιεσδήποτε στρατηγικές.

Όλα αυτά παρουσιάζονται σε μορφή πίνακα.

Παράδειγμα: Παιχνίδι Nim(2, 1) - Κανονική μορφή

Παίχτες: I και II

Στρατηγίες

Σύνολο στρατηγιών παίκτη I:

S_I

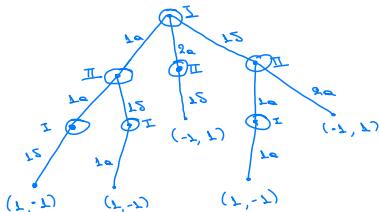
Ο I έχει 4 σύνολα πληροφόρησης.

Κάθε στρατηγία θα έχει διάγραμμα με 4 στοιχεία

$\{1a, 1b, 1c, 1d\}$	$\{2a, 2b, 2c, 2d\}$	$\{3a, 3b, 3c, 3d\}$	$\{4a, 4b, 4c, 4d\}$
κίνηση στο 1 ^ο σω. πλ.	κίνηση στο 2 ^ο σω. πλ.	κίνηση στο 3 ^ο σω. πλ.	κίνηση στο 4 ^ο σω. πλ.
1a ή 2a ή 1b	1b	1a	1a

$$|S_I| = 3 \times 1 \times 1 \times 1 = 3$$

$$S_I = \{ (1a, 1b, 1a, 1a), (2a, 1b, 1a, 1a), (1b, 1b, 1a, 1a) \}$$

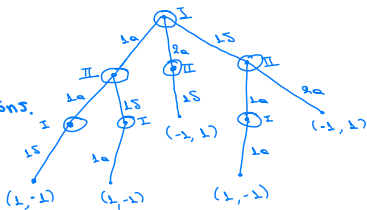


Σύνολο στρατηγιών του II:

S_{II}

Ο II έχει 3 σύνολα παραγωγής.

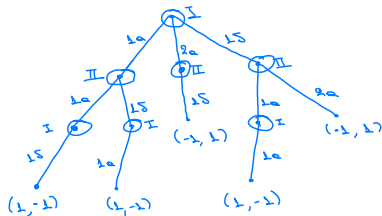
Κάθε στρατηγία του θα έχει 3 στοιχεία



()		
κίνηση στο 1 ^ο βν. πλ.	κίνηση στο 2 ^ο βν. πλ.	κίνηση στο 3 ^ο βν. πλ.
1a ή 1S	1S	1a ή 2a

$$|S_{II}| = 2 \times 1 \times 2 = 4$$

$$S_{II} = \{ (1a, 1S, 1a), (1a, 1S, 2a), (1S, 1S, 1a), (1S, 1S, 2a) \}$$



Κανονική μορφή παιχνιδιού:

I \ II	(1a, 1b, 1a)	(1a, 1b, 2a)	(1b, 1b, 1a)	(1b, 1b, 2a)
(1a, 1b, 1a, 1a)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)	(1, -1)
(1a, 1b, 1a, 1b)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)	(-1, 1)
(1b, 1b, 1a, 1a)	(1, -1)	(-1, 1)	(1, -1)	(-1, 1)

Παράδειγμα: Το δίλημμα του φυλακισμένου - Κανονική μορφή

Παίχτες: I και II

Σύνολα στρατηγιών

S_I : Ο I έχει 1 σύνολο πηρ.

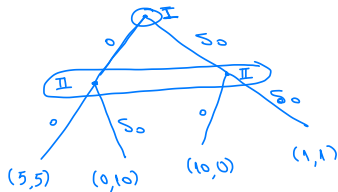
Άρα, κάθε στρατηγική θα έχει 1 βιοχρ.

$$S_I = \{(0), (50)\}$$

S_{II} : Ο II έχει 1 σύνολο πηρ.

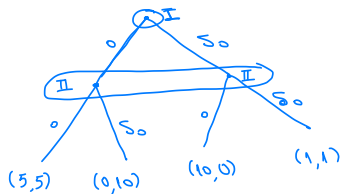
Άρα, κάθε στρατηγική θα έχει 1 βιοχρ.

$$S_{II} = \{(0), (50)\}$$



Κανονική Μορφή

I \ II	(0)	(80)
(0)	(5,5)	(0,10)
(80)	(10,0)	(1,1)



Παράδειγμα: Ρώσικη ρουλέτα - Κανονική μορφή

Παικτες : I και II

Σύνολα στρατηγιών

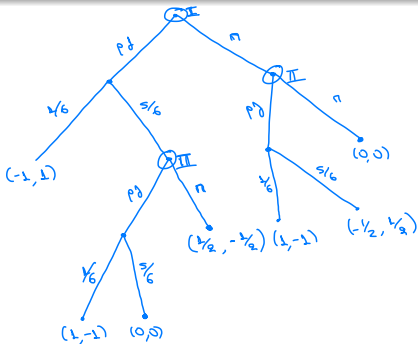
S_I

Ο I έχει 1 σύνολο πηρ.

Άρα, κάθε στρατηγική θα έχει 1 στοιχείο.

()
 κινηθεί στο
 S_I συν. πηρ.
 του I
 $pδ$ ή π

$$S_I = \{ (p\delta), (\pi) \}$$



S_{II} :

Ο ΙΙ έχει 2 βινολα παρε.

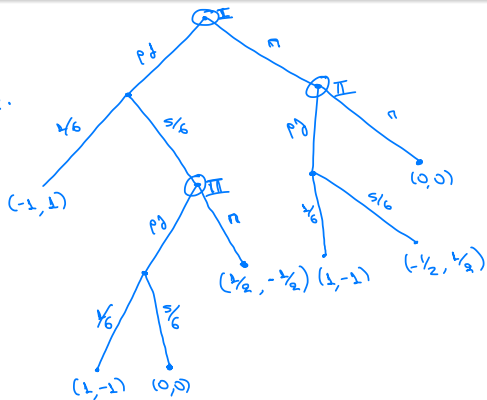
Άρα, η στρατηγική του ΙΙ
έχει 2 βινολα παρε.

(
κινηση
στο 1 =
βινολα παρε.
ΡΔ ή Ν

)
κινηση
στο 2 =
βινολα παρε.
ΡΔ ή Ν

$$|S_{II}| = 2 \times 2 = 4$$

$$S_{II} = \{ (ρΔ, ρΔ), (ρΔ, Ν), (Ν, ρΔ), (Ν, Ν) \}$$



Κενονική μορφή

I / II	(p, p)	(p, n)	(n, p)	(n, n)
(p)	$(-\frac{1}{36}, \frac{1}{36})$	$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$	$(-\frac{1}{36}, \frac{1}{36})$	$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$
(n)	$(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	$(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	(0,0)	(0,0)

$$\begin{aligned} (p) \text{ vs } (p, p) &: \frac{1}{6}(-1,1) + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}(1,-1) + \\ & \quad \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}(0,0) = \\ &= \frac{1}{6}(-1,1) + \frac{5}{36}(1,-1) + \frac{25}{36}(0,0) = \\ &= (-\frac{1}{36}, \frac{1}{36}) \end{aligned}$$

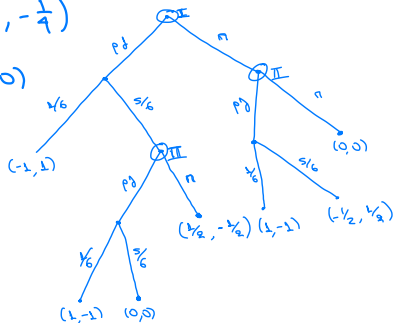
$$(p) \text{ vs } (p, n) : \frac{1}{6}(-1,1) + \frac{5}{6}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$$

$$(p) \text{ vs } (n, p) : (-\frac{1}{36}, \frac{1}{36})$$

$$(p) \text{ vs } (n, n) : (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$$

$$(n) \text{ vs } (n, p) : (0,0)$$

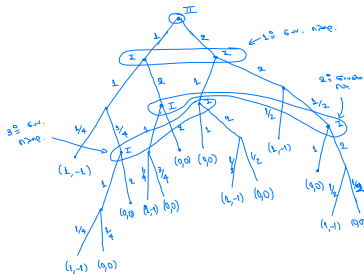
$$(n) \text{ vs } (n, n) : (0,0)$$



Παράδειγμα: Παιχνίδι αναζήτησης - Κανονική μορφή

Έχουμε 2 παίκτες - I & II

I \ II	(1)	(2)
(1,1,1)	$(\frac{7}{16}, -\frac{7}{16})$	(0,0)
(1,1,2)	$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
(1,2,1)	$(\frac{7}{16}, -\frac{7}{16})$	(0,0)
(1,2,2)	$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
(2,1,1)	$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
(2,1,2)	$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
(2,2,1)	(0,0)	$(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$
(2,2,2)	(0,0)	$(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$



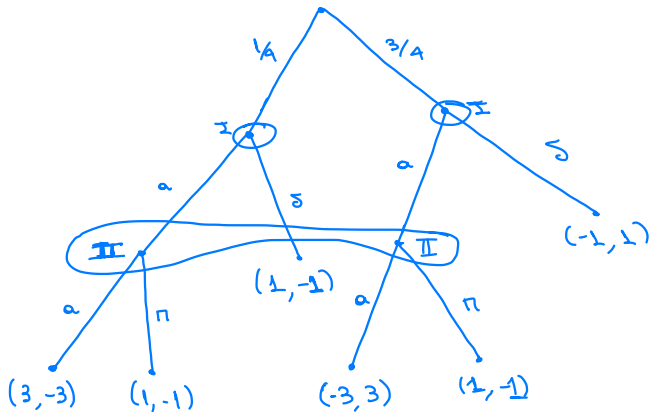
Επανάληψη... ..

Παράδειγμα: Στοιχειώδες πόκερ

- Υπάρχουν 2 παίκτες: I και II.
- Αρχικά, οι παίκτες ποντάρουν από 1 Ευρώ.
- Ο I τραβάει ένα φύλλο από συνήθη τράπουλα, το βλέπει και αποφασίζει αν θα ανεβάσει το ποντάρισμα κατά 2 Ευρώ ή θα δείξει το φύλλο του.
- Αν ο I δείξει το φύλλο του
 - και το φύλλο είναι κούπα, παίρνει ο I όλα τα χρήματα.
 - και το φύλλο δεν είναι κούπα, παίρνει όλα τα χρήματα ο II.
- Αν ο I ανεβάσει το ποντάρισμα, έχει σειρά ο II που αποφασίζει αν θα ανεβάσει το ποντάρισμα κατά 2 Ευρώ ή θα πάει πάσο.
- Αν ο II ανεβάσει το ποντάρισμα, ο I θα δείξει το φύλλο του και
 - αν το φύλλο είναι κούπα, παίρνει ο I όλα τα χρήματα.
 - αν το φύλλο δεν είναι κούπα, παίρνει όλα τα χρήματα ο II.
- Αν ο II πάει πάσο, τα χρήματα παίρνει ο I.

Να διατυπώσει το παιχνίδι σε εκτεταμένη και κανονική μορφή.

Ευτεταμένη Μορφή:



Παιζες : I και II

Σύνολα στρατηγικών

S_I : Ο I έχει 2 σύνολα πηξε.

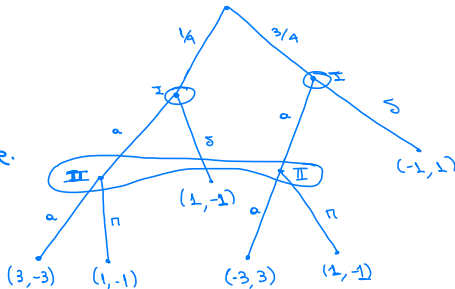
Η στρατηγική του θα έχει
2 σπώχμα

$$S_I = \{(a, a), (a, \delta), (\delta, a), (\delta, \delta)\}$$

S_{II} : Ο II έχει 1 σύνολο πληροφορίας.

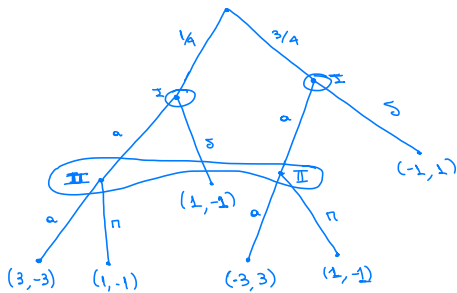
Η στρατηγική του θα είναι διένυμα με 1 σπαγείο.

$$S_{II} = \{(a), (n)\}$$



Κανονική μορφή

I/II	(e)	(π)
(e,e)	$(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	$(1, -1)$
(e,δ)	$(0, 0)$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
(δ,e)	$(-2, 2)$	$(1, -1)$
(e,ε)	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



$$(e,e) \text{ vs } (e) : \frac{1}{4}(3,-3) + \frac{3}{4}(-3,3) = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$$

$$(e,e) \text{ vs } (\pi) : \frac{1}{4}(1,-1) + \frac{3}{4}(1,-1) = (1, -1)$$

$$(e,\delta) \text{ vs } (e) : \frac{1}{4}(3,-3) + \frac{3}{4}(-1,1) = (0, 0)$$

$$(e,\delta) \text{ vs } (\pi) : \frac{1}{4}(1,-1) + \frac{3}{4}(-1,1) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$