Άσκηση 1

		q	$1-q$
	I \ II	t_1	t_2
p	s_1	$(3^*, 2^*)$	$(0, 1)$
$1-p$	s_2	$(1, 1)$	$(2^*, 3^*)$

i) ΣΣΙ σε καθαρές;

ii) ΣΣΙ σε μεικτές;

(i) Υπάρχουν 2 ΣΣΙ: (s_1, t_1) και (s_2, t_2)

(ii) Για να βρούμε ΣΣΙ σε μεικτές, χρειαζόμαστε τις βέλτιστες αποκρίσεις

Έστω $\underline{p} = (p, 1-p)$ η μεικτή του I και

$\underline{q} = (q, 1-q)$ η μεικτή του II

Βρίσκουμε την $BR_I(q)$:

$$h_I(s_1, q) = q3 + (1-q)0 = 3q$$

$$h_I(s_2, q) = q1 + (1-q)2 = 2-q$$

- Αν $h_I(s_1,q) > h_I(s_2,q) \Leftrightarrow 3q > 2-q \Leftrightarrow q > \frac{1}{2}$,

  τότε $BR_I(q) = \{s_1\} = \{\underbrace{(1,0)}_{\text{σαν μεικτή}}\}$

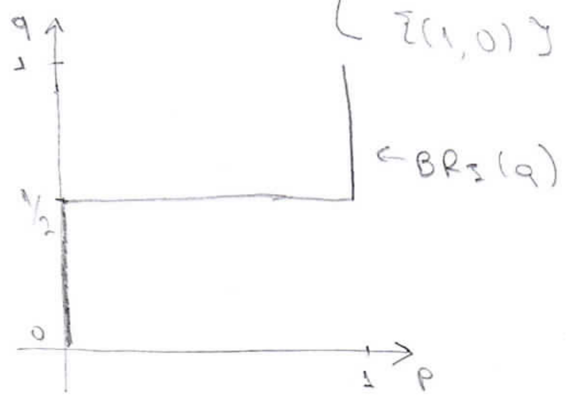
- Αν $h_I(s_1,q) < h_I(s_2,q) \Leftrightarrow 3q < 2-q \Leftrightarrow q < \frac{1}{2}$,

  τότε $BR_I(q) = \{s_2\} = \{(0,1)\}$

- Αν $h_I(s_1,q) = h_I(s_2,q) \Leftrightarrow 3q = 2-q \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$,

  τότε $BR_I(q) = \{(p, 1-p), p \in [0,1]\}$

Άρα
$$BR_I(q) = \begin{cases} \{(0,1)\}, & q < \frac{1}{2} \\ \{(p,1-p),\ p \in [0,1]\}, & q = \frac{1}{2} \\ \{(1,0)\}, & q > \frac{1}{2} \end{cases}$$



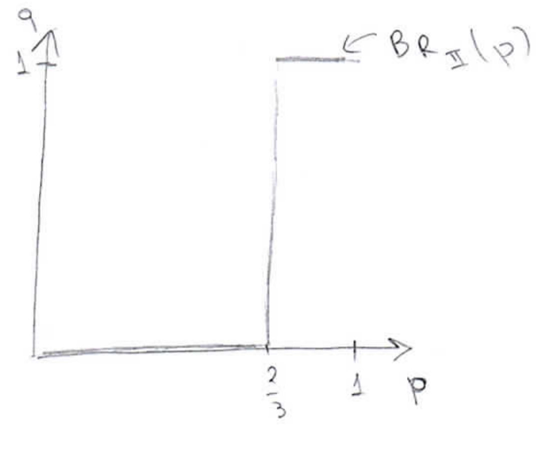
Βρίσκουμε την $BR_{II}(p)$:

$h_{II}(p, t_1) = p\,2 + (1-p)1 = 1+p$

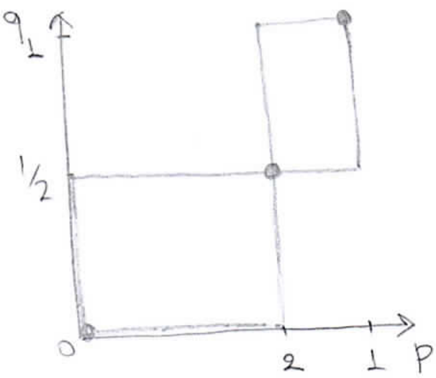
$h_{II}(p, t_2) = p\,1 + (1-p)3 = 3-2p$

- Αν $h_{II}(p,t_1) > h_{II}(p,t_2) \Leftrightarrow 1+p > 3-2p \Leftrightarrow p > \frac{2}{3}$, τότε $BR_{II}(p) = \{t_1\} = \{(1,0)\}$
- Αν $h_{II}(p,t_1) < h_{II}(p,t_2) \Leftrightarrow 1+p < 3-2p \Leftrightarrow p < \frac{2}{3}$, τότε $BR_{II}(p) = \{t_2\} = \{(0,1)\}$
- Αν $h_{II}(p,t_1) = h_{II}(p,t_2) \Leftrightarrow 1+p = 3-2p \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}$ τότε $BR_{II}(p) = \{(q, 1-q),\ q \in [0,1]\}$

Άρα $BR_{II}(p) = \begin{cases} \{(0,1)\}, & p < \frac{2}{3} \\ \{(q,1-q),\ q\in[0,1]\}, & p = \frac{2}{3} \\ \{(1,0)\}, & p > \frac{2}{3} \end{cases}$



Τελικά,



Υπάρχουν 3 ΣΣΣ:

$(p_1^*, q_1^*) = ((0,1),(0,1))$

$(p_2^*, q_2^*) = ((\frac{2}{3},\frac{1}{3}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$

$(p_3^*, q_3^*) = ((1,0),(1,0))$

Ασκηση 2

$I \backslash II$	t_1 (q_1)	t_2 (q_2)	t_3 ($1-q_1-q_2$)
s_1	$(2^*, 2^*)$	$(1, 0)$	$(0, 1)$
s_2	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(2^*, 2^*)$
s_3	$(1, 0)$	$(2^*, 2^*)$	$(0, 0)$

(i) Γιατί το παιχνίδι είναι συμμετρικό;
(ii) ΣΣΙ σε καθαρές; Είναι όλα συμμετρικά;
(iii) Να βρεθεί συμμετρικό ΣΣΙ σε μεικτές.

(i) Είναι συμμετρικό γιατί $|S_I| = |S_{II}| = 3$ και ο πίνακας πληρωμών του II είναι ανάστροφος από τον πίνακα πληρωμών του I.

(ii) Έχουμε 3 ΣΣΙ σε καθαρές:

(s_1, t_1), (s_2, t_3), (s_3, t_2)

Συμμετρικό — όχι συμμετρικά.

(iii) Έστω ότι ο II ακολουθεί την $(q_1, q_2, 1-q_1-q_2) = q$. Θέλουμε τη βέλτιστη απάντηση του I στην q.

$$h_I(s_1, q) = 2q_1 + 1q_2 + 0(1-q_1-q_2) = 2q_1 + q_2$$

$$h_I(s_2, q) = 0q_1 + 1q_2 + 2(1-q_1-q_2) = 2 - 2q_1 - q_2$$

$$h_I(s_3, q) = 1q_1 + 2q_2 + 0(1-q_1-q_2) = q_1 + 2q_2$$

Για να υπάρχει μεικτή του I που να είναι βέλτιστη απάντηση στην q θα πρέπει

$$h_I(s_1, q) = h_I(s_2, q) = h_I(s_3, q) \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2q_1 + q_2 = 2 - 2q_1 - q_2 \\ 2q_1 + q_2 = q_1 + 2q_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3q_1 = 2 - 3q_1 \\ q_1 = q_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} q_1 = \frac{1}{3} \\ q_2 = \frac{1}{3} \end{array}\right\}$$

Άρα αν ο ΙΙ ακολουθήσει την $q^*=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, η βέλτιστη απάντηση του Ι είναι οποιαδήποτε στρατηγική.

Επειδή το παιχνίδι είναι συμμετρικό, αν ο Ι ακολουθήσει την $p^*=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, η βέλτιστη απάντηση του ΙΙ θα είναι οποιαδήποτε στρατηγική.

Άρα το $(p^*,q^*)=\left(\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right)$ είναι ΣΣΙ

Άσκηση 3

Παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος με πίνακα πληρωμών του I

		q	$1-q$	
	$I \backslash II$	t_1	t_2	
p	s_1	2	-1	-1^*
$1-p$	s_2	-2	1	-2
		2	1_*	

(i) ΣΣΙ σε καθαρές;

(ii) ΣΣΣ σε μεικτές;

(i) $V_1 = \max_i \min_j A_{ij} = -1$

$V_2 = \min_j \max_i A_{ij} = 1$

$V_1 < V_2 \Rightarrow \nexists$ ΣΣΙ σε καθαρές.

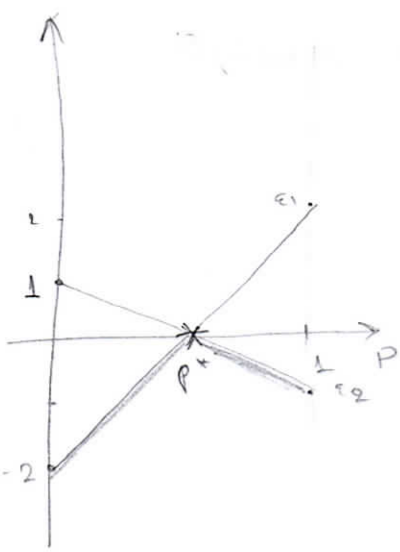
(ii) Θέλω να υπολογίσω τη

$$W_1 = \max_p \min_q h_I(p,q)$$

$$= \max_p \min \{h_I(p,t_1), h_I(p,t_2)\}$$

$$= \max_p \min \{2p - 2(1-p), -p + 1(1-p)\}$$

$$= \max_p \min \{\underbrace{4p-2}_{\varepsilon_1}, \underbrace{1-2p}_{\varepsilon_2}\}$$



- Σχεδιάζω τις ευθείες
- Σχεδιάζω τη γραμμή που αντιστοιχεί στο minimum
- Βρίσκω το maximum πάνω σε αυτή

το p^* βρίσκεται στην τομή των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$4p^* - 2 = 1 - 2p^* \Leftrightarrow 6p^* = 3 \Leftrightarrow p^* = \frac{1}{2}$

και $W_1 = 4p^* - 2 = 4\frac{1}{2} - 2 = 0$

Άρα η maxmin στρατηγική είναι $p^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $w_1 = 0$.

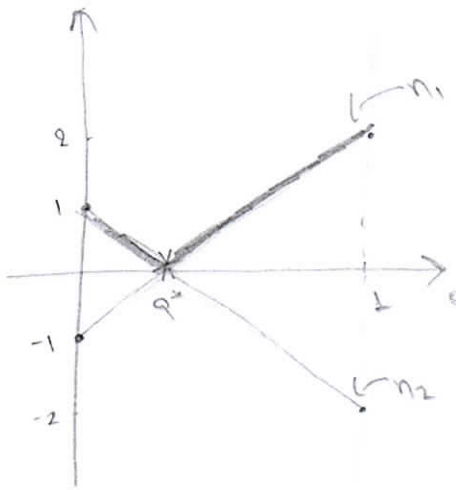
Τώρα θέλω να υπολογίσω τη

$$w_2 = \min_q \max_p h_I(p,q)$$

$$= \min_q \max\{h_I(s_1,q), h_I(s_2,q)\}$$

$$= \min_q \max\{2q - 1(1-q), -2q + 1(1-q)\}$$

$$= \min_q \max\{\underbrace{3q-1}_{n_1}, \underbrace{1-3q}_{n_2}\}$$



Σχεδιάζω τις ευθείες

Σχεδιάζω τη γραμμή που αντιστοιχεί στο maximum

Βρίσκω το minimum πάνω σε αυτή τη γραμμή και πού αυτό επιτυγχάνεται

Το q^* βρίσκεται στην τομή των n_1, n_2

$$3q^* - 1 = 1 - 3q^* \iff$$
$$6q^* = 2 \iff$$
$$q^* = \frac{1}{3}$$

και $w_2 = 3\frac{1}{3} - 1 = 0$

Οπότε η minmax στρατηγική είναι η $q^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

και $w_2 = 0$

$w_1 = w_2 = 0 \Rightarrow \exists$ ΣΣΙ το $(p^*, q^*) = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$

Άσκηση 4

I \ II	q t_1	$1-q$ t_2	
S_1	2	-1	-1
S_2	-1	2	-1
S_3	1	$3/2$	$3/2^*$
S_4	3	-2	-2
	3	2^*	

(i) ∃ ΣΣΙ σε καθαρές;

(ii) Να βρεθούν τα ΣΣΙ σε μεικτές.

(i) $v_1 = \max_i \min_j A_{ij} = 3/2$

$v_2 = \min_j \max_i A_{ij} = 2$

$v_1 < v_2 \Rightarrow$ δεν υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές

(ii) Θα βρούμε πρώτα το w_2 επειδή ο II έχει 2 στρατηγικές.

Έστω $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ με $p_1+p_2+p_3+p_4 = 1$ η μεικτή του I

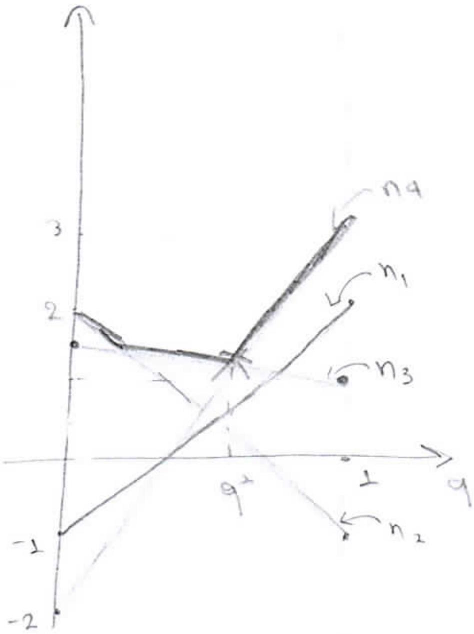
και $\underline{q} = (q, 1-q)$ η μεικτή του II

$$w_2 = \min_q \max_{\underline{p}} h_I(\underline{p}, q) =$$

$$\min_q \max\{h_I(s_1,q),\ h_I(s_2,q),\ h_I(s_3,q),\ h_I(s_4,q)\}$$

$$= \min_q \max\{2q-1(1-q),\ -q+2(1-q),\ q+\tfrac{3}{2}(1-q),\ 3q-2(1-q)\}$$

$$= \min_q \max\{\underbrace{3q-1}_{n_1},\ \underbrace{2-3q}_{n_2},\ \underbrace{-\tfrac{1}{2}q+\tfrac{3}{2}}_{n_3},\ \underbrace{5q-2}_{n_4}\}$$



Σχεδιάζω τις ευθείες
Σχεδιάζω τη γραμμή
που αντιστοιχεί στο maximum
Βρίσκω το minimum πάνω
σε αυτή τη γραμμή και
που πετυχαίνεται

Το q^* βρίσκεται στην τομή των
n_3, n_4

$$-\frac{1}{2}q^* + \frac{3}{2} = 5q^* - 2 \iff$$

$$\frac{7}{2} = \frac{11}{2}q^* \iff q^* = \frac{7}{11}$$

και $w_2 = 5 \cdot \frac{7}{11} - 2 = \frac{35}{11} - \frac{22}{11} = \frac{13}{11}$

Άρα η minmax στρατηγική είναι $q^* = (\frac{7}{11}, \frac{4}{11})$ και $w_2 = \frac{13}{11}$

Για το w_1:

Γνωρίζουμε ότι $w_1 = w_2 = \frac{13}{11}$

Επίσης, αν (p^*, q^*) ΣΣΙ τότε

$$p^* \in BR_I(q^*) \iff$$

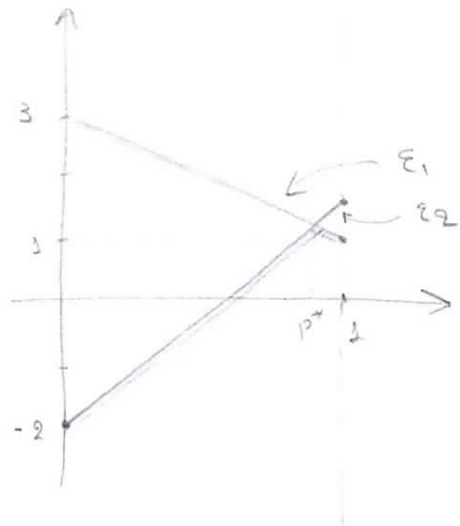
$$p^* \in BR_I\left(\frac{7}{11}, \frac{4}{11}\right)$$

Από τις γραφικές παραστάσεις βλέπουμε ότι όταν ο ΙΙ παίζει $q^* = (\frac{7}{11}, \frac{4}{11})$, τότε ο Ι τον συμφέρει να παίζει μόνο τις s_3 και s_4 με θετική πιθανότητα

Άρα η περιορισμένες(ε) $p = (0, 0, p, 1-p)$.

Οπότε,
$$w_1 = \max_p \min_q h_I(p, q)$$
$$= \max_p \min\{h_I(p, t_1), h_I(p, t_2)\}$$
$$= \max_p \min\{1p + 3(1-p), \frac{3}{2}p - 2(1-p)\} =$$

$$= \max_{p} \min \{ \underbrace{-2p+3}_{\varepsilon_1} , \underbrace{\tfrac{7}{2}p - 2}_{\varepsilon_2} \}$$



· Σχεδιάζω τις ευθείες

Σχεδιάζω τη γραμμή που αντιστοιχεί στο minimum

· Βρίσκω το maximum πάνω στη γραμμή που [illegible]

Το p^* βρίσκεται στην τομή των ε_1 και ε_2

$$-2p^* + 3 = \frac{7}{2}p^* - 2 \iff$$

$$-\frac{11}{2}p^* = -5 \iff$$

$$p^* = \frac{10}{11}$$

και $w_1 = -2\frac{10}{11} + 3 = \frac{13}{11}$

Άρα η maxmin στρατηγική είναι η $p^* = (0, 0, \frac{10}{11}, \frac{1}{11})$ και $w_1 = \frac{13}{11}$.

Οπότε ΣΣΙ: $(p^*, q^*) = ((0, 0, \frac{10}{11}, \frac{1}{11}), (\frac{7}{11}, \frac{4}{11}))$