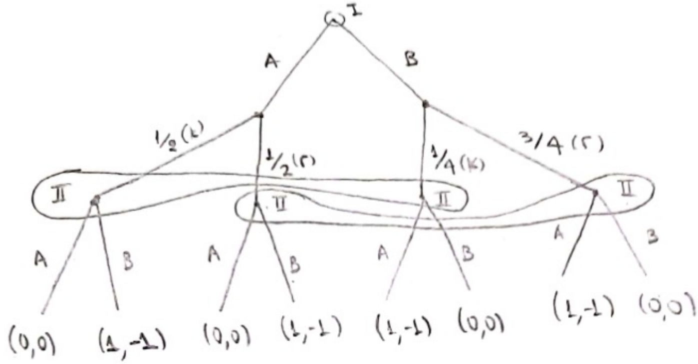
Πρόβλημα 1

(α)



(β) 2 παίκτες: I και II

$S_I = \{(A),(B)\}$

$S_{II} = \{(A,A),(A,B),(B,A),(B,B)\}$

I\II	(A,A)	(A,B)	(B,A)	(B,B)
(A)	$(0,0)$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$(1,-1)$
(B)	$(1,-1)$	$(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$	$(\frac{3}{4},-\frac{3}{4})$	$(0,0)$

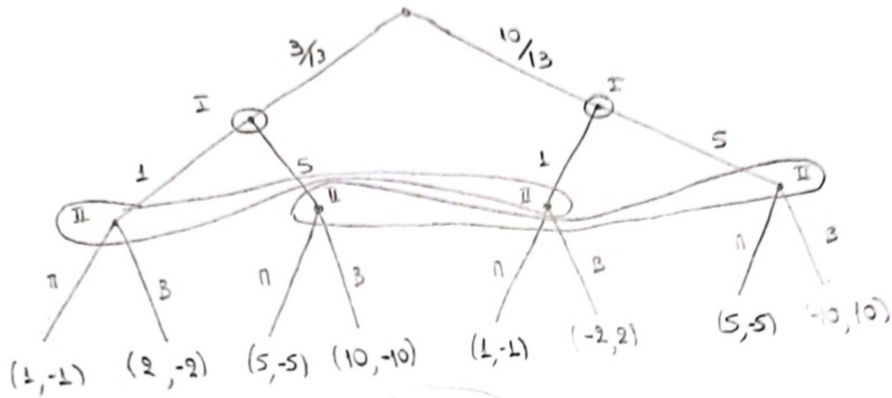
(γ) Δεν υπάρχουν κυρίαρχες στρατηγικές.

(δ) Για τον II: Η (B,A) κυριαρχείται από την (A,B).
Δεν υπάρχει λύση με ΕΑΚΣ.

(ε) Δεν υπάρχουν ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές.

Πρόβλημα 2

(α)



(β) 2 παίκτες: Ι και ΙΙ

$S_I = \{(1,1), (1,5), (5,1), (5,5)\}$

$S_{II} = \{(Π,Π), (Π,Β), (Β,Π), (Β,Β)\}$

Ι \ ΙΙ	(Π,Π)	(Π,Β)	(Β,Π)	(Β,Β)
(1,1)	$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(-\frac{14}{13}, \frac{14}{13})$	$(-\frac{14}{13}, \frac{14}{13})$
(1,5)	$(\frac{53}{13}, -\frac{53}{13})$	$(-\frac{97}{13}, \frac{97}{13})$	$(\frac{56}{13}, -\frac{56}{13})$	$(-\frac{94}{13}, \frac{94}{13})$
(5,1)	$(\frac{25}{13}, -\frac{25}{13})$	$(\frac{40}{13}, -\frac{40}{13})$	$(-\frac{5}{13}, \frac{5}{13})$	$(\frac{10}{13}, -\frac{10}{13})$
(5,5)	$(5,-5)$	$(-\frac{70}{13}, \frac{70}{13})$	$(5,-5)$	$(-\frac{70}{13}, \frac{70}{13})$

(γ) Δεν υπάρχουν κυρίαρχες στρατηγικές

(δ) Για τον Ι: Η (1,1) κυριαρχείται από την (5,1).
Η (1,5) κυριαρχείται από την (5,5)

Για τον ΙΙ: Η (Π,Π) κυριαρχείται από την (Β,Π)
Η (Π,Β) » » (Β,Β)

Δεν υπάρχει λύση με ΕΑΚΣ

(ε) Δεν υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές

Πρόβλημα 3

(α) 2 παίκτες: I, II

$S_I = \{(1),(2),(3),(4)\}$

$S_{II} = \{(1),(2),(3),(4)\}$

I \ II	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	$(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$	$(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-2)$	$(1, -1)$	$(\sqrt{5}-1, \sqrt{5}-4)$
(2)	$(\sqrt{3}-2, \sqrt{3}-1)$	$(0, 0)$	$(\sqrt{5}-2, \sqrt{5}-3)$	$(\sqrt{6}-2, \sqrt{6}-4)$
(3)	$(-1, 1)$	$(\sqrt{5}-3, \sqrt{5}-2)$	$(\sqrt{6}-3, \sqrt{6}-3)$	$(\sqrt{7}-3, \sqrt{7}-4)$
(4)	$(\sqrt{5}-4, \sqrt{5}-1)$	$(\sqrt{6}-4, \sqrt{6}-2)$	$(\sqrt{7}-4, \sqrt{7}-3)$	$(\sqrt{8}-4, \sqrt{8}-4)$

(β) Για τον I:

$$\pi_I((1),(1)) = \sqrt{2}-1 > \sqrt{3}-2 = \pi_I((2),(1))$$
$$\pi_I((1),(2)) = \sqrt{3}-1 > 0 = \pi_I((2),(2))$$
$$\pi_I((1),(3)) = 1 > \sqrt{5}-2 = \pi_I((2),(3))$$
$$\pi_I((1),(4)) = \sqrt{5}-1 > \sqrt{6}-2 = \pi_I((2),(4))$$

Άρα $\pi_I((1),s_2) > \pi_I((2),s_2)$, $\forall s_2 \in S_{II}$ $\Rightarrow$

Για τον I, η (1) κυριαρχεί της (2).

Ομοίως για τον II.

Η (1) είναι και αυστηρώς κυρίαρχη στρατηγική αυτού, π.χ. για τον I:

$$\pi_I((1),s_2) > \pi_I(s_1,s_2) \quad \forall s_2 \in S_{II} \text{ και } \forall s_1 \in S_I \setminus \{(1)\}$$

Ομοίως για τον II.

(γ) Η ((1),(1)) είναι λύση σε κυρίαρχες στρατηγικές

(δ) Για τον Ι: ο, (2),(3),(4) κυριαρχούνται από την (1)
» » ΙΙ: ο, (2),(3),(4) » » την (1)

Άρα ((1),(1)) είναι λύση με ΕΑΚΣ.

(ε)

Ι \ ΙΙ	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	$(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$	$(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-2)$	$(1, -1)$	$(\sqrt{5}-1, \sqrt{5}-4)$
(2)	$(\sqrt{3}-2, \sqrt{3}-1)$	$(0, 0)$	$(\sqrt{5}-2, \sqrt{5}-3)$	$(\sqrt{6}-2, \sqrt{6}-4)$
(3)	$(-1, 1)$	$(\sqrt{5}-3, \sqrt{5}-2)$	$(\sqrt{6}-3, \sqrt{6}-3)$	$(\sqrt{7}-3, \sqrt{7}-4)$
(4)	$(\sqrt{5}-4, \sqrt{5}-1)$	$(\sqrt{6}-4, \sqrt{6}-2)$	$(\sqrt{7}-4, \sqrt{7}-3)$	$(\sqrt{8}-4, \sqrt{8}-4)$

ΣΣΙ είναι το ((1),(1)).

Πρόβλημα 4

(α) Το παιχνίδι σε κανονική μορφή είναι

I \ II	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
(1)	(0,0)	(5/2, 5/2)	(5,0)	(5,0)	(5,0)	(5,0)	(5,0)
(2)	(0,0)	(0,5)	(4,4)	(8,0)	(8,0)	(8,0)	(8,0)
(3)	(0,0)	(0,5)	(0,8)	(9/2, 9/2)	(9,0)	(9,0)	(9,0)
(4)	(0,0)	(0,5)	(0,8)	(0,9)	(4,4)	(8,0)	(8,0)
(5)	(0,0)	(0,5)	(0,8)	(0,9)	(0,8)	(5/2, 5/2)	(5,0)
(6)	(0,0)	(0,5)	(0,8)	(0,9)	(0,8)	(0,5)	(0,0)

(β) Παρατηρούμε ότι για τον Ι:

$\Pi_I((0), s_2) = 0 \le \Pi_I((1), s_2) \quad \forall s_2 \in S_{II}$.

Άρα, η (0) κυριαρχείται από την (1)

Ομοίως,

$\Pi_I((6), s_2) = 0 \le \Pi_I((1), s_2) \quad \forall s_2 \in S_{II}$.

Άρα, η (6) κυριαρχείται από την (1)

Επίσης,

$\Pi_I((4), s_2) \le \Pi_I((3), s_2) \quad \forall s_2 \in S_{II}$.

Άρα, η (4) κυριαρχείται από την (3)

και

$\Pi_I((5), s_2) \le \Pi_I((3), s_2) \quad \forall s_2 \in S_{II}$,

οπότε και η (5) κυριαρχείται από την (3).

Ομοίως για τον ΙΙ.

Μπορούμε να διαγράψουμε τις κυριαρχούμενες στρ (γ) Δεν υπάρχει λύση σε κυρίαρχες στρατηγικές

(δ) Έχοντας διαγράψει τις κυριαρχούμενες (0),(4),(5) και (6) για τον Ι και (0),(4),(5),(6) για τον ΙΙ, συνεχίζουμε την απαλοιφή.

Για τον Ι: Η (3) κυριαρχείται από την (2)
Για τον ΙΙ: Η (3) κυριαρχείται από την (2)
Για τον Ι: Η (2) κυριαρχείται από την (1)
Για τον ΙΙ: Η (2) κυριαρχείται από την (1)

Άρα, η ((1),(1)) είναι λύση με ΕΑΚΣ

(ε)

Ι \ ΙΙ	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(0)	(0^*, 0^*)	(0, 0^*)	(0, 0^*)	(0, 0^*)	(0, 0^*)	(0, 0^*)	(0, 0^*)
(1)	(0^*, 0)	($5/2^*$, $5/2^*$)	(5^*, 0)	(5, 0)	(5, 0)	(5, 0)	(5, 0)
(2)	(0^*, 0)	(0, 5^*)	(4, 4)	(8^*, 0)	(8, 0)	(8, 0)	(8, 0)
(3)	(0^*, 0)	(0, 5)	(0, 8^*)	(9/2, 9/2)	(9^*, 0)	(9^*, 0)	(9^*, 0)
(4)	(0^*, 0)	(0, 5)	(0, 8)	(0, 9^*)	(4, 4)	(8, 0)	(8, 0)
(5)	(0^*, 0)	(0, 5)	(0, 8)	(0, 9^*)	(0, 8)	(5/2, 5/2)	(5, 0)
(6)	(0^*, 0)	(0, 5)	(0, 8)	(0, 9^*)	(0, 8)	(0, 5)	(0, 0)

Υπάρχουν ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές:
((0), (0)) με πληρωμές (0,0)
και ((1), (1)) » » (5/2, 5/2)

Πρόβλημα 5:

Cournot Nash Equilibrium

Παιχνίδι 2 παικτών: I, II

$S_I = \{Q_1 : Q_1 \in [0,\infty)\}$, $S_{II} = \{Q_2 : Q_2 \in [0,\infty)\}$

$$\Pi_I(Q_1,Q_2) = Q_1(a - bQ_1 - dQ_2) - cQ_1$$

$$\Pi_{II}(Q_1,Q_2) = Q_2(a - bQ_2 - dQ_1) - cQ_2$$

με $b,d > 0$, $a > c$

Βέλτιστη απόκριση του I στην Q_2 $(BR_I(Q_2))$:

Θέλουμε το $\underset{Q_1}{\operatorname{argmax}} \, \Pi_I(Q_1,Q_2)$

$$\frac{\partial \Pi_I(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1} = a - c - 2bQ_1 - dQ_2$$

$$\frac{\partial \Pi_I(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1} \geq 0 \iff -2bQ_1 \geq dQ_2 - (a-c)$$

$$\iff Q_1 \leq \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b} Q_2$$

Άρα

Q_1		$\frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b}Q_2$	
πρόσημο παραγώγου	+	0	−
μονοτονία $\Pi_I(Q_1,Q_2)$	↗		↘

$$BR_I(Q_2) = \begin{cases} \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b} Q_2 & , \text{αν } \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b} Q_2 \geq 0 \\ 0 & , \text{αν } \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b} Q_2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad BR_I(Q_2) = \begin{cases} \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b} Q_2 & , \text{αν } Q_2 \leq \frac{a-c}{d} \\ 0 & , \text{αν } Q_2 > \frac{a-c}{d} \end{cases}$$

<u>Βέλτιστη απάντηση του II στην Q_1 $(BR_{II}(Q_1))$:</u>

Θέλουμε το $\underset{Q_2}{\operatorname{argmax}}\, \Pi_{II}(Q_1, Q_2)$

$$\frac{\partial \Pi_{II}(Q_1, Q_2)}{\partial Q_2} = a - c - 2bQ_2 - dQ_1$$

$$\frac{\partial \Pi_{II}(Q_1, Q_2)}{\partial Q_2} \geq 0 \Leftrightarrow -2bQ_2 \geq dQ_1 - (a-c)$$

$$\Leftrightarrow Q_2 \leq \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b} Q_1$$

Άρα

Q_2		$\frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b} Q_1$	
πρόσημο παραγώγου	+	0	−
μονοτονία $\Pi_{II}(Q_1, Q_2)$	$\nearrow$		$\searrow$

$$BR_{II}(Q_1) = \begin{cases} \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_1 & , \text{αν } \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_1 \geq 0 \\ 0 & , \text{αν } \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad BR_{II}(Q_1) = \begin{cases} \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_1 & , \text{αν } Q_1 \leq \dfrac{a-c}{d} \\ 0 & , \text{αν } Q_1 > \dfrac{a-c}{d} \end{cases}$$

Εύρεση ΣΣΙ

$$(Q_1, Q_2) \text{ ΣΣΙ} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} BR_I(Q_2) = Q_1 \\ BR_{II}(Q_1) = Q_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_2 = Q_1 \\ \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_1 = Q_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_2 = Q_1 \\ \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} \left(\dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_2 \right) = Q_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_2 = Q_1 \\ \dfrac{a-c}{2b} \dfrac{2b-d}{2b} = Q_2 \left(1 - \left(\dfrac{d}{2b} \right)^2 \right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} \dfrac{a-c}{2b+d} = \dfrac{a-c}{2b(2b+d)} (2b + \cancel{d} - \cancel{d}) = \dfrac{a-c}{2b+d} \\ Q_2 = \cancel{\dfrac{a-c}{2b} \Big/ \dfrac{2b+d}{2b}} = \dfrac{a-c}{2b+d} \end{array} \right.$$

Άρα $(Q_1^*, Q_2^*) = \left(\frac{a-c}{2b+d}, \frac{a-c}{2b+d}\right)$

Το κέρδος που έχει τότε κάθε εταιρεία είναι:

$$\Pi_I(Q_1^*, Q_2^*) = Q_1^*(a - bQ_1^* - dQ_2^*) - cQ_1^*$$

$$= \frac{a-c}{2b+d}\left(a - b\frac{a-c}{2b+d} - d\frac{a-c}{2b+d}\right) - c\frac{a-c}{2b+d}$$

$$= \frac{(a-c)^2}{2b+d} - \frac{(b+d)(a-c)^2}{(2b+d)^2}$$

$$= \frac{(a-c)^2(2b+d-b-d)}{(2b+d)^2} = \frac{b(a-c)^2}{(2b+d)^2}$$

Ομοίως,

$$\Pi_{II}(Q_1^*, Q_2^*) = \frac{b(a-c)^2}{(2b+d)^2}$$

Cartel Optimal Solution

Το συνολικό κέρδος αν επιλέξουν (Q_1, Q_2) είναι:

$$S(Q_1, Q_2) = Q_1(a - bQ_1 - dQ_2) + Q_2(a - bQ_2 - dQ_1) - cQ_1 - cQ_2$$

$$= (a-c)(Q_1 + Q_2) - bQ_1^2 - bQ_2^2 - 2dQ_1Q_2$$

$$\nabla S(Q_1, Q_2) = [a - c - 2bQ_1 - 2dQ_2,\ a - c - 2bQ_2 - 2dQ_1]$$

$$HS(Q_1, Q_2) = \begin{bmatrix} -2b & -2d \\ -2d & -2b \end{bmatrix}$$

$$-HS(Q_1,Q_2) = \begin{bmatrix} 2b & 2d \\ 2d & 2b \end{bmatrix}$$

$$|2b| > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2b & 2d \\ 2d & 2b \end{vmatrix} = (2b)^2 - (2d)^2$$

? Για να είναι θετικά ορισμένος ο $-HS$ θα έπρεπε να είχαμε υπόθεση ότι $b > d$.

Έστω ότι ισχύει και ότι ο HS είναι αρνητικά ορισμένος $\Rightarrow$ S κοίλη

$$\nabla S(\bar{Q}_1,\bar{Q}_2) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a-c-2b\bar{Q}_1-2d\bar{Q}_2=0 \\ a-c-2b\bar{Q}_2-2d\bar{Q}_1=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{Q}_1 = \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{b}\bar{Q}_2 \\ a-c-2b\bar{Q}_2-2d\left(\dfrac{a-c}{2b}-\dfrac{d}{b}\bar{Q}_2\right)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{Q}_1 = \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{b}\bar{Q}_2 \\ \dfrac{(a-c)(2b-2d)}{2\cancel{b}} = \dfrac{2b^2-2d^2}{\cancel{b}}\bar{Q}_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\bar{Q}_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{b}\,\frac{a-c}{2(b+d)} = \frac{(a-c)(b+\cancel{d}-\cancel{d})}{2b(b+d)} = \frac{a-c}{2(b+d)}$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{a-c}{2(b+d)}$$

Άρα $$(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) = \left(\frac{a-c}{2(b+d)}, \frac{a-c}{2(b+d)}\right)$$

Το κέρδος τότε είναι:

$$\Pi_I(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) = \bar{Q}_1(a - b\bar{Q}_1 - d\bar{Q}_2) - c\bar{Q}_1$$

$$= \frac{a-c}{2(b+d)}\left(a - b\,\frac{a-c}{2(b+d)} - d\,\frac{a-c}{2(b+d)}\right) - c\,\frac{a-c}{2(b+d)}$$

$$= \frac{(a-c)^2}{2(b+d)} - \frac{(b+d)(a-c)^2}{4(b+d)^2}$$

$$= \frac{(a-c)^2(2b+2d-b-d)}{4(b+d)^2} = \frac{(a-c)^2\cancel{(b+d)}}{4(b+d)^{\cancel{2}}} = \frac{(a-c)^2}{4(b+d)}$$

Ομοίως,

$$\Pi_{II}(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) = \frac{(a-c)^2}{4(b+d)}$$

Ισχύει ότι $$\Pi_I(Q_1^*, Q_2^*) < \Pi_I(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) \iff$$

$$\frac{b\cancel{(a-c)^2}}{(2b+d)^2} < \frac{\cancel{(a-c)^2}}{4(b+d)} \iff$$

$$4b(b+d) < (2b+d)^2 \iff$$

$$\cancel{4b^2} + \cancel{4bd} < \cancel{4b^2} + \cancel{4bd} + d^2$$

✓

ενώ $Q_1^* > \bar{Q}_1 \iff$

$$\frac{a-c}{2b+d} > \frac{a-c}{2(b+d)} \checkmark$$

Δηλαδή, πετυχαίνω μεγαλύτερα κέρδη φτιάχνοντας μικρότερες ποσότητες.