31 – 03 – 23 Τελευταίο Μάθημα

Επαναλαμβανόμενα Παίγνια.

Παράδειγμα (1) στάδιο

παίγνιο 2 παικτών

2 παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα, c ή n

Ι σε κανονική μορφή

I \ II	c	n
c	(0*, 0*)	(7*, −2)
n	(−2, 7*)	(5, 5)

ΣΣΙ σε καθαρές (c, c) με πληρωμές (0, 0)

Παράδειγμα (2) στάδια.

Ένα παιχνίδι παίζεται 2 φορές

1º στάδιο οι 2 παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα n ή c πληρωμές 1ου σταδίου

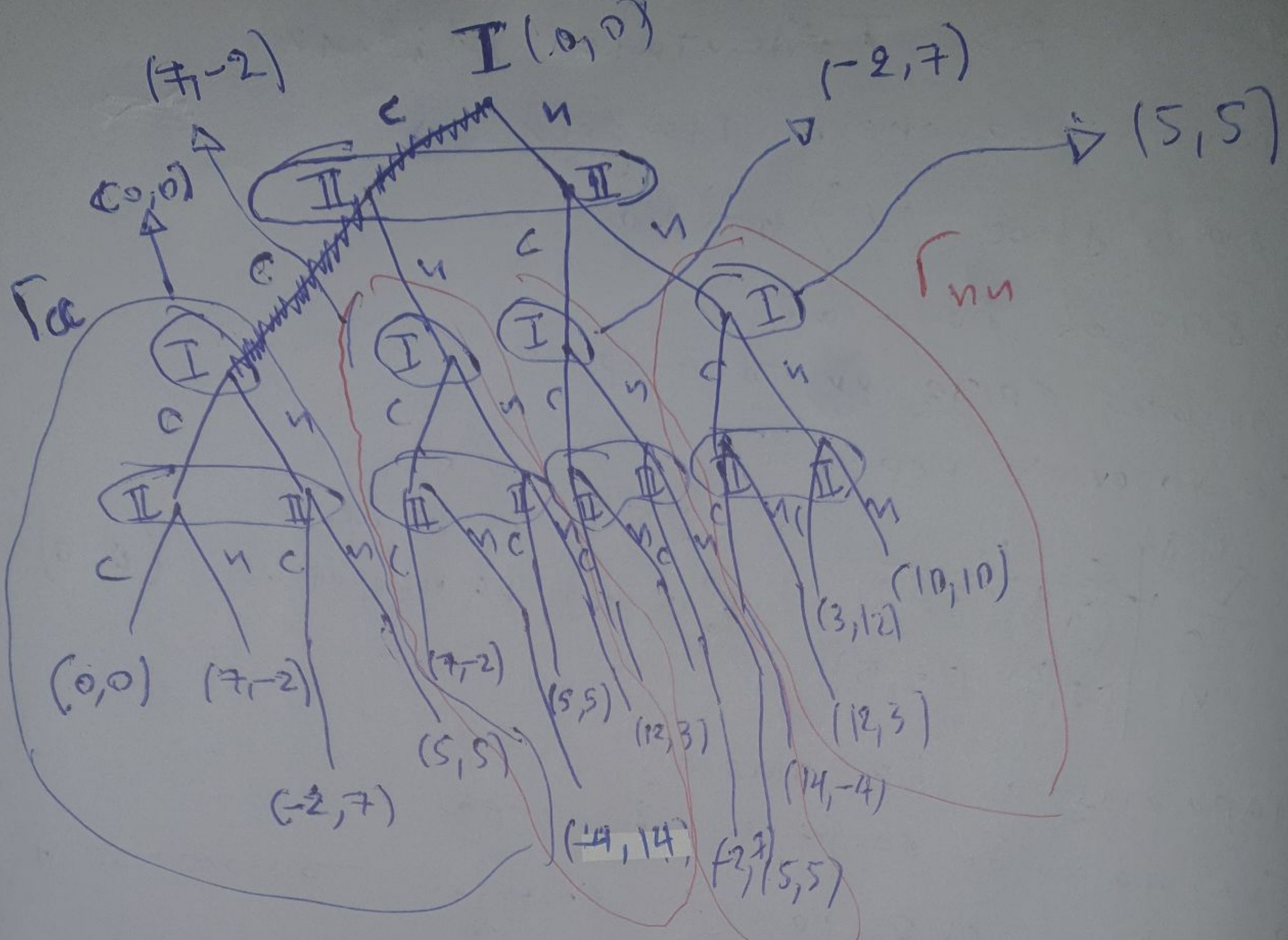
I \ II	c	n
c	(0, 0)	(7, −2)
n	(−2, 7)	(5, 5)

πριν το 2º στάδιο αποκαλύπτονται οι επιλογές του 1ου σταδίου

2º στάδιο: οι παίκτες ξαναεπιλέγουν ταυτόχρονα c ή n οι πληρωμές είναι ίδιες με το 1º στάδιο

Συνολική πληρωμή = άθροισμα πληρωμών στα 2 στάδια

Θα φτιάξουμε εκτεταμένη μορφή και θα λύσουμε με προς τα πίσω επαγωγή.



Δεν είναι πλήρους πληροφόρησης

4 υποπαιχνίδια

Σε κανονική μορφή: για το Γcc

I \ II	c	n
c	(0,0)*	(7,-2)
n	(-2,7)*	(5,5)

ΣΣΙ (c,c) με πληρωμή (0,0)

Για το Γcn: Σε κανονική μορφή

I \ II'	c	n
c	(7,-2)*	(14,-4)
n	(5,5)*	(12,3)

ΣΣΙ το (c,c) με πληρωμές (7,-2)

Για το Γ_{HC} : Σε κανονική μορφή

I \ II	C	H
C	$(\overset{*}{-2},\overset{*}{7})$	(5,5)
H	(-4,14)	(5,12)

ΣΣΙ το (C,C) με πληρωμές (-2,7)

Για το Γ_{HH} Σε κανονική μορφή

I \ II	C	H
C	$(\overset{*}{5},\overset{*}{5})$	(12,3)
H	(3,12)	(10,10)

ΣΣΙ : (C,C) με πληρωμές (5,5)

Συνεχίζουμε με προς τα πίσω επαγωγή

Το παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή είναι

I \ II	C	H
C	$(\overset{*}{0},\overset{*}{0})$	(7,-2)
H	(-2,7)	(5,5)

ΣΣΙ (C,C) με πληρωμές (0,0)

(Επαναλαμβανόμενο παίγνιο)

ορισμός: (Επαναλαμβανόμενο παίγνιο ορίζεται από ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο ένα παίγνιο Γ το οποίο επαναλαμβάνεται T φορές το συμβολίζουμε με (Γ, T)

αν $T < \infty$ έχουμε επαναλαμβανόμενο παίγνιο με πεπερασμένες επαναλήψεις

αν $T = \infty$ έχω επαναλαμβ. παίγνιο απείρων επαναλήψεων.

Θεώρημα: όταν έχω Επαναλαμβανόμενο παίγνιο πεπερασμένων επαναλήψεων και το Γ έχει μοναδικό ΣΣΙ τότε έχει ακριβώς ένα SPE που είναι να παίξει κάθε παίκτης την στρατηγική του $\Sigma\Sigma I$ στο Γ σε καθε στάδιο

Δυναμικά παίγνια: επαναλαμβανομενα παιγνια στα οποία οι στρατηγικές ή και οι πληρωμές μεταβαλλονται με τον χρόνο

Προβλημα των κοινων (The commons problem)

Δυναμική μορφή:

προβλημα με T επαναλήψεις

Το μεγεθος του πορου μεταβαλλεται ως προς τον χρονο συμφωνα με τις αποφασεις των παικτών

2 παικτες   περιοδοι $t = 1, 2, \ldots, T$

Y_t = διαθεσιμη ποσοτητα πόρου στην αρχή της περιοδου t

Στην αρχή της περιόδου t καθε παίκτης αποφασίζει τι ποσοτητα θα καταναλωσει

c_{it}: ποσοτητα που θα καταναλώσει ο i παικτης για την περιοδο t

Η πληρωμή του παικτη i είναι $\log(c_{it})$, $i = 1, 2$, $t = 1, 2, \ldots, T$

Η υπολειπόμενη ποσότητα στην περιοδο t είναι

$X_t = Y_t - c_{1t} - c_{2t}$

Το μεγεθος του πορου στην αρχή της περιοδου $t+1$ είναι $Y_{t+1} = 10\sqrt{X_t}$

Αν $X_t = 0$ τοτε $Y_{t+1} = 0 \Rightarrow$ τελειώνει το παιχνίδι εχει εξαντληθεί ο πορος

$\delta \leftarrow$ discount factor

α) ποια είναι η κοινωνικά βέλτιστη συμπεριφορά;

β) ποια είναι η συμπεριφορά όταν λειτουργούν ατομικά; σύμφωνα με το ΣΣΙ

γ) έχουμε υπερκατανάλωση όταν λειτουργούν ατομικά;

Λύση: α) Έχουμε έναν διαχειριστή που αποφασίζει σε κάθε στάδιο τι θα καταναλώσει κάθε παίκτης ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική πληρωμή.

Θα λύσουμε το πρόβλημα αναδρομικά.

Ένα στάδιο πριν την λήξη

Έστω ότι φτάνουμε σε αυτό το στάδιο έχοντας διαθέσιμη ποσότητα Y

Θα δώσει ποσότητες C_1 και C_2 με $C_1 + C_2 = Y$ $\Rightarrow C_2 = Y - C_1$

Έχουμε $\max\limits_{C_1 < Y} \underbrace{\log C_1 + \log(Y - C_2)}_{S(C_1)}$

$$S'(C_1) = \frac{1}{C_1} - \frac{1}{Y - C_1}$$

$$S''(C_1) = -\frac{1}{C_1^2} - \frac{1}{(Y - C_1)^2} < 0 \Rightarrow S \text{ κοίλη}$$

$$S'(C_1) = 0 \Leftrightarrow C_1 = \frac{Y}{2} \Rightarrow C_1^* = \frac{Y}{2}$$

και $C_2^* = Y - \dfrac{Y}{2} = \dfrac{Y}{2}$

κάτω από το βέλτιστο η πληρωμή κάθε παίκτη θα είναι $V^{(1)}(Y) = \log\left(\frac{Y}{2}\right) = \log Y - \underbrace{\log 2}_{A(1)}$

$= \log Y + A(1)$

2 σταδια πριν την λήξη.

Εστω οτι η διαθεσιμη ποσοτητα ειναι Y

Y, c_1, c_2 $10\sqrt{y-c_1-c_2}$ ⟶ διαθ. ποσοτ.

2 περ.   1 περ.   λήξη

καταναλωση

⟶ θα μοιραστουν τη διαθ. ποσοτητα και θα κερδισει ο καθενας

$$V^{(1)}\left(10\sqrt{Y-c_1-c_2}\right) = \log 10\sqrt{Y-c_1-c_2} + A(1)$$

Το πρόβλημα που πρεπει να λυσει ο διαχ. ειναι

$$\max_{c_1,c_2}\Big[\log c_1 + \log c_2 + 2\delta \underbrace{\log\left(10\sqrt{Y-c_1-c_2}\right)}_{\log 10 + \log\sqrt{Y-c_1-c_2}} + 2\delta A(1)\Big]$$

$$= \max_{c_1,c_2}\Big[\log c_1 + \log c_2 + \delta\log(Y-c_1-c_2) + 2\delta_1 + 2\delta A(1)\Big]$$

$$\nabla S(c_1,c_2) = \left(\frac{\partial S(c_1,c_2)}{\partial c_1}, \frac{\partial S(c_1,c_2)}{\partial c_2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{c_1} - \delta\frac{1}{Y-c_1-c_2}, \frac{1}{c_2} - \delta\frac{1}{Y-c_1-c_2}\right)$$

$$HS(c_1,c_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 S(c_1,c_2)}{\partial c_1^2} & \dfrac{\partial^2 S(c_1,c_2)}{\partial c_1 \partial c_2} \\ \dfrac{\partial^2 S(c_1,c_2)}{\partial c_2 \partial c_1} & \dfrac{\partial^2 S(c_1,c_2)}{\partial c_2^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{c_1^2} - \delta\dfrac{1}{(Y-c_1-c_2)^2}, & -\delta\dfrac{1}{(Y-c_1-c_2)^2} \\ -\delta\dfrac{1}{(Y-c_1-c_2)^2}, & -\dfrac{1}{c_2^2} - \delta\dfrac{1}{(Y-c_1-c_2)^2} \end{bmatrix}$$

Είναι αρνητικά ορισμένος

$\Longrightarrow S$ καλή

$$\nabla S(c_1, c_2) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{c_1} - \delta \frac{1}{Y - c_1 - c_2} = 0 \\ \frac{1}{c_2} - \delta \frac{1}{Y - c_1 - c_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{c_1} = \frac{\delta}{Y - c_1 - c_2} \\ c_1 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y - 2c_1 = \delta c_1 \\ c_2 = c_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{Y}{2+\delta} < \frac{Y}{2} \\ c_2 = \frac{Y}{2+\delta} \end{cases} \Rightarrow (c_1^*, c_2^*) = \left(\frac{Y}{2+\delta}, \frac{Y}{2+\delta}\right)$$

$V^{(2)}(Y)$: βέλτιστη πληρωμή για κάθε παίκτη αν απομένουν 2 στάδια για το τέλος και η συνολική πληρωμή είναι Y

$$V^{(2)}(Y) = \log\left(\frac{Y}{2+\delta}\right) + \delta \cdot V^{(1)}\left(10\sqrt{Y - \frac{Y}{2+\delta} - \frac{Y}{2+\delta}}\right)$$

$$= \log Y - \log(2+\delta) + \delta \log\left(10\sqrt{\frac{\delta Y}{2+\delta}}\right) + \delta A(1)$$

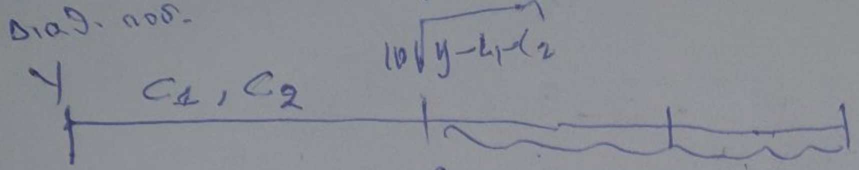
$$= \log Y - \log(2+\delta) + \delta \log 10 + \frac{\delta}{2}\log\frac{\delta}{2+\delta}$$

$$= \log Y + \frac{\delta}{2}\log Y + A(2) = \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)\log Y + A(2)$$

$$V^{(2)}(Y) = \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\log Y + A(2)$$

3 περιοδοι πριν την λήξη

Εστω η διαθεσιμη ποσότητα ειναι Y



3 περ. 2 περι πριν $V^{(2)}\left(10\sqrt{Y-c_1-c_2}\right)$

πληρωμη ο καθένας

ο διαχειριστής θα λύσει το προβλημα

$$\max_{c_1,c_2}\left[\log c_1 + \log c_2 + 2\delta V^{(2)}\left(10\sqrt{Y-c_1-c_2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \max_{c_1,c_2}\left[\log c_1 + \log c_2 + 2\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\log\left(10\sqrt{Y-c_1-c_2}\right) + 2\delta A(2)\right]$$

$$\Longleftrightarrow \max_{c_1,c_2}\underbrace{\left[\log c_1 + \log c_2 + \delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\log(Y-c_1-c_2) + \text{σταθερές}\right]}_{S(c_1,c_2)}$$

$$\nabla S(c_1,c_2) = \left[\frac{1}{c_1} - \delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\frac{1}{Y-c_1-c_2},\ \frac{1}{c_2} - \delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\frac{1}{Y-c_1-c_2}\right]$$

$$\nabla S(c_1,c_2) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{c_1} = \delta\left(1+\dfrac{\delta}{2}\right)\dfrac{1}{Y-c_1-c_2} \\ \dfrac{1}{c_2} = \delta\left(1+\dfrac{\delta}{2}\right)\dfrac{1}{Y-c_1-c_2} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\overset{c_1=c_2}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{c_1} = \delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\frac{1}{Y-2c_1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 \\ Y - 2c_1 = c_1\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 \\ Y = \left(2 + \delta + \frac{\delta^2}{2}\right) c_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c_1^* = \frac{Y}{2 + \delta + \frac{\delta^2}{2}} = c_2^*$$

(3)

$V^{(3)}(Y)$ = πληρωμή καθε παικτη 3 περ. πριν με διαθ. ποσ. Y

$$= \log\left(\frac{Y}{2+\delta+\frac{\delta^2}{2}}\right) + \delta \cdot V^{(2)}\left(10\sqrt{Y} - \left(2+\delta+\frac{\delta^2}{2}\right)^{-1}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{4}\right)\log Y + A(3)$$

Αρα t περιοδοι πριν την λήξη

1) $c_1^* = c_2^*$ $\quad V^{(t)}(Y)$

$Y/2 \qquad \log Y + A(1)$

2) $\dfrac{Y}{2\left(1+\frac{\delta}{2}\right)} \qquad \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\log Y + A(2)$

3) $\dfrac{Y}{2\left(1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4}\right)} \qquad \left(1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4}\right)\log Y + A(3)$

⋮

T) $\dfrac{Y}{2\left[1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4}+\dots+\left(\frac{\delta}{2}\right)^{T-1}\right]} \qquad \left[1+\frac{\delta}{2}+\dots+\left(\frac{\delta}{2}\right)^{T-1}\right]\log Y + A(T)$