24-02-23

7. Tragedy of commons

Χαρακτηριστικά προβλήματος

- Υπάρχει ένας πόρος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί από όλους.
- ο πόρος είναι περιορισμένος και υπάρχει το ενδεχόμενο να εξαντληθεί λόγω κατανάλωσης
- όσο αυξάνεται η ατομική κατανάλωση τόσο μειώνεται η διαθεσιμότητα στο μέλλον.

<u>externalities</u> : με τον όρο externalities εννοούμε την επίδραση που έχει η απόφαση ένος παίκτη στην ωφέλεια των άλλων.

Υπάρχουν <u>positive</u> και <u>negative</u> externalities.

2. παίκτες - Ατομική Βελτιστοποίηση

Δημόσιος διαθέσιμος πόρος

Διαθεσιμότητα πόρων: y μονάδες, $y > 0$

Πρόβλημα 2 περιόδων, στην $1^{η}$ περίοδο έχουμε παιχνίδι, 2 καταναλωτές / παίκτες

<u>$1^{η}$ περίοδος</u> : καθε παίκτης αποφασίζει πόσες μονάδες πόρου θα ζητήσει. $c_1, c_2 \in [0, y]$

οι αποφάσεις λαμβάνονται ταυτόχρονα (ένα σύνολο πληροφόρησης)

Αν $c_1 + c_2 \geq y$ τότε ο καθένας θα πάρει $\frac{y}{2}$ και στην αρχή της δεύτερης περιόδου η διαθεσιμότητα θα είναι μηδέν. Άρα δεν θα πάρει κανένας τίποτα στην $2^{η}$ περίοδο.

Αν $c_1 + c_2 \leq y$ ο καθένας θα πάρει ό,τι ζητήσει, και η διαθεσιμότητα στην αρχή της $2^{ης}$ περιόδου θα είναι $y - (c_1 + c_2)$

$2^{η}$ περίοδος: Η διαθέσιμη ποσότητα: $\begin{cases} y-(c_1+c_2) & \text{αν } c_1+c_2 \leq y \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Η διαθέσιμη ποσότητα μοιράζεται στους 2 παίκτες

Η συνάρτηση ωφελιμότητας κάθε παίκτη είναι λογαριθμική, $\log W$

- κάθε παίκτης θέλει να μεγιστοποιήσει την συνολική ωφέλεια του.
- θέλουμε να βρούμε ΣΣΙ

Λύση: (c_1^*, c_2^*) ΣΣΙ $\Leftrightarrow \begin{cases} c_1^* \in BR_1(c_2^*) \\ c_2^* \in BR_2(c_1^*) \end{cases}$

πρέπει πρώτα να βρούμε τα σύνολα βέλτιστων απαντήσεων $BR_1(c_2)$, $BR_2(c_1)$
πρέπει να βρούμε τις πληρωμές
$\Pi_1(c_1, c_2)$, $\Pi_2(c_1, c_2)$

πληρωμή του παίκτη I

φιξάρω το c_2 λύνω ως προς c_1

$$\Pi_1(c_1, c_2) = \begin{cases} \log c_1 + \log \dfrac{y-(c_1+c_2)}{2} , & c_1 + c_2 \leq y \\ \log \dfrac{y}{2} + \underbrace{\lim_{x \to 0} \log x}_{-\infty} , & c_1 + c_2 > y \end{cases}$$

$BR_1((c_2))$
↓
συγκεκριμένη

Άρα $\Pi_1(c_1, c_2) = \begin{cases} \log c_1 + \log \dfrac{y-(c_1+c_2)}{2}, & c_1 \le y - c_2 \\ -\infty, & c_1 > y - c_2 \end{cases}$

<u>Βέλτιστη απάντηση παίκτη I</u> (απέναντι στη c_2)

$BR_1(c_2)$

Θέλουμε το $\max\limits_{c_1 \in [0, y]} \Pi_1(c_1, c_2) =$

$$= \max_{c_1 \in [0, y-c_2]} \Pi_1(c_1, c_2)$$

$$= \max_{c_1 \in [0, y-c_2]} \left(\log c_1 + \log \frac{y-(c_1+c_2)}{2} \right)$$

Για $c_1 \in [0, y-c_2]$

$$\frac{\partial \Pi_1(c_1, c_2)}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{\frac{y-(c_1+c_2)}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{y-(c_1+c_2)}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_1(c_1, c_2)}{\partial c_1^2} = -\frac{1}{c_1^2} - \frac{+1}{[y-(c_1+c_2)]^2} < 0$$

$\Rightarrow \Pi_1(c_1, c_2)$ κοίλη ως προς c_1

$$\frac{\partial \Pi_1(c_1, c_2)}{\partial c_1} = 0 \Leftrightarrow c_1 = y - c_1 - c_2$$

$$\Leftrightarrow c_1 = \frac{y - c_2}{2} \in [0, y - c_1]$$

Αρα η $\Pi_1(c_1, c_2)$ μεγιστοποιείται στο $c_1 = \frac{y-c_2}{2}$

$$\Rightarrow BR_1(c_2) = \frac{y-c_2}{2} \quad \forall c_2 \in [0, y]$$

Βέλτιστη απάντηση του παίκτη II στην C_1

$$BR_2(C_1) = \frac{y-c_1}{2}$$ (λόγω συμμετρίας)

$\forall c_1 \in [0, y]$

Σημείο Στρατηγικής Ισορροπίας

$$(c_1^*, c_2^*) \ \Sigma\Sigma I \Leftrightarrow \begin{cases} c_1^* \in BR_1(c_2^*) \\ c_2^* \in BR_2(c_1^*) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1^* = \frac{y-c_2^*}{2} \\ c_2^* = \frac{y-c_1^*}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1^* = \frac{y-c_2^*}{2} \\ c_2^* = \frac{y-\frac{y-c_2^*}{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1^* = \frac{y-c_2^*}{2} \\ c_2^* = \frac{y+c_2^*}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1^* = \frac{y-c_2^*}{2} \\ c_2^* = \frac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1^* = y/3 \\ c_2^* = y/3 \end{cases}$$

Αρα $(c_1^*, c_2^*) = \left(\frac{y}{3}, \frac{y}{3}\right)$

Συμπέρασμα: Κάτω από το ΣΣΙ κάθε παίκτης θα καταναλώσει στην $1^η$ περίοδο $\frac{y}{3}$

Η διαθεσιμότητα στην αρχή της $2^{ης}$ περιόδου

$$y - \frac{y}{3} - \frac{y}{3} = \frac{y}{3}$$

Κάθε παίκτης την $2^η$ περίοδο θα καταναλώσει

$$\frac{y/3}{2} = \frac{y}{6}$$

Η συνολική πληρωμή κάθε παικτη θα είναι

$$\log\frac{y}{3} + \log\frac{y}{6} = \log\left(\frac{y}{3}\frac{y}{6}\right) = \log\left(\frac{y^2}{18}\right)$$

---

2 παίκτες – κοινωνική βελτιστοποίηση

Ιδιο προβλημα με πριν με την διαφορά ότι υπάρχει ενας κεντρικός διαχειριστής που αποφασίζει ποσο θα ζητήσει ο καθένας με σκοπό ~~…~~ να μεγιστοποιήσει την συνολική τους ωφέλεια.

Λυση: Αν αποφασίσει (c_1, c_2)

Η συνολική πληρωμή των παικτών θα είναι:

$$S(c_1,c_2) = \begin{cases} \log c_1 + \log c_2 + 2\log\frac{y-(c_1+c_2)}{2}, & \text{αν } c_1+c_2 \le y \\ \log\frac{y}{2} + \log\frac{y}{2} + \underbrace{2\lim_{x\to 0}\log x}_{-\infty} & \text{αν } c_1+c_2 > y \end{cases}$$

θέλω $\max S(c_1,c_2)$

υπο $c_1 + c_2 \le y$

$c_1 \ge 0$

$c_2 \ge 0$

$$\nabla S(c_1,c_2) = \left(\frac{\partial S(c_1,c_2)}{\partial c_1}, \frac{\partial S(c_1,c_2)}{\partial c_2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{c_1} + 2\cdot\frac{1}{\frac{y-(c_1+c_2)}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right), \frac{1}{c_2} + 2\cdot\frac{1}{\frac{y-(c_1+c_2)}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{c_1} - \frac{2}{y-(c_1+c_2)}, \frac{1}{c_2} - \frac{2}{y-(c_1+c_2)}\right)$$

$$HS(c_1,c_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 S(c_1,c_2)}{\partial c_1^2} & \dfrac{\partial^2 S(c_1,c_2)}{\partial c_1 \partial c_2} \\ \dfrac{\partial^2 S(c_1,c_2)}{\partial c_1 \partial c_1} & \dfrac{\partial^2 S(c_1,c_2)}{\partial c_2^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{c_1^2} - \dfrac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} & -\dfrac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} \\ -\dfrac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} & -\dfrac{1}{c_2^2} - \dfrac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} \end{bmatrix}$$

Για να δείξουμε ότι $S(c_1,c_2)$ κοίλη αρκει νδο $-HS(c_1,c_2)$ θετικά ορισμένος

$$-HS(c_1,c_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{c_1^2} + \dfrac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} & \dfrac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} \\ \dfrac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} & \dfrac{1}{c_2^2} + \dfrac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} \end{bmatrix}$$

Είναι θετικά ορισμένος $\Rightarrow HS(c_1,c_2)$ αρνητικά ορισμενος $\Rightarrow S(c_1,c_2)$ κοίλη
$\Rightarrow$ το τοπικό μεγιστο θα είναι και ολικο μεγιστο.

Βρίσκω τοπικό μέγιστο

$$\nabla S(c_1,c_2) = (0,0) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{c_1} - \frac{2}{y-(c_1+c_2)}, \frac{1}{c_2} - \frac{2}{y-(c_1+c_2)}\right)$$

$$= (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 = y - c_1 - c_2 \\ 2c_2 = y - c_1 - c_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 \\ 2c_1 = y - 2c_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 \\ c_1 = \frac{y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \frac{y}{4}$$

άρα $\boxed{(\hat{c}_1, \hat{c}_2) = \left(\frac{y}{4}, \frac{y}{4}\right)}$ (ικανοποιεί τους περιορισμούς.) → (κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική)

Αποτελέσματα — Σύγκριση.

Κάτω από την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική:

Στην 1^{η} περίοδο κάθε παίκτης καταναλώνει

$$\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = \frac{y}{4} < \frac{y}{3} = c_1^* = c_2^*$$

Στην αρχή της $2^{\eta\varsigma}$ περιόδου: Η διαθέσιμη ποσότητα

είναι $y - 2\frac{y}{4} = \frac{y}{2}$

Στην 2^{η} περίοδο θα καταναλώσει ο καθένας $\frac{y}{4}$

Η πληρωμή κάθε παίκτη είναι:

$$\log\frac{y}{4} + \log\frac{y}{4} = \underbrace{\log\left(\frac{y^2}{16}\right)}_{\text{κοινωνικά βέλτιστη}} > \underbrace{\log\left(\frac{y^2}{18}\right)}_{\text{ατομική}}.$$

N - παίκτες - Ατομική Βελτιστοποίηση:

Ίδιο πρόβλημα με N παίκτες

__Λύση__ Εφόσον οι παίκτες είναι συμμετρικοί θα ψάξω ΣΣΙ σε συμμετρικές στρατηγικές

$$\underbrace{(c, c, c, \dots, c)}_{N} \text{ ΣΣΙ} \Leftrightarrow c \in BR_1(\underbrace{c, c, \dots, c}_{\substack{S_{-1} \\ N-1 \text{ στοιχεία}}})$$

Πληρωμή Παίκτη I

$\cancel{\Pi_1(c_1, c, \ldots, c) = \{ N \log c}$ $\qquad \cancel{y - Nc}$, $\cancel{Nc < y}$

$$\Pi_1(c_1, c, \ldots, c) = \begin{cases} \log c_1 + \log\left(\dfrac{y - [(N-1)c + c_1]}{N}\right) & \text{αν } c_1 + (N-1)c \leq y \\[2ex] \log \dfrac{y}{N} + (-\infty) & \text{αν } c_1 + (N-1)c > y \end{cases}$$

Άρα
$$\Pi_1(c_1, c, c, \ldots) = \begin{cases} \log c_1 + \log \dfrac{y - [c_1 + (N-1)c]}{N} \\[2ex] -\infty & \text{αν } c_1 > y - (N-1)c \end{cases}$$

Βέλτιστη απάντηση του I στην $(\overbrace{c, c, \ldots, c}^{s_{-1}})$
$BR_1(c, c, \ldots, c)$

θέλουμε $\max\limits_{c_1 \in [0, y]} \Pi_1(c_1, s_{-1}) = \max\limits_{c_1 \in [0, y-(N-1)c]} \Pi_1(c_1, \underline{s}_{-1})$

Για $c_1 \in [0, y - (N-1)c]$

$$\frac{\partial \Pi_1(c_1, c, \ldots, c)}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{y - [c_1 + (N-1)c]}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_1(c_1, \underline{s}_{-1})}{\partial c_1^2} = -\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{(y-[c_1(N-1)c])^2} < 0$$

$\Rightarrow \Pi_1(c_1, \underline{s}_{-1})$ κοίλη ως προς c_1

$$\frac{\partial \Pi_1(c_1, \underline{s}_{-1})}{\partial c_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c_1} - \frac{1}{y-[y_1+(N-1)c]} = 0$$

$$\Leftrightarrow c_1 = y - c_1 - (N-1)c \Rightarrow c_1 = \frac{y-(N-1)c}{2} \in \left[0, y-(N-1)c\right]$$

Αρα $\boxed{BR_1(c, c, \dots, c) = \frac{y-(N-1)\cdot c}{2}}$

Συμμετρικο ΣΣΙ $(c^*, c^*, \dots, c^*)$ ΣΣΙ $\Leftrightarrow$

$c^* \in BR_1(c^*, c^*, \dots, c^*)$

$$\Leftrightarrow c^* = \frac{y-(N-1)c^*}{2} \Rightarrow 2c^* = y-(N-1)c^* \Leftrightarrow$$

$$c^* = \frac{y}{N+1}$$

Αποτέλεσμα: κατω απο το ΣΣΙ, Στην πρωτη περιοδο καθε παικτης ζητάει $c^* = \frac{y}{N+1}$

Στην αρχή της $2^{ης}$ περιοδου η διαθεσ. είναι

$$y - N\frac{y}{N+1} = \frac{y}{N+1} \quad (\searrow \text{ ως προς } N)$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{y}{N+1} = 0$$

Την $2^η$ περίοδο θα παρουν $\dfrac{\frac{y}{N+1}}{N} = \dfrac{y}{N(N+1)}$

Συνολ. ωφέλεια ενος παίκτη: $\log\frac{y}{N+1} + \log\frac{y}{N(N+1)}$

$$= \log\frac{y^2}{N(N+1)^2}$$

Παίκτες — κοινωνική βελτιστοποίηση

Κεντρικός διαχειριστής αποφασίζει πόσο θα καταναλώσει κάθε παίκτης.

Υποθ. ότι θα επιλέξει συνολική στρατηγική θέλει να μεγιστοποιήσει την συνολική ωφέλεια

Λύση: Έστω ότι ακολουθούν στρατηγική $(c, c, \dots, c)$

Η συνολική ωφέλεια είναι:

$$S(c) = \begin{cases} N \cdot \log c + N \log \dfrac{y - Nc}{N} & \text{αν } Nc \leq y \\ -\infty & \text{αν } Nc > y \end{cases}$$

θέλουμε $\max\limits_{c \in [0, \frac{y}{N}]} S(c)$

Για $c \in [0, \frac{y}{N}]$

$$\frac{dS(c)}{dc} = \frac{N}{c} + N \frac{1}{\frac{y-Nc}{N}}(-1) = \frac{N}{c} - \frac{N^2}{y - Nc}$$

$$\frac{d^2S(c)}{dc^2} = -\frac{N}{c} + \frac{N^2(-N)}{(y-Nc)^2} = -\frac{N}{c} - \frac{N^3}{(y-Nc)^2} < 0$$

$$\frac{dS(c)}{dc} = 0 \iff \frac{N}{c} - \frac{N^2}{y-Nc} = 0$$

$$\iff y = 2Nc \iff c = \frac{y}{2N}$$

Άρα $\hat{c} = \dfrac{y}{2N} \left(\in [0, \frac{y}{N}] \right)$

Αποτέλεσμα - Σύγκριση

Κάτω από την Κοινωνικά Βέλτιστη Στρατηγική

- Στην $1^{η}$ περίοδο ο καθένας καταναλώνει

$$\hat{c} = \frac{y}{2N} < \frac{y}{N+1} = c^*$$

- Στην αρχή της $2^{ης}$ περιόδου η διαθέσιμη ποσότητα είναι $y - N\frac{y}{2N} = \frac{y}{2} > \frac{y}{N+1}$

- Στην $2^{η}$ περίοδο ο καθένας θα καταναλώσει $\frac{y/2}{N} = \frac{y}{2N}$

- Το ατομικό κέρδος ενός παίκτη θα είναι $\log\left(\frac{y}{2N}\right) + \log\left(\frac{y}{2N}\right) =$

$$= \log\left(\frac{y}{2N}\right)^2 > \left(\log \frac{y^2}{N(N+1)^2}\right)$$