17/02/2023

Μάθημα 4

5. Σημείο στρατηγικής ισορροπίας - Nash equilibrium

Ορισμός: (βέλτιστη απάντηση)
Μια στρατηγική s_i^* του παίκτη i είναι βέλτιστη απάντηση στη στρατηγική $\underline{s}_{-i}^*$ των άλλων παικτών όταν $\Pi_i(s_i^*, \underline{s}_{-i}^*) \geq \Pi_i(s_i, \underline{s}_{-i}^*) \quad \forall\, s_i \in S_i$

Δηλαδή, η s_i^* είναι βέλτιστη απάντηση στη στρατηγική s_{-i}^* όταν, δεδομένου ότι οι άλλοι ακολουθούν την s_{-i}^*, η πληρωμή του παίκτη i μεγιστοποιείται όταν αυτός ακολουθεί την s_i^*.

- Το σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων του παίκτη i στη στρατηγική s_{-i}^* των άλλων είναι το $\{ s_i^* \in S_i : s_i^* = \arg\max_{s_i} \Pi_i(s_i, \underline{s}_{-i}^*)$ και συμβολίζεται με $BR_i(\underline{s}_{-i}^*)$

- Το σύνολο $BR(\underline{s}) = BR_1(\underline{s}_{-1}) \times BR_2(\underline{s}_{-2}) \times \dots \times BR_n(\underline{s}_{-n})$
$$= \prod_{i=1}^{n} BR_i(\underline{s}_{-i})$$
ονομάζεται αντιστοιχία βέλτιστης απάντησης

παράδειγμα 8:

I\II	(left)	(right)
(top)	(7,3)	(5,3)
(bottom)	(7,0)	(3,-1)

$BR_I((left)) = \{(top), (bottom)\}$ 2 βέλτιστες απαντήσεις

$BR_I((right)) = \{(top)\}$

$BR_{II}((top)) = \{(left), (right)\}$

$BR_{II}((bottom)) = \{(left)\}$

$$BR(\underbrace{(\overset{\text{στρατ. I}}{(top)}, \overset{\text{στρατ. II}}{(left)})}_{\text{στρατηγική κατάσταση}}) = BR_I((left)) \times BR_{II}((top))$$

$$= \{(top), (bottom)\} \times \{(left), (right)\}$$

$$= \{\underbrace{((top), (left))}_{1^o \text{ στοιχείο}}, \underbrace{((top), (right))}_{2^o \text{ στοιχείο}}, \underbrace{((bottom), (left))}_{3^o \text{ στοιχείο}}, \underbrace{((bottom), (right))}_{4^o \text{ στοιχείο}}\}$$

$$BR((bottom), (right)) = BR_I((right)) \times BR_{II}((bottom))$$

$$= \{(top)\} \times \{(left)\} = ((top), (left))$$

Παράδειγμα 6: (πόλεμος των φύλων)

I \ II	(τ_2)	(θ_2)
(τ_1)	$(3^*, 1^*)$	$(0,0)$
(θ_1)	$(0,0)$	$(1^*, 3^*)$

στρατ. του II

$BR_I((\tau_2)) = \{(\tau_1)\}$

$BR_I((\theta_2)) = \{(\theta_1)\}$

στρατηγ. του I

$BR_{II}((\tau_1)) = \{(\tau_2)\}$

$BR_{II}((\theta_1)) = \{(\theta_2)\}$

$$
\begin{aligned}
BR((\tau_1),(\tau_2)) &= BR_I((\tau_2)) \times BR_{II}((\tau_1)) \\
&= \{(\tau_1)\} \times \{(\tau_2)\} \\
&= ((\tau_1),(\tau_2))
\end{aligned}
$$

Εδώ αν κάποιος τους προτείνει να ακολουθήσουν την $((\tau_1),(\tau_2))$ και ο καθένας πιστεύει ότι ο άλλος δεν θα αλλάξει, τότε ούτε αυτός έχει κίνητρο να αλλάξει. Έχουμε σημείο στρατηγικής ισορροπίας (ΣΣΙ)

$$
\begin{aligned}
BR((\tau_1),(\theta_2)) &= BR_I((\theta_2)) \times BR_{II}((\tau_1)) \\
&= \{(\theta_1)\} \times \{(\tau_2)\} \\
&= ((\theta_1),(\tau_2))
\end{aligned}
$$

Δεν είναι ΣΣΙ

ορισμός (σημείο στρατηγικής ισορροπίας / Nash equilibrium)

Μια στρατηγική κατάσταση $\underline{s}^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ είναι ΣΣΙ όταν για κάθε παίκτη i η στρατηγική s_i^* είναι βέλτιστη απάντηση στην $\underline{s}^*_{-i}$

Δηλαδή η $\underline{s}^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ είναι ΣΣΙ αν για κάθε παίκτη i $\Pi_i(s_i^*, \underline{s}_{-i}^*) > \Pi_i(s_i, \underline{s}_{-i}^*) \ \forall s_i \in S$

Ισοδύναμα, η $\underline{s}^*$ είναι ΣΣΙ αν $\underline{s}^* \in BR(\underline{s}^*)$

Διαισθητικά μια στρατηγική κατάσταση $\underline{s}^*$ είναι ΣΣΙ αν κάποιος προτείνει σε όλους τους παίκτες να ακολουθήσουν την $\underline{s}^*$ και όλοι θεωρήσουν ότι οι υπόλοιποι δε θα μετακινηθούν από αυτή τη στρατηγική και τότε ούτε αυτοί έχουν κίνητρο να αλλάξουν στρατηγική

Παράδειγμα 3: (Δίλημμα κρατουμένου)

I \ II	(O2)	(Δ.O2)
(O1)	$(-5^*,-5^*)$	$(0^*,-10)$
(ΔO1)	$(-10,0^*)$	$(-1,-1)$

BRI((O2)) = {(O1)}
BRI((Δ.O2)) = {(O1)}
BRII((O1)) = {(O2)}
BRII((Δ.O1)) = {(O2)}

Η στρατηγική ((O1),(O2)) είναι ΣΣΙ

παράδειγμα 10 (the odd couple)

Felix \ Oscar	(3_2)	(6_2)	(9_2)
(3_1)	$(-13,8)$	$(-1,-4^*)$	$(7^*,-4^*)$
(6_1)	$(-4,-1^*)$	$(4^*,-1^*)$	$(4,-4)$
(9_1)	$(1^*,2^*)$	$(1,-1)$	$(1,-4)$

$BR_I((3_2)) = \{(9_1)\}$
$BR_I((6_2)) = \{(6_1)\}$
$BR_I((9_2)) = \{(3_1)\}$
$BR_{II}((3_1)) = \{(6_2),(9_2)\}$
$BR_{II}((6_1)) = \{(3_2),(6_2)\}$
$BR_{II}((9_1)) = \{(3_2)\}$

έχουμε 3 ΣΣΙ $((3_1),(9_2)), ((6_1),(6_2)), ((9_1),(3_2))$

Η $((9_1),(3_2))$ ήταν λύση με ΕΑΚΣ (επαναλ. απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών)

Γενικά αν η $\underline{s}^*$ είναι λύση με κυριαρχες
ή
έχει προκύψει από ΕΑΚΣ
$\Longrightarrow \underline{s}^*$ ΣΣΙ
$\not\Longleftarrow$

5. Μοντέλο Cournot

Περιπτώσεις αγοράς → μονοπώλιο: Η αγορά έχει μόνο μια εταιρία. Κάνει βελτιστοποίηση κέρδους αλλά όχι στρατηγική επιλογή.

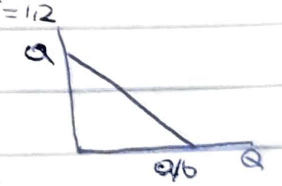
↓

Τέλειος ανταγωνισμός: πάρα πολλές (άπειρες) εταιρίες που παράγουν το ίδιο αγαθό. Δεν υπάρχει στρατηγική επιλογή γιατί η εταιρία δε μπορεί να λάβει υπόψη της τις αποφάσεις όλων των άλλων,

→ ολιγοπώλιο: Η αγορά αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό εταιρών. Εδώ κάθε εταιρία θα κάνει στρατηγικές επιλογές.

Μοντέλο Cournot

- Υπάρχουν 2 εταιρίες στην αγορά (duopoly)
- παράγουν το ίδιο προϊόν (ομογενές)
- Q_i = ποσότητα παραγωγής από την εταιρία i, $i=1,2$
- $Q = Q_1 + Q_2$: συνολική ποσότητα παραγωγής
- συνάρτηση ζήτησης $Q = a - \beta \cdot P$, $a, \beta > 0$ και P τιμή
- συνάρτηση αντίστροφης ζήτησης $P = \underbrace{\frac{a}{\beta}}_{a} - \underbrace{\frac{1}{\beta}}_{= b} Q = a - b \cdot Q$, $Q \leq \frac{a}{b}$
- κόστος παραγωγής για εταιρία i: $C_i(Q_i) = c \cdot Q_i$, $i=1,2$
- κάθε εταιρία θέλει να αποφασίσει την ποσότητα που θα φτιάξει



Υπάρχει παιχνίδι μεταξύ των εταιριών

$\cdot N = \{I, II\}$

• στρατηγικές : $S_I = [0, +\infty)$

$S_{II} = [0, +\infty)$

• πληρωμές : για την I $\Pi_I(Q_1,Q_2) = Q_1[a-b(Q_1+Q_2)] - cQ_1$

$= Q_1[a-b(Q_1+Q_2)-c]$

για την II $\Pi_{II}(Q_1,Q_2) = Q_2[a-b(Q_1+Q_2)] - cQ_2$

$= Q_2[a-b(Q_1+Q_2)-c]$

• βέλτιστη απάντηση της I στη στρατηγική Q_2 της II

$$BR_I(Q_2) = \{Q_1^* \in S_I : Q_1^* = \underset{Q_1\in S_I}{\arg\max}\, \Pi_I(Q_1,Q_2)\}$$

Θέλω να βρω που πετυχαίνεται το $\max\limits_{Q_1}$ της $\Pi_I(Q_1,Q_2)$

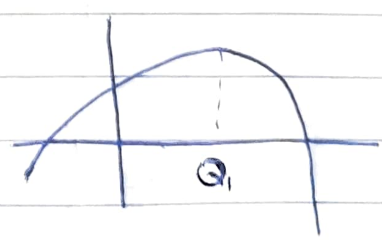
$$\Pi_I(Q_1,Q_2) = Q_1[a-b(Q_1+Q_2)-c]$$

$$\frac{\partial \Pi_I(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1} = 1\,[a-b(Q_1+Q_2)-c] + Q_1(-b)$$

$$= a - 2bQ_1 - bQ_2 - c$$

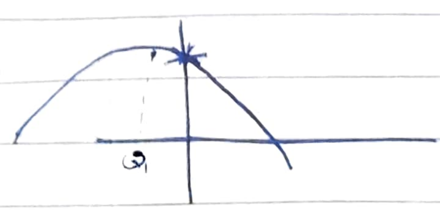
$$\frac{\partial^2 \Pi_I(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1^2} = -2b < 0 \Rightarrow \text{κοίλη ως προς } Q_1$$

$$\frac{\partial \Pi_I(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1} = 0 \Rightarrow a - 2bQ_1 - bQ_2 - c = 0 \Rightarrow Q_1 = \frac{a-c-bQ_2}{2b}$$



Εξετάζω πότε $\frac{a-c-bQ_2}{2b} \geq 0$ 2 περιπτ.

$\Leftrightarrow Q_2 \leq \frac{a-c}{b}$

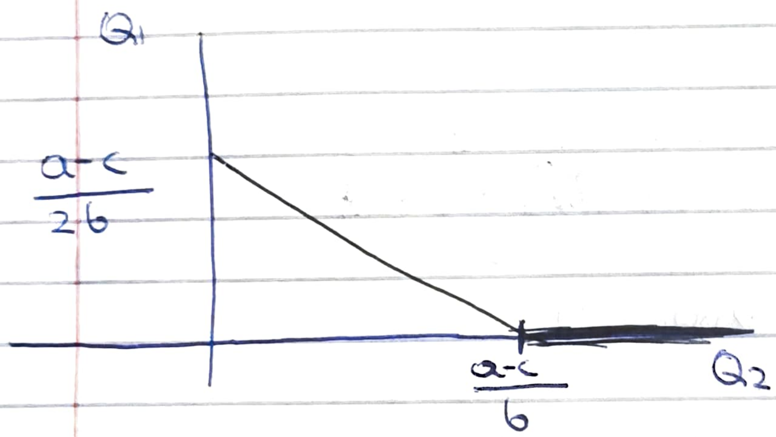


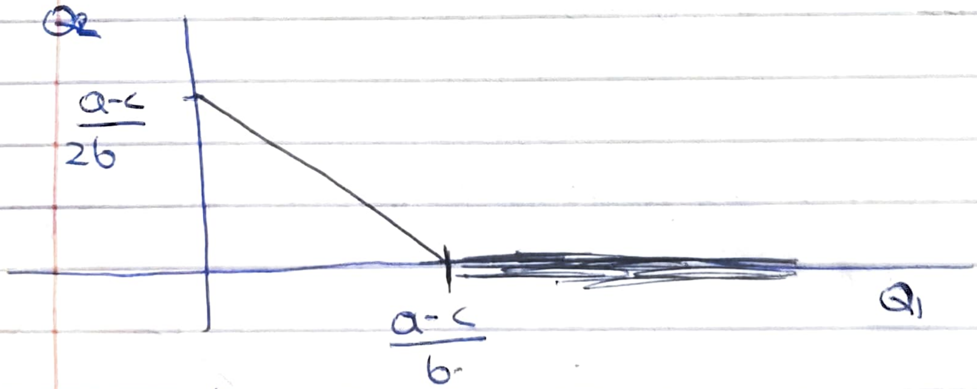
άρα $BR_I(Q_2) = \begin{cases} \dfrac{a-c-bQ_2}{2b} & , \ Q_2 \le \dfrac{a-c}{b} \\ 0 & , \ Q_2 > \dfrac{a-c}{b} \end{cases}$

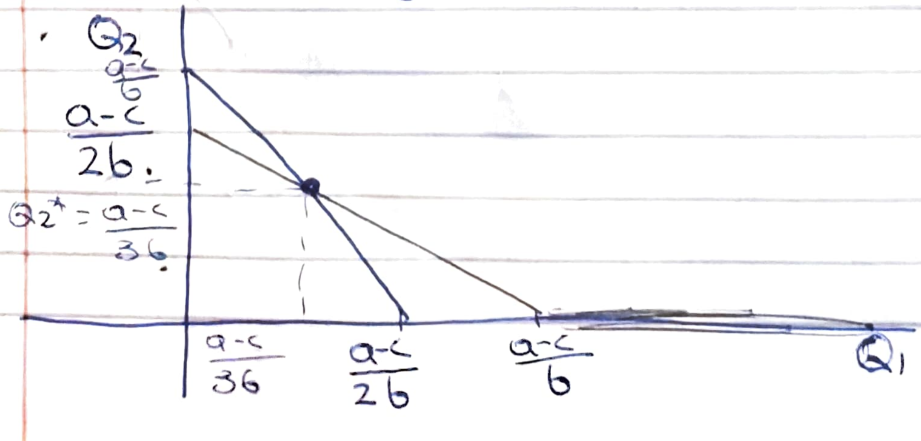
~~$BR_{II}(Q_1)$~~

· Βέλτιστη απάντηση της II στη στρατηγική Q_1 της I

$BR_{II}(Q_1) = \begin{cases} \dfrac{a-c-bQ_1}{2b} & , \ Q_1 \le \dfrac{a-c}{b} \\ 0 & , \ Q_1 > \dfrac{a-c}{b} \end{cases}$







$$(Q_1^*, Q_2^*) \text{ ΣΣΙ} \iff \begin{cases} Q_1^* = BR_{I}(Q_2^*) \\ Q_2^* = BR_{II}(Q_1^*) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Q_1^* = \dfrac{a-c-bQ_2^*}{2b} \\ Q_2^* = \dfrac{a-c-bQ_1^*}{2b} \end{cases} \iff \begin{cases} Q_1^* = \dfrac{a-c-bQ_2^*}{2b} \\ Q_1^* = \dfrac{a-c-2bQ_2^*}{b} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Q_1^* = \dfrac{a-c-bQ_2^*}{2b} \\ \dfrac{a-c-bQ_2^*}{2b} = \dfrac{a-c-2bQ_2^*}{b} \end{cases} \iff \begin{cases} Q_1^* = \dfrac{a-c}{3b} \\ Q_2^* = \dfrac{a-c}{3b} \end{cases}$$

κάτω από το ΣΣΙ: $\begin{cases} Q_1^* = \dfrac{a-c}{3b} \\ Q_2^* = \dfrac{a-c}{3b} \end{cases} \implies Q = \dfrac{2(a-c)}{3b}$

$$\implies P = a - \cancel{b}\,\frac{2(a-c)}{3\cancel{b}} = \frac{a+2c}{3}$$

κέρδος για κάθε εταιρία

$$\Pi_I(Q_1^*, Q_2^*) = Q_1^*\left[a - b(Q_1^* + Q_2^*) - c\right]$$

$$= \frac{a-c}{3b}\left[a - b\,\frac{2\cdot(a-c)}{3b} - c\right] = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

ομοίως $\Pi_{II}(Q_1^*, Q_2^*) = \dfrac{(a-c)^2}{9\cdot b}$

Μοντέλο Cournot με καρτέλ

- οι εταιρίες συνεννοούνται για τις ποσότητες που θα φτιάξουν ώστε να μεγιστοποιήσουν το συνολικό κέρδος και μοιράζουν τα κέρδη
- αποφασίζουν $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$: $\Pi(\hat{Q}_1, \hat{Q}_2) = \max_{Q_1, Q_2} \Pi(Q_1, Q_2)$

όπου $\Pi(Q_1, Q_2) = \Pi_I(Q_1, Q_2) + \Pi_{II}(Q_1, Q_2)$

$= Q_1[a - b(Q_1+Q_2) - c] + Q_2[a - b(Q_1+Q_2) - c]$

$= \underbrace{(Q_1+Q_2)}_{Q} \cdot [a - b\underbrace{(Q_1+Q_2)}_{Q} - c]$

Τελικά $\Pi(Q) = Q[a - bQ - c]$

θέλουν το $\max_{Q} \Pi(Q)$

$$\frac{\partial \Pi(Q)}{\partial Q} = a - bQ - c - bQ = a - 2bQ - c$$

$$\frac{\partial^2 \Pi(Q)}{\partial Q^2} = -2b < 0$$

$$\frac{\partial \Pi(Q)}{\partial Q} = 0 \Rightarrow a - 2bQ - c = 0 \Rightarrow Q = \frac{a-c}{2b}$$

$$\frac{a-c}{2b} \geq 0 \Rightarrow a \geq c \quad ✓$$

$$Q^* = \frac{a-c}{2b}$$

άρα $\hat{Q}_1 = \hat{Q}_2 = \frac{Q^*}{2} = \frac{a-c}{4b}$

το κέρδος θα είναι $\Pi_I(\hat{Q}_1, \hat{Q}_2) = \frac{a-c}{4b}\left[a - b\overbrace{\left(\frac{a-c}{2b}\right)}^{Q^*} - c\right] = \frac{(a-c)^2}{8b}$

Σύγκριση μοντέλων

$$\frac{Q_1^*}{\hat{Q_1}} = \frac{\frac{a-c}{3b}}{\frac{a-c}{4b}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \hat{Q_1} = \frac{3}{4} Q_1^*$$

$$\frac{\Pi_I(Q_1^*, Q_2^*)}{\Pi_I(\hat{Q_1}, \hat{Q_2})} = \frac{\frac{(a-c)^2}{9b}}{\frac{(a-c)^2}{8b}} = \frac{8}{9} \Rightarrow \Pi_I(Q_1^*, Q_2^*) = \frac{8}{9} \Pi_I(\hat{Q_1}, \hat{Q_2})$$