Θεωρια παιχνιδιων 20/01/23

1. εισαγωγή Παραδείγματα, Βασικές έννοιες.

Προβληματα που ειδαμε στην επιχειρησιακή ερευνα μια α.σ. που θελαμε να βελτιστοποιήσουμε
— η α.σ. εξαρτιόταν απο τις δικές μας αποφασεις ομως υπαρχουν καταστασεις που η ωφέλεια μας εξαρτάται και απο τις αποφασεις άλλων.

Παραδειγματα 1) τιμολογηση αγαθων και υπηρεσιων
2) χρηματοδοτηση εργων ερευνας και αναπτυξης
3) Εκλογές.

Παίγνια: Μαθηματικά Μοντέλα για συστηματα οπου λαμβανονται αποφασεις σε καταστάσεις συνεργασίας ή σύγκρουσης.

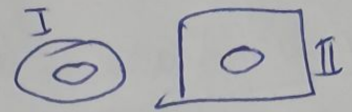
Παραδειγμα 1 παιχνίδι $Nim(n, m)$

Εχουμε 2 στοιβες με ξυλάκια. Η στοιβα A εχει n ξυλάκια και η B εχει m
2 παικτες: I και II
Πρωτα παίζει ο I μετα ο II μετα ο I κλπ
καθε παικτης οταν ερθει η σειρά του Διαλεγει στοιβα και παιρνει απο αυτή οσα ξυλάκια θελει (τουλ 1)
οποιος παρει το τελευταίο ξυλακι κικάει, ο νικητης παιρνει 1€ απο τον χαμένο.

Αν $n = m$ λεγεται ισορροπημένο
Αν $n \neq m$ μη ισορροπημένο

Λυση για ισορροπημενο (n=m)

Nim(1, 1)



ο παικτης I θα παρει ενα ξυλακι απο μια στοιβα. ο II θα παρει απο την αλλη και θα κερδισει.

Nim(1,1) ο I χανει. επισης ο I χάνει και σε οποιοδηποτε αλλο παιχνιδι καταλήξει στο Nim(1,1)

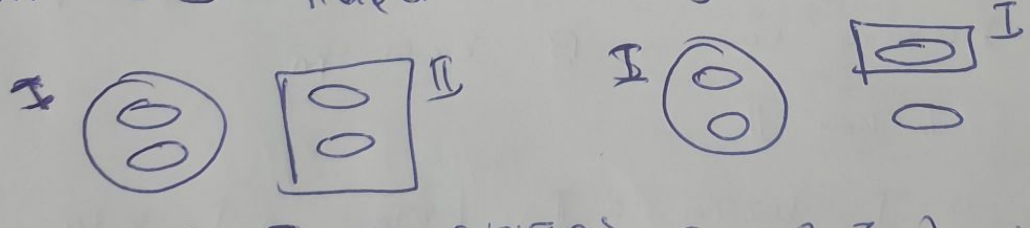
Nim(2, 2)

αν ο I παιρνει 1 ξυλάκι αν παρει ο II ενα ξυλακι απο την αλλη στοιβα. κερδιζει ο II

αν ο II παρει 2 ξυλακια χάνει

αν ο II παρει απο την αλλη στοιβα χανει

αν ο I παρει 2 ξυλακια



ο II παιρνοντας τα 2 ξυλ. κερδιζει

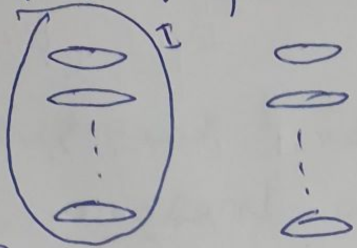
αν ο II παρει 1 ξυλ. χανει.

αρα παντα χανει ο I στο Nim(2, 2)

και σε οποιο παιχνιδι καταλήξει στο Nim(2, 2) χανει ο I

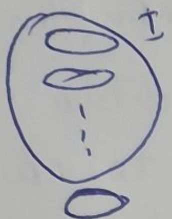
Nim(n, n) , $n \geq 3$

αν ο I παρει και τα n απο τη στοιβα



ο II θα αδειάσει την αλλη στοιβα και θα κερδίσει

αν ο I παρει n−1



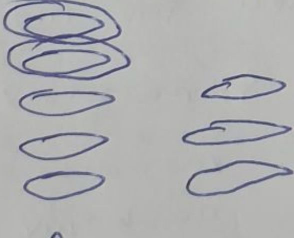
ο II τοτε θα παρει n−1 απο την αλλη στοιβα και θα οδηγήσει το παιχνιδι στο Nim(1, 1)

↳ ο I παρει n−2 το ιδιο και ο II n−2 και θα οδηγήσει το παιχνιδι στο Nim(2, 2) και θα κερδίσει

Γενικα ο II θα τραβάει απο την αλλη στοιβα οσα ξυλακια παιρνει ο I και θα πηγαίνουν σε ισορροπημενο παιχνιδι.

Μη ισορροπημένο $n > m$

nx



ο παικτης I θα παρει n−m ξυλακια ωστε να προκύψει ενα ισορροπημένο παιχνιδι στο οποιο πρωτος παικτης θα ειναι ο II άρα πρωτος παικτης του ισορροπημένου θα ειναι ο I και θα κερδίσει

Παραδειγμα 2 (παιχνιδι των Shapley και Shubik)

3 παικτες Α, Β, Γ
καθε παικτης εχει ενα μπαλόνι και ενα όπλο με το οποίο πυροβολεί τα μπαλονια των αλλων. Ο παίκτης που θα πυροβολίσει πρωτος προκυπτει με κληρωση. (κινηση της φύσης) και αυτος που θα κληρωθεί επιλέγει πιο μπαλόνι θα στοχευσει. Αν αστοχήσει το παιχνίδι ξεκινάει απο την αρχη. Αν ευστοχήσει τοτε ο χτυπημενος φευγει και το παιχνιδι συνεχίζεται με αυτούς που έχουν επιβιώσει.

P(πιθ. ο Α να πετύχει στοχο) $= a$

P(να πετυχει στοχο ο Β) $= b$

P(ο Γ. –||–) $= \gamma$

και εστω $\alpha > B > \gamma$

καθε παικτης θελει να μεγιστοποιήσει την πιθ. επιβιωσής του. T: το παιχνιδι των 3 παικτων

T_{AB}, $T_{B\Gamma}$, $T_{A\Gamma}$ υποπαιχνιδια 2 παικτών

Λυση

T_{AB}: Εστω $P_{AB} = P$(επιβιώσει μονο ο Α)

Δεν υπαρχει αποφαση παικτών

$P_{BA} = P$(επιβιωσει μονο ο Β)
$= 1 - P_{AB}$

τώρα $P_{AB} = \frac{1}{2} a \cdot 1 + \frac{1}{2}(1-a) \cdot P_{AB} + \frac{1}{2} B \cdot 0$

$+ \frac{1}{2}(1-B)\cdot P_{AB} \Rightarrow \ldots P_{AB} = \frac{\alpha}{\alpha+B}$

άρα $P_{BA} = 1 - P_{AB} = \frac{B}{\alpha+B}$

όμοια για $T_{B\Gamma}$: $P_{B\Gamma} = \frac{B}{B+\gamma}$

και $P_{\Gamma B} = \frac{\gamma}{\gamma+B}$

και για $T_{A\Gamma}$: $P_{A\Gamma} = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}$, $P_{\Gamma A} = \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}$

T : εδω υπάρχουν αποφάσεις των παικτων P_A, P_B, P_Γ και τις αποφασεις που θα παίξει ο καθένας

Εστω οτι κληρωνεται ο A (Η πιθανότητα ευστοχιας ειναι ιδια). Αν αποτυχει θα ξεκινησει το T, Αν ευστοχήσει θα παιξει με αυτόν που κένει.

$$P_{AB} < P_{A\Gamma}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha+B} < \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}$$

Θελει να μεινει με τον Γ, Αρα θα επιλέξει τον B. ομοίως ο B (αν η ευση τον επιλεξει) θα στοχευσει τον A, αν η ευση επιλεξει τον Γ θα στοχευσει τον A

Άρα βρήκαμε τις στρατηγικές που θα ακολουθήσουν
υπολογίζουμε πιθ. επιβίωσης

$$P_A = \frac{1}{3}\cdot\alpha\cdot P_{A\Gamma} + \frac{1}{3}(1-\alpha)\cdot P_A +$$

$$+ \frac{1}{3}\cdot\beta\cdot 0 + \frac{1}{3}(1-\beta)\cdot P_A + \frac{1}{3}\cdot\gamma\cdot 0 + \frac{1}{3}(1-\gamma)P_A$$

$$\Rightarrow \dots \ P_A = \frac{\alpha^2}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$P_B = \frac{1}{3}\alpha\cdot 0 + \frac{1}{3}(1-\alpha)P_B + \frac{1}{3}\beta\cdot P_{B\Gamma} + \frac{1}{3}(1-\beta)P_B$$

$$+ \frac{1}{3}\gamma\cdot P_{B\Gamma} + \frac{1}{3}(1-\gamma)\cdot P_B \Rightarrow \dots \ P_B = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$$

όμοια $P_\Gamma = \dfrac{\gamma(2\alpha+\gamma)}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}$

"Παράδοξο": υπάρχει μεγάλο εύρος τιμών α, β, γ με $\alpha > \beta > \gamma$ ώστε $P_A < P_B < P_\Gamma$
(διότι όλοι επιλέγουν τον A!)

Παράδειγμα 3 (Δίλημμα κρατουμένων)
2 ληστές I, II
Η αστυνομία συλλαμβάνει τους υπόπτους για ληστεία
τους ανακρίνει χωριστά και προτείνει μια συμφωνία στον καθένα για να ομολογήσει.
- Αν ομολογήσουν και οι 2 θα έχουν 5 χρόνια φυλάκισης
- Αν δεν ομολογήσει κανένας → 1 έτος φυλάκισης
- Αν ομολογήσει μόνο 1 αυτός που ομολογεί

απελευθερώνεται ο άλλος φυλακίζεται για 10 χρόνια.

I \ II	Ο	ΔΟ
Ο	(5,5)	(0,10)
ΔΟ	(10,0)	(1,1)

Ο Ι σκέφτεται: αν ο ΙΙ ομολογήσει με συμφέρει να ομολογήσω, Αν ο ΙΙ δεν ομολογήσει με συμφέρει να ομολογήσω.
Άρα ομολογεί.

Ομοίως και για τον ΙΙ: (ομολογεί)
Άρα ομολογούν και οι 2 και φυλακίζονται από 5 χρόνια

ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ:

1) Ποιος, παίκτες: στρατηγικές οντότητες που παίρνουν αποφάσεις
2) Πότε; σειρά με την οποία αποφασίζουν οι παίκτες
3) Τι; στρατηγικές δυνατές αποφάσεις κάθε παίκτη (σε κάθε σημείο του παιχνιδιού)
4) πληρωμή ή ωφέλεια: το αποτέλεσμα για κάθε συνδυασμό αποφάσεων.

• ΜΟΡΦΕΣ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ ΠΑΙΧΝΙΔΙΩΝ

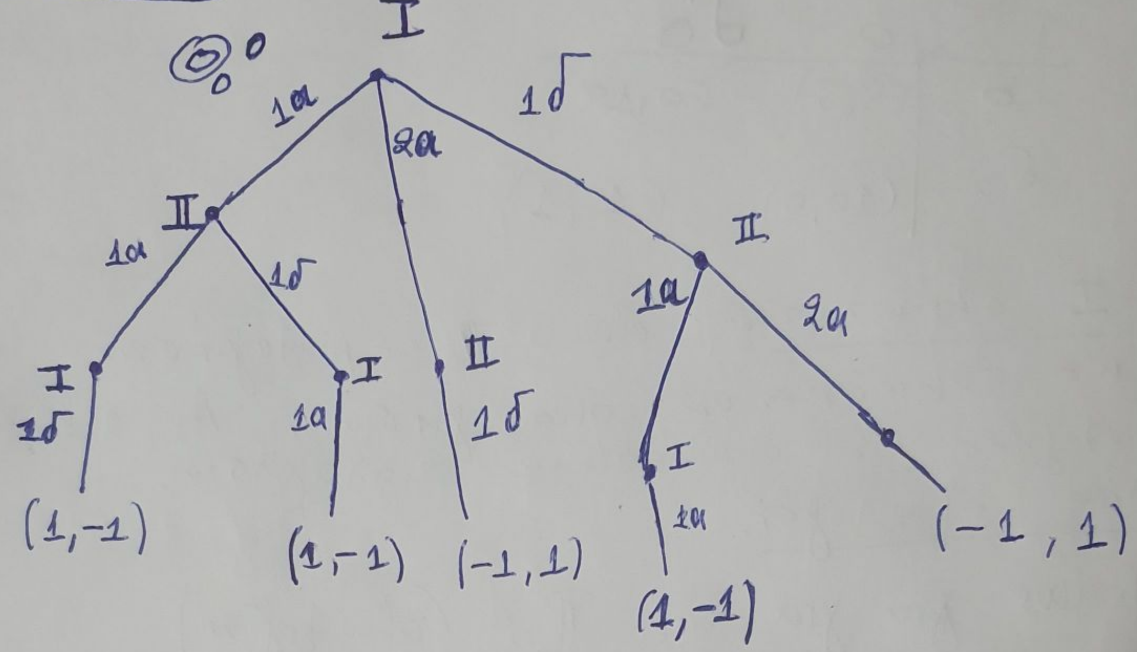
1) ΕΚΤΕΤΑΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ: Σε μορφή δέντρου

2) ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ: Δίνουμε στρατηγικές και πληρωμές σε πίνακα

Παραδειγμα 1)

Nim(2,1)

<u>Εκτεταμένη μορφή:</u>



- Σε καθε ακμη γραφουμε των αντιστοιχα αποφαση του παικτη.
- Στις τερματικες ακμές <u>γραφουμε</u> τις πληρωμές των παικτών.

Παρατηρήσεις: 1) Σε αυτο το παιχνιδι δεν ειχαμε κινήσεις της φυσης (αβεβαιότητα)

2) καθε παικτης γνωριζε τι επαιξε ο προηγουμενος (Δεν ειχαμε ταυτοχρονες αποφάσεις)

<u>παραδειγμα:</u> (Ρωσική Ρουλέτα)

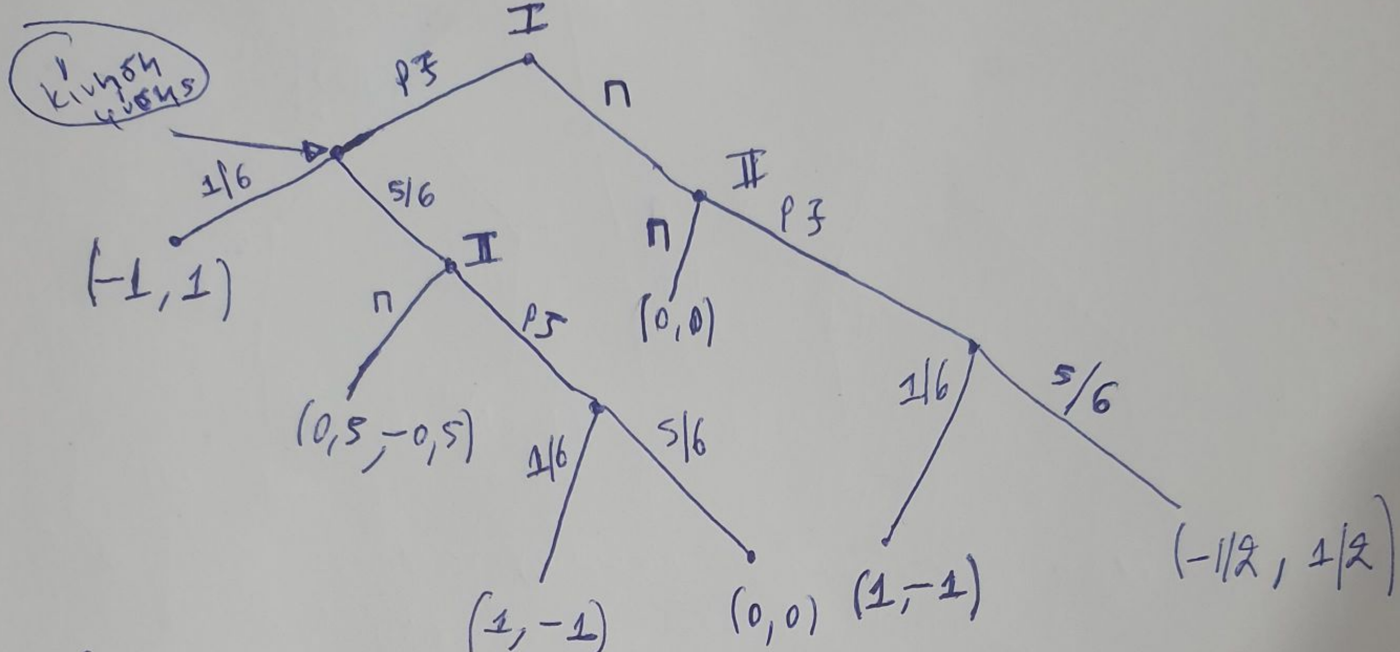
οι παικτες I και II

Βαζουν αρχικά 1 €

ξεκινάει ο I
- Βαζει αλλο 1€ και περνάει
- ριχνει ζαρι
  - αν ερθει 1 χανει κερδιζει ο II τα χρηματα
  - αν ερθει απο 2-6 περνάει στην επομενη φάση

αν ο I περάσει παίζει ο II με τον ίδιο τρόπο
αν περάσουν και οι δυο ~~xxx~~ το παιχνίδι τελειώνει
και οι παίκτες μοιράζονται τα χρήματα

Εκτεταμένη μορφή:



(παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος) (άθροισμα αμοιβών = 0)