ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ
Σ. ΤΟΥΜΠΗΣ

ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2023-2024

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. Περίληψη:
   (α΄) Υπάρχει μια ομάδα ασκήσεων για κάθε ένα των σημειώσεων, και η καταληκτική ημερομηνία παράδοσής της θα είναι περίπου 10 μέρες μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου.
   (β΄) Η καταληκτική ημέρα παράδοσης κάθε ομάδας ανακοινώνεται στο μάθημα και αναρτάται στην ατζέντα του eClass τουλάχιστον μια εβδομάδα νωρίτερα.
   (γ΄) Μετά την διόρθωσή τους, οι ομάδες θα επιστρέφονται.
   (δ΄) Οι λύσεις μιας ομάδας ασκήσεων αναρτώνται στο eClass λίγες μέρες μετά την ημερομηνία παράδοσης της επόμενης ομάδας ασκήσεων.
   (ε΄) Οι βαθμολογίες αναρτώνται στο eClass, και αυξάνουν, υπό προϋποθέσεις, την τελική βαθμολογία.
2. Επίδραση στον τελικό βαθμό:
   (α΄) Οι ασκήσεις προσφέρουν bonus 2 (στις 10) μονάδων, **εφόσον ο βαθμός στην τελική εξέταση είναι προβιβάσιμος**, δηλαδή 5 και άνω.
   (β΄) Δεν χρειάζεται να παραδώσετε όλες τις ομάδες ασκήσεων για να πάρετε το bonus. Μπορείτε να παραδώσετε τις μισές για να πάρετε μια μονάδα (εφόσον βέβαια είναι σωστές), κ.ο.κ. Ομοίως, δεν απαιτείται να παραδώσετε όλες τις ασκήσεις μιας ομάδας.
   (γ΄) **Δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, για να πάρετε το bonus, εργασίες παρελθόντων ετών.**
3. Παράδοση (γενικές οδηγίες):
   (α΄) Μπορείτε να παραδώσετε τις ομάδες σας ΜΟΝΟ ηλεκτρονικά.
   (β΄) Απαγορεύεται η τμηματική παράδοση μιας ομάδας (για παράδειγμα, η μισή μια μέρα και η μισή κάποια άλλη μέρα).
   (γ΄) Πριν την παράδοση, γράψτε, ευανάγνωστα, οπωσδήποτε το όνομά σας, τον αριθμό της ομάδας ασκήσεων, και, αν έχετε, τον αριθμό μητρώου σας, πάνω δεξιά στην πρώτη σελίδα.
   (δ΄) Μπορείτε να γράφετε με μολύβι ή/και με στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός κόκκινου.
   (ε΄) Μπορείτε να παραδώσετε την ομάδα σας οποτεδήποτε πριν την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης.
4. Ηλεκτρονική παράδοση:
   (α΄) Η ηλεκτρονική παράδοση γίνεται αποκλειστικά μέσω του ειδικού εργαλείου του eClass, και όχι με αποστολή email στο διδάσκοντα.
   (β΄) Δεκτά είναι μόνο σκαναρισμένα ή δακτυλογραφημένα έγγραφα (με χρήση MS WORD κτλ.), και όχι, για παράδειγμα, φωτογραφίες.
   (γ΄) Αποφύγετε πάντως την δακτυλογράφηση των εργασιών. Μπορείτε να αξιοποιήσετε τον πεπερασμένο χρόνο σας πολύ καλύτερα.
   (δ΄) Παραδίδετε για κάθε εργασία **ένα μόνο ασυμπίεστο αρχείο PDF ή doc μεγέθους το πολύ 3MB** με ονομασία τον αριθμό μητρώου σας και τίποτα άλλο (π.χ. 3030666.pdf).
   (ε΄) Μην αφήνετε σχόλια στο eClass μέσω του σχετικού εργαλείου, εκτός αν είναι απόλυτη ανάγκη.
   (ϛ΄) Προσοχή: ενδέχεται η δυνατότητα ηλεκτρονικής υποβολής των ασκήσεων μέσω του αντίστοιχου εργαλείου του eClass να ενεργοποιηθεί λίγες μόνο μέρες πριν την καταληκτική προθεσμία παράδοσης, και αρκετά μετά την ανακοίνωση αυτής της προθεσμίας.
   (ζ΄) Καταληκτική ώρα παράδοσης: **Παραδίδετε ηλεκτρονικά την ομάδα μέχρι τις 11:59μμ της ανακοινωμένης ημέρας παράδοσης.**

(η΄) ΔΕΝ ΘΑ ΓΙΝΟΥΝ ΔΕΚΤΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΠΟΥ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΥΝ ΣΟΒΑΡΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΩ ΟΔΗΓΙΕΣ.

5. Αλλαγές στην ημέρα παράδοσης:

   (α΄) Σε περίπτωση που η καταληκτική ημέρα παράδοσης μιας ομάδας ασκήσεων είναι ημέρα διάλεξης και η διάλεξη ακυρωθεί ή αναβληθεί, η υποβολή της ομάδας μετατίθεται αυτόματα για την ημέρα της επόμενης διάλεξης, χωρίς να προηγηθεί ανακοίνωση από τον διδάσκοντα.

   (β΄) Μπορείτε να καθυστερήσετε την παράδοση των ομάδων ασκήσεων, χωρίς επίπτωση, βάσει του ακόλουθου κανόνα: Μπορείτε να καθυστερήσετε το πολύ ΔΥΟ ομάδες ασκήσεων, και να τις παραδώσετε όταν θα παραδίδατε και την επόμενη κάθε μιας από αυτές, αν οι ημερομηνίες παράδοσής τους διαφέρουν, ή την πρώτη που ακολουθεί με διαφορετική ημερομηνία παράδοσης, αν η ημερομηνία παράδοσής τους είναι κοινή. Επομένως, αν η ομάδα i έχει ημερομηνία παράδοσης την X_i και η ομάδα $i+1$ έχει ημερομηνία παράδοσης την X_{i+1}, τότε μπορείτε να παραδώσετε την ομάδα i στην ημερομηνία X_{i+1}, εφόσον $X_{i+1} > X_i$, αλλιώς στο πρώτο $X_k > X_i$. ΟΜΩΣ, δεν μπορείτε να παραδώσετε μια ομάδα σε κάποια ημερομηνία $X_l > X_k > X_i$.

   (γ΄) Μην ζητήσετε παράταση εκ των προτέρων: απλώς ο διορθωτής θα δει ότι παραδώσατε καθυστερημένα την ομάδα. Οι ομάδες ασκήσεων που παραδίδονται εκπρόθεσμα παραδίδονται όπως και οι άλλες.

6. Διόρθωση:

   (α΄) Η διόρθωση θα είναι πρόχειρη, λόγω έλλειψης ανθρώπινων πόρων.

   (β΄) Αν οι πράξεις που απαιτούνται για να προκύψει ένα αριθμητικό αποτέλεσμα είναι αρκετές, μπορείτε να δώσετε το εν λόγω αποτέλεσμα ως έκφραση που περιέχει παραγοντικά, συνδυασμούς, γινόμενα με πολλούς παράγοντες, αθροίσματα με πολλούς όρους, κτλ., χωρίς καμία βαθμολογική απώλεια.

   (γ΄) Όλες οι ομάδες ασκήσεων έχουν την ίδια βαρύτητα. Όχι όμως και όλες οι ασκήσεις σε μια ομάδα.

7. Επιστροφή διορθωμένων εργασιών και ανακοίνωση βαθμολογίας:

   (α΄) Οι εργασίες θα διορθώνονται με καθυστέρηση τουλάχιστον ενός μήνα από την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης.

   (β΄) Αν έχετε ενστάσεις σχετικά με τη διόρθωση, ελάτε με την διορθωμένη ομάδα σας σε ώρες γραφείου του διδάσκοντα.

   (γ΄) Αν δεν μπορείτε να βρείτε την βαθμολογία της εργασίας σας στο σχετικό έγγραφο, ενημερώστε τον διδάσκοντα.

8. Συνεργασία:

   (α΄) Μπορείτε να συνεργαστείτε όσο θέλετε, και να ανταλλάξετε προφορικά ιδέες, ακόμα και λύσεις.

   (β΄) Αρκεί ο καθένας να γράψει μόνος του την λύση του, και να καταλαβαίνει τι γράφει.

   (γ΄) Εργασίες εμφανώς αντιγραμμένες θα μηδενίζονται, και **όλο το bonus του συγγραφέα τους θα τίθεται αμετάκλητα στο μηδέν.** Επομένως, άλλες εργασίες που έχει ήδη παραδώσει ή θα παραδώσει στο μέλλον δεν θα έχουν επίδραση στο τελικό του βαθμό.

   (δ΄) Απαγορεύεται να δείτε λύσεις ασκήσεων παλαιοτέρων ετών ή λύσεις των ίδιων ασκήσεων από το διαδίκτυο.

9. Σημαντικά σχόλια:

   (α΄) Προσπαθήστε να είστε κατά το δυνατόν σαφείς στις λύσεις σας. Δεν βοηθά μόνο τους διορθωτές, αλλά και εσάς να οργανώνετε τη σκέψη σας καλύτερα.

   (β΄) Ενημερώστε άμεσα τον διδάσκοντα σε περίπτωση εύρεσης λάθους είτε στις εκφωνήσεις είτε στις λύσεις.

   (γ΄) Ενημερώστε τον διδάσκοντα αν η παράδοση μιας ομάδας ασκήσεων συμπίπτει με την παράδοση ασκήσεων άλλων μαθημάτων του **ίδιου** εξαμήνου. (*Ενδεχομένως* να υπάρξει αλλαγή, αν η ύλη το επιτρέπει.)

   (δ΄) Για την εύρυθμη λειτουργία του μαθήματος, προσπαθήστε να τηρήσετε κατά το δυνατόν όλες τις άνω οδηγίες.

   (ε΄) **Βλέπετε το mail που σας έχει χορηγήσει το ΟΠΑ.** Το έχετε για να επικοινωνούν μαζί σας οι διδάσκοντες, εκτός των άλλων και όταν υπάρχει πρόβλημα με την παράδοση κάποιας εργασίας.

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. **(Τρία ενδεχόμενα)** Έστω A, B, C τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Βρείτε κατάλληλες εκφράσεις για τα ενδεχόμενα:

   (α΄) Πραγματοποίηση μόνο του B.

   (β΄) Πραγματοποιήθηκαν το A και το B αλλά όχι το C.

   (γ΄) Τουλάχιστον ένα από τα συγκεκριμένα ενδεχόμενα πραγματοποιείται.

   (δ΄) Τουλάχιστον δύο από τα ενδεχόμενα πραγματοποιούνται.

   (ε΄) Και τα τρία ενδεχόμενα πραγματοποιούνται.

   (ϛ΄) Κανένα από τα ενδεχόμενα δεν πραγματοποιείται.

   (ζ΄) Το πολύ ένα πραγματοποιείται.

   (η΄) Το πολύ δύο πραγματοποιούνται.

2. **(Μικτός δειγματικός χώρος)** Ένα συνηθισμένο εξάπλευρο ζάρι ρίχνεται και το αποτέλεσμα N_1 καταγράφεται. Κατόπιν επιλέγεται ακέραιος N_2 από το 1 έως και το N_1.

   (α΄) Περιγράψτε το δειγματικό χώρο Ω.

   (β΄) Περιγράψτε το ενδεχόμενο $A =$«το αποτέλεσμα του ζαριού ήταν 4».

   (γ΄) Περιγράψτε το ενδεχόμενο B στο οποίο $N_2 = 3$.

   (δ΄) Περιγράψτε το ενδεχόμενο C στο οποίο $N_2 = 6$.

3. **(Δύο ζαριές)** Ένα ζάρι ρίχνεται 2 φορές και οι αριθμοί των κουκίδων καταγράφονται με τη σειρά που ήρθαν.

   (α΄) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος Ω;

   (β΄) Από ποια αποτελέσματα αποτελείται το ενδεχόμενο $A =$«το άθροισμα των κουκίδων είναι ζυγό»;

   (γ΄) Από ποια αποτελέσματα αποτελείται το ενδεχόμενο $B =$«και τα δύο ζάρια είναι ζυγά»;

   (δ΄) Το B είναι υποσύνολο του A ή το αντίστροφο;

   (ε΄) Από ποια αποτελέσματα αποτελείται το ενδεχόμενο $A \cap B'$; Περιγράψτε το με λόγια.

   (ϛ΄) Έστω C το ενδεχόμενο «οι ρίψεις διαφέρουν κατά 1». Ποιο είναι το ενδεχόμενο $A \cap C$;

4. **(Διαφορά μεταξύ αριθμών)** Δύο αριθμοί επιλέγονται τυχαία από το διάστημα $[0, 1]$, και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Η επιλογή είναι ομοιόμορφη, δηλαδή χωρίς να δείχνουμε προτίμηση στα σημεία κάποιου υποσυνόλου του $[0, 1]$. Βρείτε την πιθανότητα οι αριθμοί να διαφέρουν (κάτ' απόλυτη τιμή) περισσότερο από $\frac{1}{2}$. *(Υπόδειξη: μελετήστε το τετράγωνο $[0, 1] \times [0, 1]$ του R^2.)*

5. **(Πρόβλημα Γαλιλαίου)** Ρίχνουμε διαδοχικά 3 συνηθισμένα ζάρια. Θεωρούμε ότι τα $6^3 = 216$ δυνατά αποτελέσματα του πειράματος είναι ισοπίθανα.

   (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου A το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 9;

   (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου B το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 10;

6. **(Τυχαία συνάντηση)** Δύο άτομα, ο A και ο B, επισκέπτονται ένα μπαρ. Οι ώρες αφίξεως τους είναι X και Y, αντίστοιχα, όπου $0 \leq X, Y \leq T$. Αν ο A μένει για t_1 και ο B μένει για t_2 μονάδες χρόνου, ποια η πιθανότητα ότι ο A και ο B θα συναντηθούν;

7. **(Ανισότητα Bonferroni)** Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε δύο ενδεχόμενα A, B, ισχύει η ανισότητα

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

   Ακολούθως να δείξετε ότι, πιο γενικά,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n - 1).$$

8. **(Αυστηρή ανισότητα)** Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, ισχύει η ιδιότητα $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$, όπου A, B ενδεχόμενα. Να αποδείξετε ότι ισχύει και η ακόλουθη, ή να δώσετε αντιπαράδειγμα:

$$A \subset B \Rightarrow P(A) < P(B).$$

2η Ομάδα Ασκήσεων

9. **(Παπουτσοθήκη)** Σε μια παπουτσοθήκη υπάρχουν 15 ζεύγη παπουτσιών, όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Επιλέγουμε στην τύχη, και χωρίς προτίμηση στις επιλογές, 3 αριστερά παπούτσια και 2 δεξιά παπούτσια. Έστω X το πλήθος των πλήρων ζευγαριών που θα βρεθούν μεταξύ των 5 παπουτσιών που θα επιλέξουμε. Παρατηρήστε πως η Τ.Μ. X μπορεί να λάβει τις τιμές $X = 0$ (αν κανένα δεξί παπούτσι δεν είναι ζεύγος με κάποιο από τα αριστερά), $X = 1$ (αν μόνο το ένα από τα δύο δεξιά παπούτσια είναι ζεύγος με κάποιο από τα τρία αριστερά), ή $X = 2$ (αν και τα δύο δεξιά παπούτσια είναι ζεύγη με δύο από τα τρία αριστερά παπούτσια). Να υπολογίσετε τις αντίστοιχες πιθανότητες, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$.

10. **(Άσοι)** Μοιράζουμε στην τύχη 10 φύλλα από μια συνηθισμένη τράπουλα 52 φύλλων. Ποια η πιθανότητα να περιέχει η μοιρασιά:

    (α΄) κανέναν άσσο;

    (β΄) το πολύ τρεις άσσους;

    (γ΄) τουλάχιστον έναν άσο και τουλάχιστον μια φιγούρα (δηλαδή βαλέ, ντάμα, ή ρήγα);

11. **(Seven Card Stud)** Κατά τα γνωστά, μια τράπουλα αποτελείται από $4 \times 13 = 52$ φύλλα, που χωρίζονται, με δύο διαφορετικούς τρόπους, σε 4 φυλές ($\diamondsuit$, $\spadesuit$, $\heartsuit$, $\clubsuit$) και 13 νούμερα $(A, 2, 3, \ldots, 10, J, Q, K)$. Σε ένα παιχνίδι Seven Card Stud κάθε παίκτης λαμβάνει 7 φύλλα από μια τράπουλα.

    (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου A ένας παίκτης να έχει 7 φύλλα της ίδιας φυλής; (Για παράδειγμα, 7 κούπες.)

    (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου B ένας παίκτης να έχει τουλάχιστον 5 φύλλα της ίδιας φυλής; (Για παράδειγμα 5,6 ή 7 κούπες).

    (γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου C ένας παίκτης να έχει τρία ζεύγη αλλά καμία τριάδα ή τετράδα; (Ένα αποτέλεσμα που ανήκει στο ενδεχόμενο είναι να έχει τα φύλλα $(3\spadesuit, 3\heartsuit, 7\heartsuit, 7\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, 8\spadesuit)$).

12. **(n ζευγάρια διαγωνιζόμενων)** Σε ένα διαγωνισμό παίρνουν μέρος n ζευγάρια ατόμων. Αν πρόκειται να απονεμηθούν τυχαία στους $2n$ διαγωνιζόμενους n βραβεία, έτσι ώστε κάθε ένα άτομο να πάρει το πολύ ένα βραβείο, και χωρίς κάποια προτίμηση στα άτομα που θα πάρουν τα βραβεία, ποια είναι η πιθανότητα να πάρει βραβείο ακριβώς ένα από τα δύο άτομα σε κάθε ένα από τα ζευγάρια;

13. **(Λεωφορείο)** Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με k φοιτητές και περνάει από n στάσεις.

    (α΄) Να κατασκευαστεί δειγματικός χώρος για τις δυνατές αποβιβάσεις των φοιτητών, και να υπολογισθεί ο αριθμός των δυνατών αυτών αποβιβάσεων.

    (β΄) Να υπολογισθεί η πιθανότητα τουλάχιστον σε μια στάση να αποβιβαστούν περισσότεροι από ένας φοιτητές.

14. **(Τράπουλα)** Ποια η πιθανότητα τραβώντας 5 φύλλα στην τύχη από μια τράπουλα να φέρετε:

    (α΄) Άσο μπαστούνι, δηλαδή να περιέχεται το φύλλο $A\spadesuit$.

    (β΄) Οποιονδήποτε άσο ανάμεσα στα φύλλα σας.

    (γ΄) Φουλ του άσου, δηλαδή 3 άσους και τα υπόλοιπα 2 φύλλα να είναι όμοια (π.χ., 2 ντάμες).

    Υποθέστε ότι όλοι οι συνδυασμοί 5 φύλλων είναι ισοπίθανοι.

15. **(Δώρα)** 6 άτομα ανταλλάσσουν δώρα εντελώς τυχαία. Ποια η πιθανότητα ένα τουλάχιστον από τα άτομα να λάβει το δικό του δώρο;

    Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την ακόλουθη εξίσωση:

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\},\ |I|=k} P\left(\cap_{i \in I} A_i\right).$$

3η Ομάδα Ασκήσεων

16. **(Δημοφιλία)** Έξι άτομα, έστω A, B, C, D, E, και F είναι διατεταγμένα σύμφωνα με τη δημοφιλία τους, χωρίς όμως να γνωρίζουν τη διάταξή τους, και υποθέτουν ότι όλες οι διατάξεις είναι εξίσου πιθανές. Με δεδομένο ότι τα άτομα μαθαίνουν ότι ο A είναι πιο δημοφιλής από τον B, ποια είναι η πιθανότητα που δίνουν στο ενδεχόμενο ο A να είναι πιο δημοφιλής και από τον C;

17. **(Φωτιές)** Σε ένα δάσος θα ξεσπάσει κάθε καλοκαίρι έστω και μία πυρκαγιά με πιθανότητα 0.3, αν την προηγούμενη άνοιξη δεν έχει βρέξει σε αυτό, με πιθανότητα 0.2 αν την προηγούμενη άνοιξη έχει βρέξει σε αυτό 1 φορά, και με πιθανότητα 0.1 αν την προηγούμενη άνοιξη έχει βρέξει σε αυτό 2 φορές. Κάθε άνοιξη σε αυτό το δάσος βρέχει 0, 1, ή 2 φορές με πιθανότητες, αντίστοιχα, 0.3, 0.3, και 0.4.

    (α´) Με δεδομένο ότι ξέσπασε έστω και μια πυρκαγιά στο δάσος σε ένα καλοκαίρι, ποια η πιθανότητα να είχε βρέξει σε αυτό το δάσος την προηγούμενη άνοιξη 2 φορές;

    (β´) Δίνεται ότι τα ενδεχόμενα να ξεσπάσει έστω και μια πυρκαγιά σε διαφορετικά έτη είναι ανεξάρτητα. Ποια είναι η μάζα πιθανότητας της Τ.Μ. X που εκφράζει το πλήθος των ετών εντός μιας δεκαετίας κατά τα οποία θα ξεσπάσει έστω μια πυρκαγιά;

18. **(Χυλόπιτα)** Την πρώτη φορά που ο Ρωμαίος κάνει ερωτική εξομολόγηση στην Ιουλιέτα, αυτή αποκρίνεται θετικά με πιθανότητα 50%. Αν τον απορρίψει, αυτός ξανακάνει ερωτική εξομολόγηση, αλλά με πιθανότητα θετικής απόκρισης 20%. Αν η Ιουλιέτα τον απορρίψει και πάλι, ο Ρωμαίος κάνει μια τελευταία προσπάθεια, αλλά με πιθανότητα επιτυχίας 10%. Ποια είναι η πιθανότητα τελικά να τα φτιάξει ο Ρωμαίος με την Ιουλιέτα αν είναι διατεθειμένος να εξαντλήσει και τις τρεις προσπάθειές του;

19. **(Σύνοδος Κορυφής)** Σε μια σύνοδο κορυφής, δύο αρχηγοί κρατών επιλέγουν, για τον επιθετικό προσδιορισμό ενός κράτους, μια διάταξη τριών λέξεων επιλεγμένων από τις ακόλουθες δέκα: Republika, Nova, Severna, Gorna, Vardarska, (Skopje), Ilidenska, Wakanda, Mordor, Tatooine. Όλες οι δυνατές διατάξεις είναι ισοπίθανες.

    (α´) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλεγούν, στη διάταξη των τριών λέξεων, οι λέξεις Gorna και Severna, και επιπλέον η λέξη Gorna να εμφανίζεται σε κάποια θέση πριν τη λέξη Severna;

    (β´) Με δεδομένο ότι μια από τις τρεις λέξεις που τελικά επελέγησαν είναι η Wakanda, ποια είναι η πιθανότητα να ΜΗΝ έχει επιλεγεί ΚΑΙ η λέξη Mordor;

20. **(Τρεις περιπτώσεις)** Έχουμε τρία χαρτιά τα οποία καλούμε AA, MM, AM. Το AA έχει και τις δύο πλευρές χρωματισμένες άσπρες, το MM και τις δύο μαύρες, ενώ το AM έχει την μία πλευρά χρωματισμένη άσπρη και την άλλη μαύρη. Ένας φίλος μας επιλέγει ένα χαρτί στην τύχη και μας δείχνει μόνο ότι η μια πλευρά του είναι άσπρη. Ποια είναι η πιθανότητα η άλλη πλευρά να είναι μαύρη; Απαντήστε το ερώτημα κάνοντας διαδοχικά τις ακόλουθες παραδοχές:

    (α´) Ο φίλος μας δείχνει τη μια πλευρά χωρίς να τη διαλέξει, αλλά επιλέγοντάς την στην τύχη, χωρίς προτίμηση στην πλευρά.

    (β´) Ο φίλος μας δείχνει τη μια πλευρά προτιμώντας να δείξει, αν μπορεί, μια άσπρη πλευρά.

    (γ´) Ο φίλος μας δείχνει τη μια πλευρά προτιμώντας να δείξει, αν μπορεί, μια μαύρη πλευρά.

21. **(Κάδος)** Από έναν κάδο που περιέχει 10 άσπρες, 20 μαύρες και 30 κόκκινες μπάλες, επιλέγουμε 4 χωρίς επανατοποθέτηση.

    (α´) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε τουλάχιστον μία άσπρη μπάλα;

    (β´) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε τουλάχιστον μία άσπρη μπάλα δεδομένου ότι δεν επιλέξαμε καμία κόκκινη;

    (γ´) Ποια είναι η πιθανότητα να μην επιλέξαμε καμία κόκκινη μπάλα, δεδομένου ότι επιλέξαμε τουλάχιστον μία άσπρη;

22. **(Πινιάτα)** Μια πινιάτα σπάει αν δεχτεί ένα δυνατό χτύπημα ή δύο μέτρια χτυπήματα. Σε ένα πάρτι, αν ένα παιδί χτυπήσει την πινιάτα έχει πιθανότητες $\frac{1}{4}$ να δώσει ένα δυνατό χτύπημα, $\frac{1}{4}$ να δώσει ένα μέτριο χτύπημα, και $\frac{1}{2}$ να αστοχήσει. 4 παιδιά μπαίνουν σε σειρά για να χτυπήσουν μια πινιάτα, διαδοχικά, και μια φορά το καθένα. Ποια είναι η πιθανότητα να τη σπάσουν; Όλα τα χτυπήματα είναι ανεξάρτητα.

23. **(Κανόνας δεσμευμένης ολικής πιθανότητας)** Να δειχθεί πως, για τρία οποιαδήποτε ενδεχόμενα E, F και G, έχουμε:

$$P(E|F) = P(E|G \cap F)P(G|F) + P(E|G' \cap F)P(G'|F).$$

24. **(Τέσσερα διαφορετικά κέρματα)** Έχουμε 4 κέρματα. Τα δύο πρώτα είναι δίκαια, το τρίτο έρχεται γράμματα με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και το τέταρτο έρχεται γράμματα με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Διαλέγουμε ένα κέρμα στην τύχη, το ρίχνουμε 2 φορές, και φέρνουμε δύο φορές γράμματα. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε ένα από τα δύο δίκαια κέρματα;

4η Ομάδα Ασκήσεων

25. **(Βάσια)** Ο κυβερνήτης του υποβρυχίου «Χατζηπαναγής» έχει στο στόχαστρο ένα κομβόι από 2 εχθρικά μεταγωγικά, το A και το B. Έχει στη διάθεσή του 5 τορπίλες, τις οποίες, για λόγους ασφαλείας, πρέπει να εκτοξεύσει όλες, και σχεδόν ταυτόχρονα, και πριν προλάβει να διαπιστώσει αν κάποια από αυτές έχει βρει στόχο. Κάθε τορπίλη θα πετύχει και θα βυθίσει το μεταγωγικό στο οποίο θα τη στείλει ο καπετάνιος με πιθανότητα $p = \frac{1}{4}$. Ο καπετάνιος ξέρει ότι το μεταγωγικό A έχει αξία, για τον εχθρό, 4 εκατομμύρια ευρώ, ενώ το μεταγωγικό B έχει αξία 8 εκατομμύρια ευρώ.

    (α΄) Αν ο καπετάνιος στείλει 3 τορπίλες στο μεταγωγικό A και 2 τορπίλες στο μεταγωγικό B, πόση είναι η αναμενόμενη τιμή της ζημιάς που θα επιφέρει στον εχθρό;

    (β΄) Αν ο καπετάνιος θέλει να μεγιστοποιήσει τη ζημιά που θα επιφέρει στον εχθρό, πόσες τορπίλες πρέπει να στείλει στο μεταγωγικό A και πόσες στο B;

26. **(Δράκοι και βαλλίστρες)** 10 βαλλίστρες βρίσκονται αντιμέτωπες με 2 δράκους. Κάθε βαλλίστρα μπορεί να εκτοξεύσει ένα μόνο βέλος, προς έναν από τους δύο δράκους, και θα τον πετύχει με πιθανότητα $p = 0.2$, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Ένα χτύπημα από ένα βέλος αρκεί για να σκοτώσει τον κάθε δράκο. Όλες οι βαλλίστρες θα βάλλουν ταυτόχρονα.

    (α΄) Έστω ότι 3 από τις βαλλίστρες θα στοχεύσουν τον 1 δράκο, και οι άλλες 7 θα στοχεύσουν τον άλλο. Έστω X το πλήθος των δράκων που επιβιώνουν. Βρείτε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας του X.

    (β΄) Αν έστω ένας δράκος επιβιώσει, θα καταστρέψει όλες τις βαλλίστρες. Αν στόχος σας είναι να σκοτωθούν και οι δύο δράκοι, και να επιζήσουν έτσι οι βαλλίστρες, και έχετε επιλογή να επιλέξετε πόσες βαλλίστρες θα στραφούν προς κάθε δράκο, πόσες θα επιλέξετε να επιτεθούν σε κάθε δράκο; Δώστε πλήρως αιτιολογημένη απάντηση.

27. **(Κολοκύθες)** Κάθε εβδομάδα, ένα μανάβης έχει X πελάτες που ζητούν να αγοράσουν μια κολοκύθα, εφόσον έχουν μείνει απούλητες κολοκύθες, όπου η Τ.Μ. X έχει την ακόλουθη συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$p_X(x) = \frac{9-x}{10}, \quad x = 5, 6, 7, 8.$$

    Στην αρχή της εβδομάδας ο μανάβης αγοράζει κολοκύθες προς 2 ευρώ τη μια, ενώ κατά τη διάρκεια της εβδομάδας τις πουλά προς 4 ευρώ τη μία. Στο τέλος της εβδομάδας ο μανάβης πετά όσες κολοκύθες του έχουν απομείνει. Αν ο μανάβης θέλει να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο ΚΑΘΑΡΟ κέρδος του, πόσες κολοκύθες πρέπει να αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας; *(Υπόδειξη: υπολογίστε τα αναμενόμενα καθαρά κέρδη του μανάβη αν αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας x κολοκύθες, με $x = 5, 6, 7, 8$, και συγκρίνετέ τα.)*

28. **(Διαγωνισμός)** Σε ένα διαγωνισμό συμμετέχουν 5 άντρες και 5 γυναίκες. Κατατάσσονται σύμφωνα με την επίδοσή τους, και δεν προβλέπεται δύο ή περισσότερα άτομα να καταταγούν στην ίδια θέση. Υπάρχουν $10!$ δυνατές κατατάξεις, και δίνεται πως είναι όλες ισοπίθανες. Έστω X η υψηλότερη σειρά που κατέλαβε γυναίκα. (Για παράδειγμα, έχουμε $X = 1$ αν πρώτη αναδείχτηκε μια γυναίκα, οποιαδήποτε από τις 5, ενώ έχουμε $X = 6$ αν οι 5 γυναίκες κατέλαβαν τις τελευταίες 5 θέσεις.) Να βρείτε την μάζα $p_X(x)$ του X. Επίσης, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $E(X)$ και τη διασπορά $\mathrm{VAR}(X)$.

29. **(Μη αρνητικές ακέραιες Τ.Μ.)** Η Τ.Μ. N παίρνει μη αρνητικές ακέραιες τιμές. Δείξτε ότι

$$E(N) = \sum_{k=1}^{\infty} P(N \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N > k).$$

30. **(D&D)** Ένας πολεμιστής είναι οπλισμένος με ένα στιλέτο με το οποίο μπορεί σε κάθε χτύπημα να καταφέρει στον αντίπαλο απώλεια X μονάδων ζωής, όπου η Τ.Μ. X λαμβάνει τις τιμές $1, 2, 3, 4$ με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ την κάθε τιμή. (Επομένως, όλα τα χτυπήματα οδηγούν σε απώλεια μονάδων ζωής.) Ένας αντίπαλος έχει 5 μονάδες ζωής. Ο πολεμιστής χτυπά διαδοχικά τον αντίπαλο έως ότου του καταφέρει, αθροιστικά, απώλεια 5 ή περισσότερων μονάδων ζωής, οπότε ο αντίπαλος πεθαίνει. Τα χτυπήματα είναι ανεξάρτητα. Έστω Y η Τ.Μ. που περιγράφει το πλήθος των χτυπημάτων που απαιτούνται για να πεθάνει ο αντίπαλος. (Παρατηρήστε πως το Y μπορεί να λάβει τις τιμές 2 έως 5.) Να προσδιορίσετε τη μάζα $p_Y(y)$, την συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$, τη μέση τιμή $E(Y)$, και τη διασπορά $\mathrm{VAR}(Y)$ της Y.

5η Ομάδα Ασκήσεων

31. **(Υποβρύχιο)** Τα συντρίμμια ενός υποβρυχίου-μινιατούρα βρίσκονται εντός μιας περιοχής του βυθού η οποία έστω πως διαμερίζεται σε 100 τομείς. Τα συντρίμμια βρίσκονται σε ένα μόνο τομέα και είναι εξίσου πιθανό να βρίσκονται σε οποιονδήποτε εξ αυτών. Ένα σκάφος διάσωσης εκτελεί διαδοχικές καταδύσεις προκειμένου να εντοπίσει τα συντρίμμια και κατά την διάρκεια κάθε μιας κατάδυσης εξερευνά πλήρως έναν μόνο τομέα, και επομένως είτε διαπιστώνεται ότι τα συντρίμμια βρίσκονται εντός αυτού του τομέα (και επομένως το σκάφος δεν θα καταδυθεί ξανά) είτε όχι (και επομένως το σκάφος θα καταδυθεί ξανά).

    (α΄) Έστω πως το σκάφος διάσωσης εκτελεί διαδοχικές καταδύσεις, φροντίζοντας ώστε όταν ένας τομέας εξερευνηθεί σε μία κατάδυση, να μην ξαναεξερευνηθεί σε καμία άλλη κατάδυση. Ποια είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας του πλήθους των καταδύσεων X που θα χρειαστούν προκειμένου τα συντρίμμια να εντοπιστούν; Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της;

    (β΄) Έστω, εναλλακτικά, πως το σκάφος διάσωσης εκτελεί διαδοχικές καταδύσεις, αλλά λόγω κακής οργάνωσης κάθε κατάδυση είναι εξίσου πιθανό να είναι σε οποιονδήποτε από τους 100 τομείς, είτε αυτός έχει εξερευνηθεί προηγουμένως είτε όχι, και χωρίς προτίμηση στον τομέα. Σε αυτή την περίπτωση, ποια είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας του X και ποια η αναμενόμενη τιμή της;

    (γ΄) Έστω ένας συγκεκριμένος τομέας A στον οποίο ΔΕΝ βρίσκονται τα συντρίμμια. Στην περίπτωση του δεύτερου σκέλους ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος των φορών που θα εξερευνηθεί αυτός ο τομέας;

32. **(Μεταγραφή)** Μια ποδοσφαιρική ομάδα κάνει μεταγραφή ένα νέο επιθετικό παίκτη. Ο παίκτης αυτός ανήκει σε μια από τρεις κατηγορίες ποιότητας:

    (α΄) Ο επιθετικός είναι «χέλι» με πιθανότητα $\frac{1}{6}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{2}{3}$.

    (β΄) Ο επιθετικός είναι «μέτριος» με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{1}{3}$.

    (γ΄) Ο επιθετικός είναι «παλτό» με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{1}{6}$.

    Τη στιγμή της μεταγραφής η ομάδα δεν γνωρίζει σε ποια κατηγορία ποιότητας ανήκει ο επιθετικός. Επίσης, με δεδομένη την κατηγορία στην οποία ανήκει ο επιθετικός, ο επιθετικός σκοράρει σε κάθε παιχνίδι ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα παιχνίδια. Παρατηρήστε ότι στα άνω δεν έχει ληφθεί υπόψη πόσα γκολ βάζει ο επιθετικός σε ένα παιχνίδι, αλλά μόνο αν σκοράρει (έστω και ένα γκολ) ή όχι. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

    (α΄) Έστω πως παίζεται το πρώτο παιχνίδι, και ο επιθετικός σκοράρει. Ποια είναι η νέα πιθανότητα ο επιθετικός να είναι «χέλι»;

    (β΄) Έστω πως ο επιθετικός είναι «χέλι», και έχουν παιχτεί 10 παιχνίδια. Ποια είναι η μάζα, η μέση τιμή, και η διασπορά του πλήθους X των παιχνιδιών στα οποία ο επιθετικός σκόραρε;

    (γ΄) Έστω πως έχουν παιχτεί 5 παιχνίδια, και ο επιθετικός έχει σκοράρει στα 2. Ποια είναι η νέα πιθανότητα ο επιθετικός να είναι «χέλι»;

33. **(Άλλοι δύο φίλοι)** Σε ένα άλλο τραπέζι της καφετέριας, συνομιλούν δύο φίλοι, ο A και ο B, εκ των οποίων ο A είναι υγιής, ενώ ο B έχει κορωνοϊό. Όποτε ο B φτερνίζεται, κολλά τον A με κορωνοϊό με πιθανότητα $p_1 = 0.05$. Τα διαδοχικά φτερνίσματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

    (α΄) Ποια κατανομή ακολουθεί το πλήθος των φορών που πρέπει να φτερνιστεί ο B για να κολλήσει τον A, και με ποια παράμετρο ή παραμέτρους;

    (β΄) Πόσες φορές πρέπει να φτερνιστεί ο B ώστε ο A να έχει κολλήσει, σε κάποιο από τα φτερνίσματα, τον κορωνοϊό, με πιθανότητα τουλάχιστον 0.8;

34. **(160 ρίψεις κέρματος)** Ρίχνουμε 1 κέρμα, με πιθανότητα να έρθει κορώνα p, 160 ανεξάρτητες φορές. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να έρθει ακριβώς $k = 5$ φορές γράμματα αν $p = 99\%$, χρησιμοποιώντας ακριβή τύπο και την προσέγγιση που προκύπτει με χρήση της κατανομής Poisson.

35. **(Πίτσες και μακαρονάδες)** Ένας οικοδεσπότης ετοιμάζεται να υποδεχτεί 20 καλεσμένους για φαγητό. Κάθε καλεσμένος με την άφιξή του θα θελήσει να φάει πίτσα με πιθανότητα $p = 0.6$ και μακαρονάδα με πιθανότητα $1-p = 0.4$, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Ο οικοδεσπότης, προκειμένου να μην χρονοτριβήσουν, παραγγέλνει από πριν 16 πίτσες και 12 μακαρονάδες. Ποια είναι η πιθανότητα να μην μπορούν να φάνε όλοι το φαγητό της επιλογής τους;

36. **(Μπάσκετ)** Ένας διαγωνιζόμενος σε ένα παιχνίδι καλείται να εκτελέσει 10 βολές. Ο διαγωνιζόμενος είναι φορμαρισμένος, με πιθανότητα 0.6, οπότε και βάζει κάθε βολή ανεξάρτητα από τις άλλες με πιθανότητα 0.7, και ντεφορμέ με πιθανότητα 0.4, οπότε και βάζει κάθε βολή ανεξάρτητα από τις άλλες με πιθανότητα μόλις 0.2.

(α΄) Με δεδομένο ότι ο διαγωνιζόμενος είναι φορμαρισμένος, ποια είναι η πιθανότητα να εκτελέσει 10 βολές και να βάλει τις 6; Ποια είναι η πιθανότητα του ίδιου ενδεχόμενου αν ο διαγωνιζόμενος είναι ντεφορμέ;

(β΄) Ο διαγωνιζόμενος εκτελεί 10 βολές και βάζει τις 6. Ποια είναι η νέα πιθανότητα να είναι φορμαρισμένος;

37. **(Παιχνίδι με ζάρι)** Δύο παίκτες παίζουν το εξής παιχνίδι. Ρίχνουν συνεχώς ένα δίκαιο ζάρι μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά η ένδειξη 1 ή 2. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών που απαιτούνται. Αν ο X είναι περιττός τότε ο A κερδίζει και παίρνει B Ευρώ από τον B, ενώ αν ο X είναι άρτιος τότε ο A χάνει και δίνει a Ευρώ στον B.

(α΄) Ποια είναι η μάζα της τυχαίας μεταβλητής X;

(β΄) Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει το παιχνίδι ο A;

(γ΄) Ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ a και B ώστε το παιχνίδι να είναι δίκαιο;

6η Ομάδα Ασκήσεων

38. **(Εκλογές)** Έστω εκλογές στις οποίες συμμετέχουν 3 κόμματα, K_1, K_2, K_3. Μια τετραμελής οικογένεια ψηφίζει σύσσωμη, και κάθε ένα από τα 4 μέλη ψηφίζει ένα από τα κόμματα στην τύχη, χωρίς προτίμηση στο κόμμα, και ανεξάρτητα από το τι θα ψηφίζουν τα άλλα μέλη της οικογένειας.

(α΄) Έστω Z το πλήθος από διαφορετικά κόμματα που θα ψηφίζει η οικογένεια. Επομένως, αν για παράδειγμα, όλα τα μέλη ψηφίσουν το κόμμα K_1, έχουμε $Z = 1$. Ποια είναι η μάζα πιθανότητας της Τ.Μ. Z;

(β΄) Έστω X το πλήθος των ψήφων που λαμβάνει το κόμμα K_1 και Y το πλήθος που λαμβάνει το κόμμα K_2. Ποια είναι η από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X, Y;

39. **(Ποδόσφαιρο)** Στο ετήσιο αρκαδικό clasico μεταξύ των ποδοσφαιρικών ομάδων του Ζυγοβιστίου και της Τριπόλεως, βάσει ιστορικών δεδομένων έχει υπολογιστεί ότι οι ασυγκράτητοι λεβέντες του Ζυγοβιστίου σκοράρουν X γκολ, ενώ τα κουρασμένα παλικάρια της Τρίπολης μόλις Y γκολ, σύμφωνα με τις ακόλουθες περιθώριες μάζες πιθανότητας:

$$p_X(x) = \frac{1}{5}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4,$$

$$p_Y(0) = \frac{1}{2},\ p_Y(1) = \frac{1}{4},\ p_Y(2) = \frac{1}{4}.$$

(α΄) Αν δίνεται ότι οι Τ.Μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, ποια είναι η από κοινού μάζα πιθανότητάς τους, $p_{XY}(x, y)$;

(β΄) Αν δίνεται ότι οι Τ.Μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

(γ΄) Αν οι Τ.Μ. X και Y ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες, αλλά πρέπει να έχουν τις άνω περιθώριες μάζες, ποια είναι η ΜΕΓΙΣΤΗ δυνατή πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

(δ΄) Αν οι Τ.Μ. X και Y ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες, αλλά πρέπει να έχουν τις άνω περιθώριες μάζες, ποια είναι η ΕΛΑΧΙΣΤΗ δυνατή πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

40. **(Συνδιακύμανση X και $1/X$)** Έστω μια διακριτή Τ.Μ. X με σύνολο τιμών όλους τους ακέραιους εκτός του μηδενός. Έστω ότι η μάζα του X έχει την ιδιότητα ότι για κάθε ακέραιο k, $p(-k) = p(k)$. Να βρεθεί η συνδιακύμανση μεταξύ του X και του $Y = \frac{1}{X}$.

41. **(Ανάβαση Ζυγοβιστίου)** Στο ετήσιο ράλλυ Ανάβασης Ζυγοβιστίου, κάθε οδηγός που συμμετέχει για πρώτη φορά θα εγκαταλείψει τον αγώνα με πιθανότητα 10%, κάθε οδηγός που συμμετέχει για δεύτερη φορά θα εγκαταλείψει τον αγώνα με πιθανότητα 5%, ενώ οι οδηγοί που συμμετέχουν για τουλάχιστον τρίτη φορά θα εγκαταλείψουν τον αγώνα με πιθανότητα 1%. Σε έναν αγώνα συμμετέχουν συνολικά 30 οδηγοί, εκ των οποίων 10 για πρώτη φορά, 15 για δεύτερη φορά, και άλλοι 5 οδηγοί έχουν συμμετάσχει 3 ή περισσότερες φορές.

(α΄) Αν, μετά τον αγώνα, μάθουμε για ένα τυχαία επιλεγμένο οδηγό (χωρίς προτίμηση στην επιλογή) ότι εγκατέλειψε, ποια είναι η πιθανότητα να ήταν η πρώτη του συμμετοχή;

(β΄) Κατά μέσο όρο πόσοι οδηγοί θα εγκαταλείψουν τον συγκεκριμένο αγώνα;

42. **(Age of Empires Rush)** 8 τοξότες επιτίθενται σε 5 χωρικούς, τους A, B, C, D, E. Κάθε τοξότης επιλέγει να επιτεθεί σε ένα χωρικό στην τύχη, χωρίς προτίμηση στο χωρικό, και ανεξάρτητα από τους άλλους τοξότες.

(α΄) Έστω X το πλήθος από τοξότες που θα επιτεθούν στον χωρικό A. Γράψτε τη μάζα του X.

(β΄) Έστω Y το πλήθος των χωρικών που δεν θα δεχτεί επίθεση από κανένα τοξότη. Υπολογίστε την $E(Y)$. *(Υπόδειξη: $E(\sum Y_i) = \sum E(Y_i)$.)*

(γ΄) Έστω Z το πλήθος των χωρικών στους οποίους επιτίθεται τουλάχιστον ένας τοξότης. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Z = 1)$.

43. **(Πεπόνια)** Σε ένα καλάθι υπάρχουν 5 πεπόνια, εκ των οποίων τα 2 είναι καλά, και τα άλλα τρία χαλασμένα. Αρχίζουμε και κόβουμε τα πεπόνια, μέχρι να βρούμε και τα δύο καλά, και μετά σταματάμε. (Επομένως, ενδεχομένως υπάρχουν κάποια χαλασμένα πεπόνια που δεν θα κόψουμε.) Έστω X το πλήθος των πεπονιών που κόβουμε μέχρι να βρούμε το πρώτο καλό, και έστω Y το πλήθος των ΕΠΙΠΛΕΟΝ πεπονιών που κόβουμε μέχρι να βρούμε και το δεύτερο καλό. Επομένως, οι Τ.Μ. X, Y λαμβάνουν τις τιμές $1, 2, 3, 4$. Ποια είναι η από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X, Y; Υπολογίστε τις $E(X), E(Y), \mathrm{COV}(X, Y)$.

44. **(Μεταγραφές)** Στην αρχή του πρωταθλήματος, μια ομάδα κάνει 3 μεταγραφές παικτών. Κάθε μεταγραφή θα είναι, ανεξάρτητα από τις άλλες, επιτυχημένη, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, ικανοποιητική, με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και αποτυχημένη, με πιθανότητα $\frac{1}{6}$. Έστω X, Y, και Z τα πλήθη των επιτυχημένων, ικανοποιητικών, και αποτυχημένων μεταγραφών, αντίστοιχα.

    (α΄) Να δώσετε μαθηματικό τύπο για την πιθανότητα $P(Y = y)$, όπου $y = 0, 1, 2, 3$.

    (β΄) Να προσδιορίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας των X, Y.

45. **(Πανδημίες)** Έστω X το πλήθος των εμβολίων για τη νόσο COVID που έχει κάνει ένα άτομο τυχαία επιλεγμένα από μια ομάδα ατόμων και έστω Y το πλήθος από φορές που έχει νοσήσει. Δίνεται ότι η από κοινού μάζα πιθανότητας των X και Y είναι η ακόλουθη:

y \ x	0	1	2	3
1	1/16	1/16	1/16	1/8
2	1/16	1/8	1/8	1/16
3	1/8	1/16	1/16	1/16

    (α΄) Είναι οι Τ.Μ. X και Y ανεξάρτητες;

    (β΄) Υπολογίστε την συνδιακύμανση $\mathrm{COV}(X, Y)$.

    (γ΄) Με δεδομένο ότι ένα άτομο έχει νοσήσει 2 ή 3 φορές, ποια η πιθανότητα να έχει κάνει το πολύ δύο εμβόλια;

    (δ΄) Σε ένα δείγμα 100 ατόμων που περιγράφονται από την άνω από κοινού μάζα πιθανότητας, και για τα οποία τα ζεύγη (X_i, Y_i) και (X_j, Y_j) είναι ανεξάρτητα για $i \neq j$, ποια είναι η ακριβής μάζα του πλήθους Z των ατόμων που έχουν νοσήσει ακριβώς μια φορά και έχουν εμβολιαστεί ακριβώς δύο φορές;

46. **(Τίτσου)** Το αμφιθεατρικό παιχνίδι Τίτσου παίζεται με 4 παίκτες, τους P_1, P_2, P_3, και P_4. Χρησιμοποιείται μια συνηθισμένη τράπουλα που αποτελείται από τετράδες των δεκατριών αριθμών $2, \ldots, 10$, J, Q, K, A, στην οποία έχουν προστεθεί 4 ειδικά φύλλα (Δράκος, Γαλοπούλα, Μαγιόνγκ, Σκύλος). Επομένως, η τράπουλα έχει συνολικά $4 \times 14 = 56$ φύλλα. Στην αρχή του παιχνιδιού η τράπουλα μοιράζεται στα 4 και οι παίκτες λαμβάνουν από 14 φύλλα ο καθένας. Σε αυτή τη φάση, όταν ένας από τους παίκτες λάβει και τα 4 φύλλα ενός αριθμού, για παράδειγμα και τους 4 άσσους, τότε η τετράδα αυτή καλείται βόμβα. (Διευκρίνιση: αν γνωρίζεται το παιχνίδι, αγνοήστε άλλους κανόνες που δεν αναφέρονται ρητώς εδώ.)

    (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα, όταν μοιραστούν τα φύλλα, να υπάρχει παίκτης που να έχει λάβει και τα 4 ειδικά φύλλα;

    (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα ο Σκύλος και ο Δράκος να καταλήξουν σε διαφορετικούς παίκτες;

    (γ΄) Κατά μέσο όρο, πόσες βόμβες υπάρχουν, και στους 4 παίκτες, όταν μοιραστούν τα φύλλα;

7η Ομάδα Ασκήσεων

47. **(Πλημμύρες)** Το ύψος της στάθμης του Πηνειού κατά τη διάρκεια μίας πλημμύρας είναι Τ.Μ. X με πυκνότητα πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, & x \in [0, 10], \\ 0, & x \notin [0, 10]. \end{cases}$$

Στον Πηνειό βρίσκονται 4 γέφυρες, οι A, B, C, D, οι οποίες θα γίνουν απροσπέλαστες αν το ύψος της στάθμης υπερβεί τα 6, 7, 8, και 9 μέτρα αντίστοιχα.

(α΄) Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της Τ.Μ. X;

(β΄) Έστω Y η Τ.Μ. που εκφράζει το πλήθος από γέφυρες που θα γίνουν απροσπέλαστες κατά τη διάρκεια μίας πλημμύρας. Ποια είναι η μάζα πιθανότητας της Y?

48. **(Λάμπες)** Δύο λάμπες έχουν τυχαίες διάρκειες ζωής X και Y, ανεξάρτητες μεταξύ τους, που περιγράφονται από τις ακόλουθες πυκνότητες πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} k_1 x(1-x), & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} k_2 y e^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

(α΄) Να προσδιορίσετε τις τιμές των παραμέτρων k_1 και k_2.

(β΄) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(X > \frac{1}{2})$ και $P(Y > \frac{1}{2})$.

(γ΄) Επιλέγουμε μια από τις δύο λάμπες στην τύχη, χωρίς προτίμηση στην επιλογή, και έστω T η διάρκεια ζωής της. Έστω το ενδεχόμενο A να επιλέξαμε την λάμπα με πυκνότητα $f(x)$. Δίνεται ότι το ενδεχόμενο A είναι ανεξάρτητο από τις άνω διάρκειες ζωής. Με δεδομένο ότι εν τέλει η διάρκεια ζωής της λάμπας που επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε υπερβαίνει το $\frac{1}{2}$, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχόμενου A;

49. **(Διάρκεια παραμονής σε εξέταση)** Σε μια εξέταση πιθανοτήτων συμμετέχουν δύο ειδών φοιτητές, οι διαβασμένοι και οι αδιάβαστοι. Κάθε φοιτητής ανήκει στη κάθε μια από τις άνω δύο κατηγορίες με πιθανότητα $p = 0.5$. Ένας διαβασμένος φοιτητής παραμένει στην αίθουσα για χρονική διάρκεια X με πυκνότητα $f_X(x)$ ενώ ένας αδιάβαστος για χρονική διάρκεια Y με πυκνότητα πιθανότητας $f_Y(y)$ όπου

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0,2], \\ 0, & x \notin [0,2], \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2-y}{2}, & y \in [0,2], \\ 0, & y \notin [0,2]. \end{cases}$$

(α΄) Να υπολογίσετε τα $E(X)$ και $E(Y)$.

(β΄) Ποια είναι η πιθανότητα να παραμείνει στην αίθουσα για πάνω από μια ώρα ένας διαβασμένος φοιτητής; Ποια είναι η ίδια πιθανότητα αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος;

(γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα ένας φοιτητής να είναι διαβασμένος με δεδομένο ότι μια ώρα ακριβώς μετά την έναρξη της εξέτασης ο φοιτητής παραμένει στην αίθουσα;

50. **(Καντάδες)** Κάθε βράδυ ο Ρωμαίος κάνει μια καντάδα στην Ιουλιέτα. Η διάρκεια της καντάδας του είναι μια συνεχής Τ.Μ. X (σε λεπτά) με πυκνότητα:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^3, & x \in [0,1], \\ ax, & x \in [1,3], \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Αν ο χρόνος ξεπεράσει τα 2 λεπτά, η μητέρα της Ιουλιέτας του πετάει έναν κουβά με μπουγαδόνερο.

(α΄) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a.

(β΄) Έστω πως ο Ρωμαίος σταματάει τις καντάδες μόλις φάει έναν κουβά νερό στο κεφάλι. Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του συνολικού πλήθους καντάδων που θα κάνει (συμπεριλαμβανομένης της τελευταίας);

(γ΄) Έστω τώρα πως ο Ρωμαίος συνεχίζει τις καντάδες ακόμα κι αν κάποιες μέρες του ρίξουν τον κουβά. Ποια είναι η πιθανότητα σε δύο βδομάδες (14 ημέρες) να καταφέρει να κάνει ακριβώς 10 καντάδες χωρίς να του ρίξει η μητέρα της Ιουλιέτας τον κουβά;

51. **(Η μέθοδος του ανεμιστήρα)** Ένας διδάσκων διορθώνει γραπτά τελικών εξετάσεων Πιθανοτήτων με τη μέθοδο του ανεμιστήρα. Συγκεκριμένα, αφήνει κάθε γραπτό μπροστά από ένα ανεμιστήρα. Το γραπτό πέφτει στο πάτωμα σε απόσταση X από τον διδάσκοντα, που μοντελοποιείται ως Τ.Μ. με την ακόλουθη πυκνότητα:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{v} e^{-x/v}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Η τιμή v είναι μια παράμετρος που εξαρτάται από την ένταση του ανεμιστήρα. Αν $X \geq 10$, τότε ο βαθμός Y που λαμβάνει ο φοιτητής είναι 10. Αλλιώς, ο βαθμός που λαμβάνει ο φοιτητής είναι το ακέραιο μέρος $\lfloor X \rfloor$ του X, δηλαδή ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του X. Επομένως, δεν επιτρέπονται ημιακέραιοι βαθμοί. Ο φοιτητής περνά το μάθημα αν πάρει βαθμό 5 και άνω.

(α΄) Αν ο διδάσκων θέλει να περάσει ακριβώς το 10% των φοιτητών, πόση πρέπει να είναι η τιμή του v;

(β΄) Να δώσετε μια μαθηματική έκφραση για την πιθανότητα $P(Y = k)$, για κάθε ένα $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

52. **(Χημείο)** Στην αρχή μιας δίωρης εξέτασης, στο Χημείο βρίσκονται 60 φοιτητές. Κάθε ένας από αυτούς θα αποχωρήσει από την εξέταση μετά από ένα τυχαίο χρόνο X ο οποίος μετράται σε ώρες και έχει την ακόλουθη πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x, & x \in [0,2], \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

Οι χρόνοι αποχώρησης διαφορετικών φοιτητών είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Να απαντήσετε στα ακόλουθα:

(α΄) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του χρόνου X;

(β΄) Έστω Y το πλήθος των φοιτητών που παραμένουν στην αίθουσα ακριβώς μια ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης. Ποια είναι η μάζα, η μέση τιμή, και η διασπορά του Y;

53. **(Διάρκεια παραμονής σε εξέταση)** Σε μια εξέταση πιθανοτήτων συμμετέχουν δύο ειδών φοιτητές, οι διαβασμένοι και οι αδιάβαστοι. Κάθε φοιτητής ανήκει στη κάθε μια από τις άνω δύο κατηγορίες με πιθανότητα $p = 0.5$. Ένας διαβασμένος φοιτητής παραμένει στην αίθουσα για χρονική διάρκεια X με πυκνότητα $f_X(x)$ ενώ ένας αδιάβαστος για χρονική διάρκεια Y με πυκνότητα πιθανότητας $f_Y(y)$ όπου

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0,2], \\ 0, & x \notin [0,2], \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2-y}{2}, & y \in [0,2], \\ 0, & y \notin [0,2]. \end{cases}$$

(α΄) Να υπολογίσετε τα $E(X)$ και $E(Y)$.

(β΄) Ποια είναι η πιθανότητα να παραμείνει στην αίθουσα για πάνω από μια ώρα ένας διαβασμένος φοιτητής; Ποια είναι η ίδια πιθανότητα αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος;

(γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα ένας φοιτητής να είναι διαβασμένος με δεδομένο ότι μια ώρα ακριβώς μετά την έναρξη της εξέτασης ο φοιτητής παραμένει στην αίθουσα;

8η Ομάδα Ασκήσεων

54. **(Κώστας και Δώρα)** Όταν ο Κώστας και η Δώρα κάνουν check-in για να παραδώσουν τις αποσκευές τους πριν από την πτήση, και έχουν την επιλογή να περιμένουν σε μια από δύο ουρές, αντί να περιμένουν μαζί σε μια ουρά κάθονται σε μια ουρά ο καθένας, και όποιος φτάσει πρώτος να εξυπηρετηθεί, φωνάζει τον άλλο στην ουρά του, και αρχίζει η εξυπηρέτηση και των δύο ταυτόχρονα.

Υποθέτουμε ότι ο Κώστας θα χρειαστεί χρόνο μέχρι να αδειάσει η δικιά του ουρά και να αρχίσει να εξυπηρετείται ίσο με X, και η Δώρα αντίστοιχα χρόνο ίσο με Y, όπου η X και η Y είναι εκθετικές Τ.Μ. με μέση τιμή 1, ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α΄) Ποια είναι η κατανομή και η μέση τιμή του χρόνου Z ο οποίος χρειάζεται για να ξεκινήσει η εξυπηρέτηση του πρώτου (και επομένως και του δεύτερου, βάσει του κανόνα που ακολουθούν);

(β΄) Ποια είναι η κατανομή και η μέση τιμή του χρόνου W που γλιτώνει από την αναμονή του ο ένας από τους δύο; (Παρατήρηση: προφανώς ο άλλος δεν θα γλιτώσει καθόλου χρόνο, γιατί είχε επιλέξει την γρήγορη ουρά).

55. **(Delivery)** Είστε στο σπίτι σας και εσείς και οι καλεσμένοι σας έχετε παραγγείλει κοτόπουλο από το εστιατόριο Α και πίτσα από το εστιατόριο Β. Θεωρήστε ότι δώσατε και τις δύο παραγγελίες την ίδια χρονική στιγμή. Ο χρόνος παράδοσης είναι τυχαίος και ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 30 για το εστιατόριο Α και την εκθετική κατανομή με παράμετρο 20 για το εστιατόριο Β. (Οι χρόνοι αυτοί θεωρήστε ότι είναι ανεξάρτητοι.)

(α΄) Πόσο θα περιμένετε κατά μέσο όρο μέχρι να αρχίσετε το γεύμα σας; Για λόγους ευγένειας αρχίζετε το γεύμα μόλις παραδοθούν και οι δύο παραγγελίες. *(Υπόδειξη: εάν X_A, X_B οι χρόνοι παράδοσης από τα εστιατόρια Α και Β αντίστοιχα, πρώτα βρείτε τη συνάρτηση κατανομής της* $\max(X_A, X_B)$*, έπειτα την πυκνότητα και τέλος υπολογίστε τη μέση τιμή.)*

(β΄) Εάν δεν περιμένετε και τις δύο παραγγελίες για να αρχίσετε το γεύμα, πόσος κατά μέσο όρο χρόνος θα περάσει μέχρι να φάνε οι «τυχεροί» των οποίων η παραγγελία παραδίδεται πρώτη;

56. **(Αριθμητικοί υπολογισμοί με την κανονική κατανομή)** Έστω X μια Τ.Μ. με κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$.

   (α΄) Αν $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$, να βρεθούν οι $P(X < 1.22)$ και $P(X > -1.22)$.

   (β΄) Αν $\mu = 1$ και $\sigma^2 = 1$, να βρεθεί η πιθανότητα $P(X > 2.7)$ και η πιθανότητα $P(X < -4.7 \text{ ή } X > 2.7)$.

   (γ΄) Αν $\mu = 1$ και $\sigma^2 = 1$, να βρεθεί η $P(X > 2.1 \text{ ή } -1 < X < 1)$.

   (δ΄) Αν $\mu = -1$ και $\sigma^2 = 4$, να βρεθούν οι $P(X > 3)$ και $P(X > 3 | X > 2)$.

   (ε΄) Αν $\mu = -2$ και $\sigma^2 = 3.5$, να βρεθεί η μέση τιμή των $Y = 1 - X^2$ και $Y = (X + 2)^{15}$.

   (ϛ΄) Αν $\mu = 2$, να βρεθεί η τιμή της διασποράς για την οποία $P(X < 0) = 1/3$.

57. **(Μέση τιμή της Τ.Μ. Cauchy)** Μια Τ.Μ. X ακολουθεί την κατανομή Cauchy με παραμέτρους $\gamma > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, όταν η πυκνότητά της ισούται με
$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)^2\right]}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   (α΄) Επιβεβαιώστε ότι το ολοκλήρωμα της $f(x)$ στο $\mathbb{R}$ είναι μονάδα.

   (β΄) Να δείξετε ότι η Τ.Μ. Cauchy δεν έχει μέση τιμή, γιατί η απόπειρα υπολογισμού του καταχρηστικού ολοκληρώματος που την ορίζει καταλήγει σε απροσδιοριστία $\infty - \infty$.

9η Ομάδα Ασκήσεων

58. **(Περιφερειακές/Δημοτικές Εκλογές)** Στις περιφερειακές/δημοτικές εκλογές ο Σταύρος ψήφισε σε δύο διαφορετικά εκλογικά τμήματα. Στο πρώτο εκλογικό τμήμα ψήφισε για τις δημοτικές εκλογές, και στο δεύτερο εκλογικό τμήμα ψήφισε για τις περιφερειακές εκλογές. Στο πρώτο τμήμα, ο χρόνος αναμονής ήταν Τ.Μ. X και στο δεύτερο τμήμα ο χρόνος αναμονής ήταν Τ.Μ. Y. Δίνεται ότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες, και η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0, 1]$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο Σταύρος να χρειάστηκε συνολικό χρόνο $X + Y > 2$ στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

   (α΄) Η Y είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0, 2]$.

   (β΄) Η Y είναι εκθετικά κατανεμημένη με μέση τιμή 1.

59. **(Διάρκεια ζωής)** Ένα μελάνι εκτυπωτή του CSLAB έχει διάρκεια ζωής X, όπου X είναι Τ.Μ., που μετράται σε μέρες, με πυκνότητα πιθανότητας
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & x \in [0, a], \\ 0, & x \notin [0, a], \end{cases}$$
όπου a μια άγνωστη παράμετρος. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι η πιθανότητα η διάρκεια ζωής X να υπερβεί τις 10 μέρες είναι $\frac{1}{3}$.

   Επίσης, όταν παραγγέλνεται ένα μελάνι, φτάνει στο CSLAB μετά από τυχαίο χρόνο Y που είναι επίσης Τ.Μ., αλλά με πυκνότητα εκθετική, με παράμετρο $\theta = 1$, επίσης σε μέρες.

   (α΄) Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου a.

   (β΄) Αν το CSLAB παραγγείλει να έρθει το επόμενο μελάνι τη στιγμή που τοποθετεί ένα νέο μελάνι στον εκτυπωτή, ποια είναι η πιθανότητα το επόμενο μελάνι να φτάσει στο CSLAB αφού ο εκτυπωτής έχει ξεμείνει από το νέο μελάνι; Δίνεται ότι η X και Y είναι ανεξάρτητες.

60. **(Από κοινού συνεχείς Τ.Μ.)** Δύο από κοινού συνεχείς Τ.Μ., X και Y, περιγράφονται από την από κοινού πυκνότητα πιθανότητας
$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2(2 - y), & x, y \in [0, 1], \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

   (α΄) Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς c.

   (β΄) Να προσδιορίσετε την περιθώρια πυκνότητα $f_X(x)$.

   (γ΄) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X < 2Y)$.

61. **(Age of Empires duels)** Ένας ιππότης μάχεται με ένα καταπέλτη μέχρι θανάτου. Ο ιππότης θα επιτύχει την εξόντωση του καταπέλτη σε χρόνο που μοντελοποιείται ως συνεχής Τ.Μ. X κατανεμημένη ομοιόμορφα μεταξύ των χρόνων 10 και 20. Ο καταπέλτης θα πετύχει την εξόντωση του ιππότη σε χρόνο που μοντελοποιείται ως συνεχής Τ.Μ. Y εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο $\theta = 15$. Οι Τ.Μ. X, Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

   (α΄) Γράψτε αναλυτικά ως κλαδική συνάρτηση την από κοινού πυκνότητα $f_{XY}(x, y)$ των X, Y. Σχεδιάστε στο επίπεδο xy το χωρίο όπου η $f_{XY}(x, y)$ λαμβάνει θετικές τιμές.

   (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα $P(X > Y)$ να εξοντώσει ο καταπέλτης πρώτος τον ιππότη;

62. **(Από κοινού πυκνότητα)** Έστω X, Y από κοινού τυχαίες μεταβλητές με πυκνότητα

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 6x^c y, & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

   όπου $c > 0$ άγνωστη σταθερά.

   (α΄) Ποια η τιμή της σταθεράς c;

   (β΄) Να βρεθούν οι περιθώριες πυκνότητες των X, Y.

   (γ΄) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(X < 1/3)$, $P(Y > 2X)$.

63. **(Μη αρνητικές συνεχείς Τ.Μ.)** Στη γενική περίπτωση που η X είναι μη αρνητική Τ.Μ. με κατανομή πιθανότητας $F_X(\cdot)$ δείξτε ότι

$$E(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\, dx.$$

   (Υπόδειξη: Παρατηρήστε πως

$$E(X) = \int_0^\infty y f_X(y)\, dy = \int_0^\infty \left(\int_0^y dx \right) f_X(y)\, dy,$$

   και αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης με εφαρμογή του Θεωρήματος του Fubini.)

64. **(Ελάχιστο n τυχαίων μεταβλητών)** Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες Τ.Μ., όλες με την ίδια συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$. Έστω επίσης $V = \min\{X_1, X_2 \ldots, X_n\}$. Να βρείτε την συνάρτηση κατανομής $F_V(v)$ της V, συναρτήσει της $F_X(x)$. Στην ειδική περίπτωση που όλες οι X_i έχουν κατανομή Εκθ(θ), ποια είναι η κατανομή της V;

10η Ομάδα Ασκήσεων

65. **(Εκτελέσεις αλγόριθμου)** Κάθε φορά που εκτελείται ένας αλγόριθμος, η εκτέλεση διαρκεί έναν τυχαίο χρόνο ο οποίος ισούται με 2, 4, 10 ή 20 δευτερόλεπτα, με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ και $\frac{1}{8}$. Υποθέτουμε ότι οι διάρκειες διαδοχικών εκτελέσεων είναι ανεξάρτητες.

   (α΄) Έστω X το πλήθος των φορών που η εκτέλεση πήρε λιγότερο από 5 δευτερόλεπτα, σε ένα συνολικό πλήθος 24 εκτελέσεων. Να περιγράψετε με ακρίβεια την κατανομή του X και να υπολογίσετε την μέση τιμή και τη διασπορά του.

   (β΄) Έστω Y ο συνολικός χρόνος που πήραν οι 24 διαδοχικές εκτελέσεις. Υπολογίστε την μέση τιμή και την διασπορά του Y.

   (γ΄) Αποδείξτε ότι η πιθανότητα ο συνολικός χρόνος των 24 εκτελέσεων να ξεπερνά τα 276 δευτερόλεπτα, είναι το πολύ 50%.

   (δ΄) Έστω Z η πρώτη φορά που ο αλγόριθμος πήρε λιγότερο από 5 δευτερόλεπτα. Να περιγράψετε με ακρίβεια την κατανομή του Z και να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $Z > 5$.

66. **(Exit Poll)** Έστω εκλογές με 10^6 ψηφοφόρους στις οποίες κάθε ψηφοφόρος ψηφίζει το κόμμα A με πιθανότητα $p = 0.25$ ανεξάρτητα από τους άλλους ψηφοφόρους. Στις εκλογές αυτές διενεργείται exit poll στο οποίο συμμετέχουν 10^4 ψηφοφόροι, και στο οποίο κάθε ένας από αυτούς ψηφίζει όπως θα ψήφιζε στις εκλογές.

   (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα το κόμμα A να λάβει στο exit poll μεταξύ 24.5% και 25.5%;

   (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα το κόμμα A να λάβει στις εκλογές ποσοστό εντός του άνω εύρους;

67. **(Τσικνοπέμπτη)** Ένα σουβλατζίδικο έχει 100 τραπέζια 4 θέσεων. Σε κάθε ένα από αυτά, i, $i = 1, 2, \ldots$, κάθεται ένα τυχαίο πλήθος από άτομα X_i για το οποίο ισχύει ότι

$$P(X_i = 2) = \frac{1}{2}, \quad P(X_i = 3) = P(X_4 = 4) = \frac{1}{4}.$$

(α΄) Να υπολογίσετε τα $E(X_i)$ και $E(X_i^2)$.

(β΄) Ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα σε μια μέρα να έρθουν άνω των 280 ατόμων;

(γ΄) Αν ο εστιάτορας κάθετε απειλητικά στην είσοδο και δεν αφήνει ομάδες των δύο ατόμων να καθίσουν, αλλά και πάλι γεμίσουν τα τραπέζια, κατά μέσο όρο πόσοι περισσότεροι θα καθίσουν;

68. **(Καφετέρια)** Κάθε πελάτης μιας καφετέριας αγοράζει (α) με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ ένα κουλούρι, με 1 ευρώ, (β) με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ ένα καφέ, με 2 ευρώ, ή (γ) με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ ένα κουλούρι και ένα καφέ, δίνοντας συνολικά 3 ευρώ.

(α΄) Υπολογίστε τη μέση τιμή και την διασπορά των χρημάτων που αφήνει ο κάθε πελάτης.

(β΄) Αν έρθουν 100 πελάτες, ποια είναι η πιθανότητα η συνολική είσπραξη να υπερβεί τα 190 ευρώ?

69. **(Σεισμοί)** Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα, κάνοντας όπου χρειάζεται αιτιολογημένες προσεγγίσεις.

(α΄) Σε έναν οικισμό, A, με 10^4 πέτρινα σπίτια, λόγω ενός σεισμού κάθε σπίτι θα καταρρεύσει με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Ποια είναι η πιθανότητα να καταρρεύσουν το πολύ 2600 σπίτια;

(β΄) Σε ένα άλλο οικισμό, B, με επίσης 10^4 σπίτια αλλά από τούβλα και τσιμέντο, λόγω ενός σεισμού κάθε σπίτι θα καταρρεύσει με πιθανότητα $\frac{1}{4000}$ ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Ποια είναι η πιθανότητα να καταρρεύσουν το πολύ 3 σπίτια;

(γ΄) Σε ένα τρίτο οικισμό, C, με επίσης 10^4 σπίτια, αλλά κάθε ένα είναι χτισμένο από πέτρα με πιθανότητα 0.5 ή από τούβλα και τσιμέντο με πιθανότητα 0.5, ανεξάρτητα από τα άλλα. Οι πιθανότητες να γκρεμιστούν λόγω σεισμού τα δύο είδη σπιτιών δίνονται στα προηγούμενα σκέλη. Ποια είναι η πιθανότητα να γκρεμιστούν το πολύ 1300 σπίτια;

70. **(Σουβλάκια και Μπύρες)** Ο Σταύρος καταναλώνει κάθε βράδυ X σουβλάκια και Y μπύρες, όπου X, Y διακριτές Τ.Μ. Όταν ο Σταύρος είναι σε φόρμα, οι X, Y δίνονται από την κάτω αριστερά από κοινού μάζα, ενώ όταν δεν είναι σε φόρμα, από την κάτω δεξιά από κοινού μάζα:

x \ y	1	2	3
3	1/12	1/12	1/4
4	1/12	1/4	1/4

x \ y	1	2	3
3	1/6	1/6	1/6
4	1/6	1/6	1/6

Ο Σταύρος είναι κάθε βράδυ σε φόρμα με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ανεξάρτητα από τα άλλα βράδια.

(α΄) Με δεδομένο ότι ο Σταύρος έφαγε ένα βράδυ 4 σουβλάκια, ποια είναι η πιθανότητα να ήταν σε φόρμα εκείνο το βράδυ;

(β΄) Ποιες είναι οι μάζες πιθανότητας των Τ.Μ. X και Y, αν δεν γνωρίζουμε αν ο Σταύρος είναι σε φόρμα, αλλά μόνο την πιθανότητα να είναι σε φόρμα;

(γ΄) Αν κάθε σουβλάκι έχει 600 θερμίδες και κάθε μπύρα έχει 200 θερμίδες, κατά μέσο όρο πόσες θερμίδες καταναλώνει ο Σταύρος κάθε βράδυ;

(δ΄) Ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα ο Σταύρος να καταναλώσει πάνω από 350 σουβλάκια σε 100 διαδοχικά βράδια;

71. **(Ανθοδέσμες)** Κάθε μέρα ο Ρωμαίος αγοράζει μια ανθοδέσμη για την Ιουλιέτα. Υπάρχουν 5 είδη από ανθοδέσμες, με αντίστοιχες τιμές 1, 2, 4, 7 και 16 φιορίνια. Ο Ρωμαίος αγοράζει ανθοδέσμη ενός είδους στην τύχη, χωρίς ιδιαίτερη προτίμηση στο είδος, ανεξάρτητα από μέρα σε μέρα, για 6 μήνες (180 ημέρες).

(α΄) Βρείτε μια προσέγγιση για την πιθανότητα ο Ρωμαίος να έχει ξοδέψει συνολικά περισσότερες από χίλια φιορίνια για ανθοδέσμες σ' αυτούς τους 6 μήνες.

(β΄) Βρείτε μια προσέγγιση για την πιθανότητα ο Ρωμαίος να έχει αγοράσει την ακριβή ανθοδέσμη που κάνει 16 φιορίνια συνολικά λιγότερες από 30 φορές σ' αυτούς τους 6 μήνες.

72. **(Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής)** Σε ένα διαγώνισμα υπάρχουν 110 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Υποθέτουμε ότι κάποιος φοιτητής απαντάει όλες τις ερωτήσεις στην τύχη, ανεξάρτητα τη μια απ' την άλλη.

    (α΄) Αν η κάθε ερώτηση έχει 65 δυνατές απαντήσεις, βρείτε μια καλή προσέγγιση για την πιθανότητα στο τέλος ο φοιτητής να έχει απαντήσει σωστά ακριβώς 2 ερωτήσεις.

    (β΄) Έστω τώρα πως η κάθε ερώτηση έχει μόνο 4 δυνατές απαντήσεις, και πως για κάθε σωστή απάντηση ο εξεταζόμενος παίρνει 10 βαθμούς και για κάθε λάθος χάνει 3 βαθμούς. Βρείτε μια ακριβή προσέγγιση για την πιθανότητα να πάρει τελικά θετικό βαθμό.

73. **(Διόρθωση γραπτών)** Σε μια εξέταση πιθανοτήτων, τα γραπτά των φοιτητών ανήκουν σε τρεις κατηγορίες, ως εξής:

    (α΄) Ένα γραπτό είναι λευκή κόλλα με πιθανότητα $\frac{1}{6}$, οπότε και ο διδάσκοντας βάζει βαθμό 0, και χρειάζεται 12 δευτερόλεπτα για να ολοκληρώσει τη διόρθωση.

    (β΄) Ένα γραπτό δεν είναι λευκή κόλλα αλλά έχει έκταση λιγότερη από 2 σελίδες, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο διδάσκοντας ρίχνει ένα τετράπλευρο ζάρι και βάζει ως βαθμό το αποτέλεσμα X της ζαριάς, με το X να λαμβάνει τις τιμές $X = 1, 2, 3, 4$, κάθε μια με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο διδάσκοντας ολοκληρώνει τη διόρθωση σε 20 δευτερόλεπτα.

    (γ΄) Για τα υπόλοιπα γραπτά, ο διδάσκοντας ρίχνει ένα εξάπλευρο ζάρι και βάζει βαθμό $4+Y$, όπου Y είναι το αποτέλεσμα της ζαριάς και λαμβάνει τιμές $Y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, κάθε μια με πιθανότητα $\frac{1}{6}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο διδάσκοντας ολοκληρώνει τη διόρθωση σε 30 δευτερόλεπτα.

    Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

    (α΄) Ποια είναι η μάζα πιθανότητας και η μέση τιμή του βαθμού Z ενός φοιτητή;

    (β΄) Ποια είναι η μάζα πιθανότητας, η μέση τιμή και η διασπορά του χρόνου W για να διορθωθεί ένα γραπτό;

    (γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα ο διδάσκοντας να διορθώσει μέσα σε 2 ώρες τουλάχιστον 320 γραπτά; (Αγνοούμε τους χρόνους μετάβασης από γραπτό σε γραπτό και άλλους χρόνους πέραν αυτών της διόρθωσης, και υποθέτουμε ότι οι χρόνοι διόρθωσης είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.)

74. **(Καρέκλες)** Στο πανηγύρι του Σωτήρος του Ζυγοβιστίου ο έφορος της εκκλησίας φροντίζει για την προμήθεια καρεκλών. Ο έφορος γνωρίζει ότι υπάρχουν 1000 Ζυγοβιστινοί, καθένας εκ των οποίων θα επισκεφθεί το πανηγύρι ανεξάρτητα από τους άλλους, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Πόσες καρέκλες πρέπει να προμηθευτεί ο έφορος, ώστε η πιθανότητα να έχουν όλοι όσοι έρθουν καρέκλα να υπερβαίνει το 99%; Αρκεί να δώσετε μια μαθηματική έκφραση, χωρίς να υπολογίσετε ακριβή τιμή.