

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Ιουνίου Ακ. Έτους 2024-2025

1. (2 μονάδες) **(Τσούγκρισμα αυγών)** Μια τετραμελής οικογένεια γιορτάζει το Πάσχα τσουγκρίζοντας αυγά. Κάθε μέλος της οικογένειας έχει ένα αυγό, και αρχικά το νεώτερο μέλος χτυπά το αυγό του με όλα τα υπόλοιπα μέλη, διαδοχικά, μέχρι να σπάσει το δικό του αυγό ή να κερδίσει και τα 3 άλλα μέλη. Κατόπιν, γίνονται τυχόν επιπλέον τσουγκρίσματα αυγών, με αυθαίρετο τρόπο που δεν έχει σημασία. Δίνεται ότι τα 4 αυγά μπορούν να τοποθετηθούν σε γνησίως αύξουσα σειρά ανάλογα του πόσο σκληρά είναι, και όταν δύο αυγά χτυπηθούν, σπάει πάντα και μόνο το λιγότερο σκληρό, χωρίς το άλλο να τραυματιστεί καθόλου. Επίσης, τα αυγά κατανέμονται με τυχαίο τρόπο στα 4 άτομα της οικογένειας, χωρίς προτίμηση στην κατανομή των αυγών. Έστω X η Τ.Μ. που περιγράφει το πλήθος των αυγών των άλλων μελών της οικογένειας που θα σπάσει το νεώτερο μέλος. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες

$$P(X = 0), \quad P(X = 1), \quad P(X = 2), \quad P(X = 3).$$

Υπόδειξη: θα διευκολύνει να υπολογίσετε και τις $P(X \geq 1)$ και $P(X \geq 2)$.

Λύση: Παρατηρούμε πως η Τ.Μ. X μπορεί να λάβει μόνο τις τιμές 0, 1, 2, 3. Παρατηρούμε επίσης πως $P(X = 0)$ όταν το νεώτερο μέλος έχει ασθενέστερο αυγό από τον πρώτο του αντίπαλο. Αυτό γίνεται με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, λόγω συμμετρίας. Επίσης $X \geq 1$ αν και μόνο αν το νεώτερο μέλος κερδίσει το πρώτο τσούγκρισμα, που επίσης έχει πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Επιπλέον, $X \geq 2$ αν και μόνο αν το νεώτερο μέλος έχει το πιο δυνατό αυγό από τα επόμενα δύο μέλη, κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, λόγω συμμετρίας, και $X = 3$ αν και μόνο αν το νεώτερο μέλος έχει το πιο δυνατό αυγό από όλα τα μέλη, κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, και πάλι λόγω συμμετρίας. Επομένως:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{1}{2}, \\ P(X = 1) &= P(X \geq 1) - P(X \geq 2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \\ P(X = 2) &= P(X \geq 2) - P(X = 3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \\ P(X = 3) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, παρατηρήστε πως επειδή υπάρχουν μόλις $4! = 24$ διατάξεις της δύναμης των αυγών, όλες ισοπίθανες, είναι εύκολο να υπολογίσουμε την μάζα της X ακόμα και με απλή απαρίθμηση των αποτελεσμάτων που αντιστοιχούν σε κάθε τιμή της X . Πράγματι, έστω Y_i , $i = 1, 2, 3, 4$ οι δυνάμεις των αυγών των μελών, όπου 1 είναι το νεώτερο μέλος και οι δυνάμεις συμβολίζονται με A, B, C, D , όπου A είναι το ασθενέστερο αυγό και D το ισχυρότερο. Υπάρχουν 24 ισοπίθανα αποτελέσματα $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$, που παρατίθενται παρακάτω, και σε παρένθεση ακολουθεί η τιμή του X :

ABCD (0),	BCDA (0),	CDAB (0),	DABC (3),
ABDC (0),	BDCA (0),	DCAB (3),	CABD (2),
ACBD (0),	CBDA (1),	BDAC (0),	DACB (3),
ACDB (0),	CDBA (0),	DBAC (3),	BACD (1),
ADBC (0),	DBCA (3),	BCAD (0),	CADB (1),
ADCB (0),	DCBA (3),	CBAD (2),	BADC (1),

και με απλή απαρίθμηση καταλήγουμε στις άνω πιθανότητες.

2. **(Age of Empires II DE)** Σε ένα feudal archer rush 10 τοξότες επιτίθενται σε 10 χωρικούς. Κάθε τοξότης επιλέγει να επιτεθεί σε έναν από τους 10 χωρικούς χωρίς προτίμηση στο χωρικό και ανεξάρτητα από το τι θα κάνουν οι άλλοι τοξότες. Έστω X το πλήθος των χωρικών στους οποίους δεν θα επιτεθεί κανένας τοξότης.

(α') (0.5 μονάδα) Να υπολογίσετε την $P(X = 0)$.

(β') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε την $E(X)$.

(γ') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε την $P(X = 9)$.

(δ') (0.5 μονάδα) (δύσκολο) Να υπολογίσετε την $P(X = 8)$.

Λύση:

- (α') Κάθε ένας από τους 10 τοξότες έχει 10 διαφορετικές επιλογές για το στόχο του. Άρα, ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 10^{10} δυνατά αποτελέσματα. Για να υπολογίσουμε το μέγεθος του ενδεχόμενου $X = 0$, παρατηρούμε πως για να πραγματοποιηθεί πρέπει ο κάθε τοξότης να επιλέξει διαφορετικό στόχο. Επομένως, ο πρώτος τοξότης έχει 10 επιλογές, ο δεύτερος έχει 9 επιλογές, κοκ, και εν τέλει ο τελευταίος έχει μια επιλογή. Τελικά,

$$P(X = 0) = \frac{10!}{10^{10}}.$$

- (β') Έστω $X_i, i = 1, \dots, 10$, T.M. που ισούνται με 1 όταν ο χωρικός i δεν δέχεται επίθεση από κανένα τοξότη. Παρατηρούμε πως $P(X_i = 1) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$, επομένως

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = 10 \times \left(1 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{10} + 0 \times \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}\right)\right) = 10 \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \simeq 10e^{-1}.$$

- (γ') Θα έχουμε $X = 9$ αν και μόνο αν όλοι οι τοξότες επιτεθούν στον ίδιο χωρικό. Η πιθανότητα να επιτεθούν στον πρώτο χωρικό όλοι είναι $\left(\frac{1}{10}\right)^{10}$, και επειδή υπάρχουν 10 χωρικοί, προκύπτει ότι τελικά η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$10 \left(\frac{1}{10}\right)^{10} = \frac{1}{10^9}.$$

- (δ') Θα έχουμε $X = 8$ αν όλοι οι τοξότες στοχεύσουν και τους δύο χωρικούς ενός συγκεκριμένου ζεύγους χωρικών, από ένα σύνολο $\binom{10}{2}$ ζευγών. Η πιθανότητα να επιτεθούν οι τοξότες σε 2 συγκεκριμένους χωρικούς ισούται με την πιθανότητα όλα τα βέλη να καταλήξουν σε αυτούς τους δύο, που ισούται με $\left(\frac{2}{10}\right)^{10}$ αν αφαιρεθεί η πιθανότητα να καταλήξουν όλα τα βέλη σε κάποιον συγκεκριμένο από αυτούς τους δύο, που ισούται με $2 \left(\frac{1}{10}\right)^{10}$. Συνδυάζοντας τα άνω, έχουμε

$$P(X = 8) = \binom{10}{2} \left(\left(\frac{2}{10}\right)^{10} - 2 \left(\frac{1}{10}\right)^{10} \right).$$

3. (Μεγιστοποίηση μέσης τιμής) Δίνεται η πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1], \end{cases}$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ άγνωστες παράμετροι.

- (α') (1 μονάδα) Αν έχει δοθεί ότι η μέση τιμή $E(X)$ μιας T.M. που ακολουθεί την άνω πυκνότητα ισούται με $E(X) = \frac{3}{5}$, τότε να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων a, b .
- (β') (1 μονάδα) Ποιες είναι οι τιμές των παραμέτρων για τις οποίες μεγιστοποιείται η μέση τιμή $E(X)$, και ποια είναι η μέγιστη τιμή της;

Λύση: Παρατηρούμε καταρχάς ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 (ax + b) dx = \int_0^1 \left(\frac{ax^2}{2} + bx \right)' dx = \frac{a}{2} + b = 1.$$

Επιπλέον,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \int_0^1 \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} \right)' dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}.$$

- (α') Αν δίνεται ότι $E(X) = \frac{3}{5}$, τότε ισχύει το ακόλουθο απλό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$\frac{a}{2} + b = 1, \quad \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{3}{5},$$

από το οποίο εύκολα προκύπτει πως

$$a = \frac{6}{5}, \quad b = \frac{2}{5}.$$

(β') Παρατηρούμε πως

$$E(X) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{a}{3} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{12} + \frac{1}{2}.$$

Επομένως, για να μεγιστοποιήσουμε την μέση τιμή θέλουμε το a να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Όμως, το $b = 1 - \frac{a}{2} \geq 0$, ειδικά η πυκνότητα θα λαμβάνει και αρνητικές τιμές, για μικρά x . Επομένως, για να μεγιστοποιηθεί η μέση τιμή πρέπει

$$b = 0, \quad a = 2, \quad E(X) = \frac{2}{3}.$$

4. **(Φιλοδωρήματα)** Ένας barista που εργάζεται στη Μύκονο λαμβάνει από κάθε άτομο που εξυπηρετεί ένα φιλοδωρήμα που ισούται με 1 ευρώ (με πιθανότητα $\frac{1}{2}$), 2 ευρώ (με πιθανότητα $\frac{1}{4}$), ή 4 ευρώ (με πιθανότητα $\frac{1}{4}$). Τα φιλοδωρήματα διαφορετικών ατόμων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

(α') (1 μονάδα) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του φιλοδωρήματος X που λαμβάνει ο barista από ένα τυχαίο άτομο;

(β') (1 μονάδα) Αν ο barista εξυπηρετήσει 150 άτομα, ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα το συνολικό φιλοδωρήμα να ξεπεράσει τα 320 ευρώ;

(γ') (0.5 μονάδα) Επιπλέον, αν X είναι το πλήθος των ατόμων που δίνουν στον barista φιλοδωρήμα 1 ευρώ, ποια είναι η πιθανότητα $P(X = x)$, όπου $x = 1 \dots, 150$; Να δοθεί ένας ακριβής τύπος.

(δ') (0.5 μονάδα) (δύσκολο) Έστω επιπλέον Y το πλήθος των ατόμων που θα δώσουν στον barista 2 ευρώ. Ποια είναι η πιθανότητα $P(X = x, Y = y)$ για $x, y \geq 0$ και $x + y \leq 200$?

Λύση:

(α') Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = 2, \\ E(X^2) &= 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4} = \frac{22}{4}, \\ \text{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{22}{4} - 2^2 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(β') Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{150} X_i > 320\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{150} X_i - 150 \times E(X)}{\sqrt{150 \times \text{VAR}(X)}} > \frac{320 - 150 \times E(X)}{\sqrt{150 \times \text{VAR}(X)}}\right) \\ &\simeq P\left(Z > \frac{3}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

(γ') Κάθε άτομο θα δώσει φιλοδωρήμα στον barista με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ ανεξάρτητα από τα άλλα 150 άτομα. Επομένως, το πλήθος των ατόμων που θα του δώσουν φιλοδωρήμα 1 ευρώ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 150$ και $p = \frac{1}{2}$, και

$$P(X = x) = \binom{150}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{150-x} = \binom{150}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{150}$$

(δ') Θα χρησιμοποιήσουμε τον πολυωνυμικό συντελεστή. Υπάρχουν $\binom{150}{x, y, 150-x-y}$ τρόποι για να μοιραστούν τα x φιλοδωρήματα του 1 ευρώ, τα y φιλοδωρήματα των 2 ευρώ και τα $150 - x - y$ φιλοδωρήματα των 4 ευρώ, και κάθε τρόπος έχει πιθανότητα να προκύψει

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^y \left(\frac{1}{4}\right)^{150-x-y},$$

επομένως

$$P(X = x, Y = y) = \binom{150}{x, y, 150-x-y} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^y \left(\frac{1}{4}\right)^{150-x-y} = \binom{150}{x, y, 150-x-y} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{150-x}.$$