

Οδηγίες

1. Διάρκεια εξέτασης: 120 ΛΕΠΤΑ
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
5. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
6. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
7. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
8. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
9. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. (2 μονάδες) **(Τσουγκρισμα αυγών)** Μια τετραμελής οικογένεια γιορτάζει το Πάσχα τσουγκρίζοντας αυγά. Κάθε μέλος της οικογένειας έχει ένα αυγό, και αρχικά το νεώτερο μέλος χτυπά το αυγό του με όλα τα υπόλοιπα μέλη, διαδοχικά, μέχρι να σπάσει το δικό του αυγό ή να κερδίσει και τα 3 άλλα μέλη. Κατόπιν, γίνονται τυχόν επιπλέον τσουγκρίσματα αυγών, με αυθαίρετο τρόπο που δεν έχει σημασία. Δίνεται ότι τα 4 αυγά μπορούν να τοποθετηθούν σε γνησίως αύξουσα σειρά ανάλογα του πόσο σκληρά είναι, και όταν δύο αυγά χτυπηθούν, σπάει πάντα και μόνο το λιγότερο σκληρό, χωρίς το άλλο να τραυματιστεί καθόλου. Επίσης, τα αυγά κατανέμονται με τυχαίο τρόπο στα 4 άτομα της οικογένειας, χωρίς προτίμηση στην κατανομή των αυγών. Έστω X η Τ.Μ. που περιγράφει το πλήθος των αυγών των άλλων μελών της οικογένειας που θα σπάσει το νεώτερο μέλος. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες

$$P(X = 0), \quad P(X = 1), \quad P(X = 2), \quad P(X = 3).$$

Υπόδειξη: θα διευκολύνει να υπολογίσετε και τις $P(X \geq 1)$ και $P(X \geq 2)$.

2. **(Age of Empires II DE)** Σε ένα feudal archer rush 10 τοξότες επιτίθενται σε 10 χωρικούς. Κάθε τοξότης επιλέγει να επιτεθεί σε έναν από τους 10 χωρικούς χωρίς προτίμηση στο χωρικό και ανεξάρτητα από το τι θα κάνουν οι άλλοι τοξότες. Έστω X το πλήθος των χωρικών στους οποίους δεν θα επιτεθεί κανένας τοξότης.

(α') (0.5 μονάδα) Να υπολογίσετε την $P(X = 0)$.

(β') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε την $E(X)$.

(γ') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε την $P(X = 9)$.

(δ') (0.5 μονάδα) (δύσκολο) Να υπολογίσετε την $P(X = 8)$.

3. **(Μεγιστοποίηση μέσης τιμής)** Δίνεται η πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1], \end{cases}$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ άγνωστες παράμετροι.

- (α') (1 μονάδα) Αν έχει δοθεί ότι η μέση τιμή $E(X)$ μιας Τ.Μ. που ακολουθεί την άνω πυκνότητα ισούται με $E(X) = \frac{3}{5}$, τότε να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων a, b .
- (β') (1 μονάδα) Ποιες είναι οι τιμές των παραμέτρων a, b , για τις οποίες μεγιστοποιείται η μέση τιμή $E(X)$, και ποια είναι η μέγιστη τιμή της;
4. **(Φιλοδωρήματα)** Ένας barista που εργάζεται στη Μύκονο λαμβάνει από κάθε άτομο που εξυπηρετεί ένα φιλοδώρημα που ισούται με 1 ευρώ (με πιθανότητα $\frac{1}{2}$), 2 ευρώ (με πιθανότητα $\frac{1}{4}$), ή 4 ευρώ (με πιθανότητα $\frac{1}{4}$). Τα φιλοδωρήματα διαφορετικών ατόμων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.
- (α') (1 μονάδα) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του φιλοδωρήματος X που λαμβάνει ο barista από ένα τυχαίο άτομο;
- (β') (1 μονάδα) Αν ο barista εξυπηρετήσει 150 άτομα, ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα το συνολικό φιλοδώρημα να ξεπεράσει τα 320 ευρώ;
- (γ') (0.5 μονάδα) Επιπλέον, αν X είναι το πλήθος των ατόμων που δίνουν στον barista φιλοδώρημα ακριβώς 1 ευρώ, ποια είναι η πιθανότητα $P(X = x)$, όπου $x = 1, \dots, 150$; Να δοθεί ένας ακριβής τύπος.
- (δ') (0.5 μονάδα) (δύσκολο) Έστω επιπλέον Y το πλήθος των ατόμων που θα δώσουν στον barista 2 ευρώ. Ποια είναι η πιθανότητα $P(X = x, Y = y)$ για $x, y \geq 0$ και $x + y \leq 200$?

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$\begin{aligned}
 A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B', \\
 P(A) &\geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\Omega) = 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots, \\
 P(A') &= 1 - P(A), \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A) \leq 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B), \\
 P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad P(A \cup B) \leq P(A) + P(B), \quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap B' \cap C), \\
 P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \quad P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Διατάξεις } k \text{ αντικ. από } N: \frac{N!}{(N-k)!}, \quad \text{Συνδυασμοί } k \text{ αντικ. από } N: \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}, \\
 \text{Επαναληπτικές διατάξεις μήκους } k \text{ από } N: N^k, \quad \text{Επαναληπτικοί συνδυασμοί } k \text{ αντικ. από } N: \binom{N+k-1}{k} = \binom{N+k-1}{-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 A_1) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}), \\
 P() &= P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'), \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')}, \\
 P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_N)P(B_N) \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}), \\
 P(B_1|A) &= \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}). \\
 A, B \text{ ανεξάρτητα} &\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B).
 \end{aligned}$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\}) \quad \forall x \in S_X, \quad F_X(x) = P(X \leq x), \quad \lim_{t \rightarrow x^-} F(t) = P(X < x), \quad E(X) = \sum_{x \in S_X} x p_X(x),$$

$$\begin{aligned}
 E(g(X)) &= \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x), \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)), \\
 \sigma^2 &= \text{VAR}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \text{VAR}(aX + b) = a^2 \text{VAR}(X).
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

$$X \sim \text{Bern}(p), \quad p_X(0) = 1-p, \quad p_X(1) = p, \quad E(X) = p, \quad \text{VAR}(X) = p(1-p),$$

$$X \sim \text{Διων}(N, p), \quad p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad E(X) = Np, \quad \text{VAR}(X) = Np(1-p),$$

$$X \sim \text{Γεωμ}(p), \quad p_X(k) = (1-p)^{k-1} p, \quad E(X) = 1/p, \quad \text{VAR}(X) = (1-p)/p^2, \quad P(X \geq m+n | X > n) = P(X \geq m), \quad m \geq 1, n \geq 0,$$

$$X \sim \text{Υπερ}(N, k, n), \quad p_X(m) = \frac{\binom{k}{m} \binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}}, \quad E(X) = \frac{nk}{N}, \quad \text{VAR}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad E(X) = \lambda, \quad \text{VAR}(X) = \lambda.$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in S_X, \quad \forall y \in S_Y, \quad p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{XY}(x, y),$$

$$E(g(X, Y)) = \sum_{x, y} g(x, y) p_{XY}(x, y), \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E\left(\sum_{k=1}^K g_k(X, Y)\right) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X, Y)),$$

$$\text{COV}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y), \quad \text{VAR}(X + Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y) + 2\text{COV}(X, Y),$$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \quad \forall A, B \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x, y,$$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \text{COV}(X, Y) = 0, \quad p_{X+Y}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k)p_Y(m-k), \quad m \in \mathbb{Z},$$

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + b, \quad \text{VAR}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{COV}(X_i, X_j).$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^a f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx, \quad \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_c^t f(x) dx, \\
\int_a^b f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx, \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx, \\
P(X \in B) &= \int_B f(t) dt, \quad P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x) dx, \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad F'(x) = f(x), \\
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx, \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)), \\
\sigma^2 &= \text{VAR}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \text{VAR}(aX + b) = a^2 \text{VAR}(X).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X \sim U[a, b], \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x \in [a, b], \\ 0, & \text{για } x \notin [a, b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \\
X \sim \text{Eκθ}(\theta), \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & \text{για } x \geq 0, \\ 0, & \text{για } x < 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0, \end{cases} \quad E(X) = \theta, \quad \text{VAR}(X) = \theta^2, \\
X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x \in \mathbb{R}, \quad E(X) = \mu, \quad \text{VAR}(X) = \sigma^2, \\
X \sim N(\mu, \sigma^2) &\Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1), \quad P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \\
Z \sim N(0, 1), \quad \phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx, \quad \Phi(x) = 1 - \Phi(-x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R &= \{(x, y) : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx, \\
R &= \{(x, y) : a \leq y \leq b, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy, \\
\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dA &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy, \\
P[(X, Y) \in R] &= \iint_R f_{XY}(x, y) dA, \quad P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f_{XY}(x, y) dA = \left\{ \int_a^b \left(\int_c^d f_{XY}(x, y) dy \right) dx, \right. \\
&\quad \left. \int_c^d \left(\int_a^b f_{XY}(x, y) dx \right) dy \right\}, \\
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx, \quad E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy, \\
E(aX + bY + c) &= aE(X) + bE(Y) + c, \quad E\left(\sum_{k=1}^K g_k(X, Y)\right) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X, Y)), \\
X, Y \text{ ανεξάρτητες} &\Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \quad \forall A, B \Leftrightarrow f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \forall x, y, \\
X, Y \text{ ανεξάρτητες} &\Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \text{COV}(X, Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t) dt, \\
E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) &= \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + b, \quad \text{VAR}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{COV}(X_i, X_j).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X \geq 0, c > 0 &\Rightarrow P(X \geq c) \leq \frac{E(X)}{c}, \quad c > 0 \Rightarrow P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{\text{VAR}(X)}{c^2}, \\
X_1, X_2, \dots \text{ ανεξ. με κοινή κατ.}, \quad E(X_i) &= \mu, \quad \bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, P(|\bar{X}_N - \mu| < \epsilon) \rightarrow 1, & \text{καθώς } N \rightarrow \infty, \\ P(\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{X}_N = \mu) = 1, \end{cases} \\
\text{VAR}(X_i) = \sigma^2, \quad \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu) &= \frac{\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P(a \leq \bar{S}_N \leq b) \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a), & \text{καθώς } N \rightarrow \infty, \\ P(\bar{S}_N \leq a) \rightarrow \Phi(a), & \text{καθώς } N \rightarrow \infty, \\ P(\bar{S}_N \geq a) \rightarrow 1 - \Phi(a), & \text{καθώς } N \rightarrow \infty. \end{cases}
\end{aligned}$$
