

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. **(Ισότητα συνόλων)** Να δείξετε ότι

$$A \cup (\cap_{i=1}^{\infty} B_i) = \cap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i).$$

Λύση: Έστω $C = A \cup (\cap_{i=1}^{\infty} B_i)$ και $D = \cap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$. Θα αποδείξουμε ότι τα C, D ταυτίζονται, χρησιμοποιώντας την συνήθη μέθοδο: θα δείξουμε ότι το ένα είναι υποσύνολο του άλλου και αντιστρόφως.

Έστω λοιπόν ένα στοιχείο $x \in C$. Τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Αν $x \in A$, τότε $x \in A \cup B_i$ για όλα τα i , και επομένως θα ανήκει και στην άπειρη τομή τους D . Αν $x \notin A$, τότε θα ανήκει σε όλα τα B_i , αλλιώς δεν θα ανήκει σε κάποιο B_i , άρα ούτε και στην άπειρη τομή τους, και επομένως ούτε στο C , δηλαδή οδηγούμαστε σε άτοπο. Αφού λοιπόν ανήκει σε όλα τα B_i , θα ανήκει και σε όλα τα $A \cup B_i$, άρα και στην τομή τους D . Αποδείξαμε λοιπόν ότι αν $x \in C$, τότε $x \in D$, δηλαδή $C \subseteq D$.

Έστω τώρα ένα στοιχείο $x \in D$. Τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Αν ανήκει στο A , τότε ανήκει και στην ένωση $C = A \cup (\cap_{i=1}^{\infty} B_i)$. Αν δεν ανήκει στο A , είναι απαραίτητο να ανήκει σε όλα τα B_i , γιατί αν δεν ανήκει έστω και σε ένα, έστω B_i , τότε δεν θα ανήκει και στην ένωση $A \cup B_i$, άρα ούτε και στην άπειρη τομή $D = \cap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$, και θα έχουμε άτοπο. Αφού λοιπόν το x ανήκει σε όλα τα B_i , θα ανήκει και στην άπειρη τομή τους $\cap_{i=1}^{\infty} B_i$ άρα και στην ένωση $C = A \cup (\cap_{i=1}^{\infty} B_i)$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι αν $x \in D$, τότε $x \in C$, δηλαδή $D \subseteq C$.

Αφού $C \subseteq D$ και $D \subseteq C$, τελικά $C = D$.

2. **(Τρία ενδεχόμενα)** Έστω A, B, C τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Βρείτε κατάλληλες εκφράσεις για τα ενδεχόμενα:

- (α') Πραγματοποίηση μόνο του B .
- (β') Πραγματοποιήθηκαν το A και το B αλλά όχι το C .
- (γ') Τουλάχιστον ένα από τα συγκεκριμένα ενδεχόμενα πραγματοποιείται.
- (δ') Τουλάχιστον δύο από τα ενδεχόμενα πραγματοποιούνται.
- (ε') Και τα τρία ενδεχόμενα πραγματοποιούνται.
- (ς') Κανένα από τα ενδεχόμενα δεν πραγματοποιείται.
- (ζ') Το πολύ ένα πραγματοποιείται.
- (η') Το πολύ δύο πραγματοποιούνται.

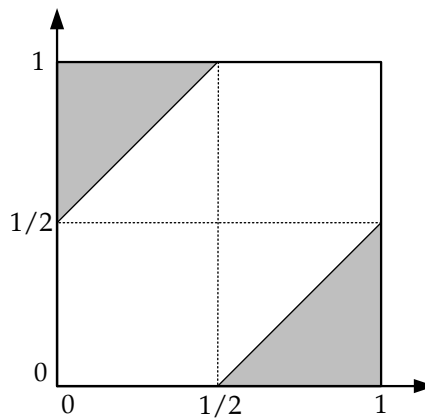
Λύση:

- (α') $A'BC'$.
- (β') ABC' .
- (γ') $A \cup B \cup C$.
- (δ') $AB \cup AC \cup BC$.
- (ε') ABC .
- (ς') $A'B'C' = (A \cup B \cup C)'$.
- (ζ') $A'B'C' \cup AB'C' \cup A'BC' \cup A'B'C = (AB \cup AC \cup BC)'$.
- (η') $(ABC)' = A' \cup B' \cup C'$.

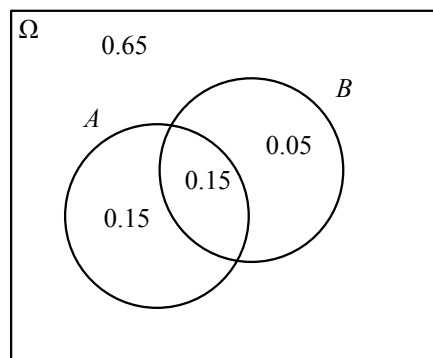
3. **(Διαφορά μεταξύ αριθμών)** Δύο αριθμοί επιλέγονται τυχαία από το διάστημα $[0, 1]$, και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Η επιλογή είναι ομοιόμορφη, δηλαδή χωρίς να δείχνουμε προτίμηση στα σημεία κάποιου υποσυνόλου του $[0, 1]$. Βρείτε την πιθανότητα οι αριθμοί να διαφέρουν (κάτ' απόλυτη τιμή) περισσότερο από $\frac{1}{2}$. (Υπόδειξη: μελετήστε το τετράγωνο $[0, 1] \times [0, 1]$ του R^2 .)

Λύση:

Η επιλογή δύο αριθμών x, y στο διάστημα $[0, 1]$ διαισθητικά αντιστοιχεί στην επιλογή ενός σημείου (x, y) στο τετράγωνο $[0, 1] \times [0, 1]$ του Σ χήματος 1. Οι δύο αριθμοί θα διαφέρουν περισσότερο από $\frac{1}{2}$ αν και μόνο αν το σημείο



Σχήμα 1: Άσκηση 3.



Σχήμα 2: Το διάγραμμα Venn της Άσκησης 4.

(x, y) βρίσκεται εντός των σκιασμένων τριγώνων, που καλύπτουν το $\frac{1}{4}$ του συνολικού εμβαδού του τετραγώνου. Εξ υποθέσεως, δεν υπάρχει κάποια περιοχή στο τετράγωνο που να προτιμάται από κάποια άλλη. Συνεπώς, η πιθανότητα κάθε υποσυνόλου θα είναι ανάλογη της επιφάνειας του αποκλειστικά, και άρα η πιθανότητα του ζητούμενου ενδεχόμενου ισούται με $\frac{1}{4}$.

4. **(Χρήση ιδιοτήτων πιθανοτήτων)** Έστω ότι για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι

$$2P(A) = 3P(B) = 4P(AB), \quad P(A'B) = 0.05.$$

(α') Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A), P(B), P(AB)$.

(β') Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχόμενων $A \cup B, A'B', AB', AB' \cup A'B, A \cup B', A' \cup B$.

Λύση:

(α') Κατά τα γνωστά, $P(A'B) = P(B) - P(AB)$, και επομένως

$$P(B) - P(AB) = 0.05 \Rightarrow P(B) - \frac{3}{4}P(B) = 0.05 \Rightarrow \frac{1}{4}P(B) = 0.05 \Rightarrow P(B) = 0.2.$$

$$\text{Άρα, } P(A) = \frac{3}{2}P(B) = 0.3, P(AB) = \frac{3}{4}P(B) = 0.15.$$

(β') Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) = 0.3 + 0.2 - 0.15 = 0.35, \\ P(A'B') &= P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.35 = 0.65, \\ P(AB') &= P(A) - P(AB) = 0.3 - 0.15 = 0.15, \\ P(AB' \cup A'B) &= P(AB') + P(A'B) - P(AB'A'B) = 0.15 + 0.05 - 0 = 0.2, \\ P(A \cup B') &= P((A'B)') = 1 - P(A'B) = 1 - 0.05 = 0.95, \\ P(A' \cup B) &= P((AB')') = 1 - P(AB') = 1 - 0.15 = 0.85. \end{aligned}$$

5. **(Πρόβλημα Γαλιλαίου)** Ρίχνουμε διαδοχικά 3 συνηθισμένα ζάρια. Θεωρούμε ότι τα $6^3 = 216$ δυνατά αποτελέσματα του πειράματος είναι ισοπίθανα.

(α') Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου A το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 9;

(β') Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου B το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 10;

Λύση: Υπάρχουν συνολικά $6^3 = 216$ δυνατά αποτελέσματα, και υποθέτουμε ότι είναι όλα ισοπίθανα. Προκειμένου να υπολογίσουμε τις ζητούμενες πιθανότητες, πρέπει να βρούμε από πόσα αποτελέσματα αποτελείται καθένα από τα δύο ενδεχόμενα.

(α') Παρατηρούμε πως το ενδεχόμενο A είναι το ακόλουθο:

$$A = \{126, 216, 135, 225, 315, 144, 234, 324, 414, 153, 243, 333, 423, 513, 162, 252, 342, 432, 522, 612, 261, 351, 441, 531, 621\}.$$

Καθώς υπάρχουν 25 αποτελέσματα, όλα ισοπίθανα, και καθένα με πιθανότητα $1/216$, προκύπτει τελικά πως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{25}{216}.$$

(β') Παρατηρούμε πως το ενδεχόμενο B είναι το ακόλουθο:

$$B = \{136, 226, 316, 145, 235, 325, 415, 154, 244, 334, 424, 514, 163, 253, 343, 433, 523, 613, 262, 352, 442, 532, 622, 361, 451, 541, 631\}.$$

Καθώς υπάρχουν 27 αποτελέσματα, όλα ισοπίθανα, και καθένα με πιθανότητα $1/216$, προκύπτει τελικά πως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{27}{216}.$$

6. **(Ανισότητα Bonferroni)** Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε δύο ενδεχόμενα A, B , ισχύει η ανισότητα

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Ακολουθώς να δείξετε ότι, πιο γενικά,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - (n - 1).$$

Λύση: Σχετικά με την πρώτη ανισότητα, παρατηρούμε πως

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Σχετικά με την δεύτερη ανισότητα, παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= P((A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)') = P(A'_1 \cup A'_2 \cup \dots \cup A'_n) \\ &\leq P(A'_1) + P(A'_2) + \dots + P(A'_n) = (1 - P(A_1)) + (1 - P(A_2)) + \dots + (1 - P(A_n)) \\ &= n - P(A_1) - P(A_2) - \dots - P(A_n), \end{aligned}$$

και το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. (Βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε κάθε ένα από τα άνω βήματα.)

7. **(Παιχνίδι)** Δύο παίκτες A και B παίζουν το εξής παιχνίδι: Ένα δίκαιο κέρμα ρίχνεται 3 φορές. Έπειτα, ρίχνεται ένα δίκαιο ζάρι. Κερδίζει ο παίκτης A όταν το πλήθος των φορών που εμφανίστηκαν κορώνες και το αποτέλεσμα του ζαριού είναι και οι δύο ζυγοί ή και οι δύο μονοί αριθμοί. Σε διαφορετική περίπτωση, κερδίζει ο παίκτης B . (Π.χ., κερδίζει ο B εάν έρθουν 2 κορώνες και το ζάρι είναι 5.)

Προτείνετε ένα δειγματικό χώρο και μέτρο πιθανότητας που να αναπαριστά το παιχνίδι αυτό, και υπολογίστε την πιθανότητα εμφάνισης κάθε αποτελέσματος. Είναι δίκαιο το παιχνίδι;

Λύση: Ο πιο προφανής δειγματικός χώρος είναι το καρτεσιανό γινόμενο

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

όπου το H συμβολίζει τις κορώνες, το T τα γράμματα, το HHT να έρθουν πρώτα 2 κορώνες και μετά μια φορά γράμματα, κ.ο.κ. Το πλήθος των στοιχείων του Ω είναι $|\Omega| = 8 \times 6 = 48$. Υποθέτοντας ότι κάθε αποτέλεσμα είναι ισοπίθανο, προκύπτει πως το κάθε αποτέλεσμα θα έχει πιθανότητα $\frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{48}$.

Σχετικά με το αν το παιχνίδι είναι δίκαιο, έστω A το ενδεχόμενο να κερδίσει ο παίκτης A . Παρατηρήστε πως

$$A = \left(\{HHT, HTH, THH, TTT\} \times \{2, 4, 6\} \right) \cup \left(\{HHH, HTT, THT, TTH\} \times \{1, 3, 5\} \right),$$

που αποτελείται από $4 \times 3 + 4 \times 3 = 24$ ενδεχόμενα, άρα $P(A) = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$ και το παιχνίδι είναι δίκαιο.

2η Ομάδα Ασκήσεων

8. **(Το παράδοξο των γενεθλίων)** Σε μια αίθουσα βρίσκονται $M \leq 365$ άτομα. Ποια η πιθανότητα του ενδεχόμενου A τουλάχιστον δύο άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα του χρόνου; Ποιο είναι το μικρότερο M για το οποίο η πιθανότητα είναι μεγαλύτερη από 0.5; Έστω τώρα ένα συγκεκριμένο άτομο. Ποια η πιθανότητα του ενδεχόμενου B να έχει τουλάχιστον ένας από τους υπόλοιπους $M - 1$ γενέθλια μαζί με αυτό το άτομο; Να αγνοηθεί η ύπαρξη δίσεκτων ετών.

Λύση: Ο χρόνος έχει 365 μέρες. Για τα M άτομα υπάρχουν 365^M δυνατές M -άδες γενεθλίων. Ο αριθμός των M -άδων για τις οποίες κανείς δεν έχει γενέθλια με άλλον είναι

$$365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - M + 1) = \frac{365!}{(365 - M)!}.$$

Άρα η πιθανότητα του ενδεχόμενου A' κανείς να μην έχει γενέθλια με άλλον ισούται με

$$P(A') = \frac{365!}{365^M (365 - M)!} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{365!}{365^M (365 - M)!}.$$

Η πιθανότητα $P(A)$ προφανώς είναι αύξουσα συνάρτηση του M και περνά το 0.5 όταν $M = 23$, δηλαδή συνολικά έχουμε 23 άτομα. Επειδή αυτός ο αριθμός είναι μικρότερος από τον αναμενόμενο σύμφωνα με τη διαίσθηση των περισσότερων, το αποτέλεσμα καλείται το *παράδοξο των γενεθλίων*.

Έστω τώρα ένα συγκεκριμένο άτομο. Υπάρχουν 364^{M-1} τρόποι με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν τα γενέθλια των υπόλοιπων ώστε να μην συμπίπτουν με τα γενέθλια αυτού του ατόμου. Ο ολικός αριθμός τρόπων όμως είναι 365^{M-1} . Άρα,

$$P(B') = \frac{364^{M-1}}{365^{M-1}} \Rightarrow P(B) = 1 - P(B') = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{M-1}.$$

Σε αυτή την περίπτωση, το μικρότερο M για το οποίο η πιθανότητα είναι μεγαλύτερη από το 0.5 είναι το $M = 254$.

9. **(Παπουτσοθήκη)** Σε μια παπουτσοθήκη υπάρχουν 10 ζευγάρια παπούτσια, και συνεπώς συνολικά 20 παπούτσια. Ανοίγουμε την παπουτσοθήκη και παίρνουμε 4 παπούτσια, χωρίς προτίμηση στο συνδυασμό τους. Ποια είναι η πιθανότητα ανάμεσα στα 4 παπούτσια που πήραμε:

(α') Να μην υπάρχει ούτε ένα ζευγάρι;

(β') Να υπάρχει ακριβώς 1 ζευγάρι;

(γ') Να υπάρχουν 2 ζευγάρια;

Λύση: Έστω X το πλήθος από ζευγάρια παπουτσιών με το οποίο καταλήγουμε. Παρατηρούμε πως η Τ.Μ. X μπορεί να λάβει τις τιμές 0, 1, 2. Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες με τις οποίες λαμβάνει τις τιμές αυτές χρησιμοποιώντας συνδυαστική ανάλυση. Παρατηρούμε καταρχάς πως υπάρχουν 20 παπούτσια από τα οποία επιλέγονται τα 4, και επομένως υπάρχουν $\binom{20}{4}$ συνδυασμοί παπουτσιών που μπορεί να προκύψουν.

(α') Μετράμε καταρχάς τους συνδυασμούς παπουτσιών στους οποίους δεν υπάρχει ζευγάρι. Υπάρχουν $\binom{10}{4}$ τρόποι να επιλεγούν τα ζευγάρια από τα οποία να επιλέξουμε ακριβώς ένα παπούτσι, και εκ των υστέρων έχουμε 2 επιλογές για το παπούτσι που θα πάρουμε από κάθε ένα από τα 4 ζευγάρια. Επομένως,

$$P(X = 0) = \frac{\binom{10}{4} 2^4}{\binom{20}{4}} = \frac{224}{323}.$$

(β') Μετράμε τώρα τους συνδυασμούς παπουτσιών που περιέχουν ένα ζευγάρι ακριβώς. Υπάρχουν 10 τρόποι να επιλέξουμε το ζευγάρι, $\binom{9}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα άλλα 2 ζευγάρια που θα εκπροσωπηθούν στην επιλογή μας, και για κάθε ένα από αυτά υπάρχουν 2 επιλογές για το ποιο από τα 2 παπούτσια θα επιλεγεί. Τελικά,

$$P(X = 1) = \frac{10 \binom{9}{2} 2^2}{\binom{20}{4}} = \frac{96}{323}.$$

(γ') Τέλος, παρατηρούμε πως υπάρχουν $\binom{10}{2}$ συνδυασμοί παπουτσιών που αποτελούνται από ακριβώς 2 από τα διαθέσιμα 10 ζευγάρια, και επομένως,

$$P(X = 2) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{3}{323}.$$

10. **(Age of Empires Logic)** 20 πολεμικοί ελέφαντες και 30 πεζικάριοι επιχειρούν να επιβιβαστούν σε ένα αποβατικό σκάφος και από αυτούς επιλέγονται μόνο οι 10, χωρίς προτίμηση στο ποιοι θα επιβιβαστούν. Ποια είναι η πιθανότητα να επιβιβαστούν τουλάχιστον 7 ελέφαντες;

Λύση: Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 10 θέσεις για 50 «άτομα» (όπου ένα άτομο μπορεί να είναι πεζικάριος ή ελέφαντας), και επομένως ο δειγματικός χώρος έχει $\binom{50}{10}$ συνδυασμούς. Μετράμε καταρχάς τους συνδυασμούς με τους 7 ελέφαντες (και προφανώς 3 πεζικάριους). Έχουμε $\binom{20}{7}$ τρόπους για να διαλέξουμε τους 7 ελέφαντες από τους 20 διαθέσιμους, και μένουν 3 θέσεις που πρέπει να γεμίσουν με 3 από τους 30 πεζικάριους. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{30}{3}$ τρόπους, και τελικά υπάρχουν $\binom{20}{7} \binom{30}{3}$ συνδυασμοί με ακριβώς 7 ελέφαντες. Παρόμοια μπορεί να υπολογιστούν οι συνδυασμοί με 8, 9, 10 ελέφαντες, και τελικά το ενδεχόμενο A να υπάρχουν τουλάχιστον 7 ελέφαντες έχει πιθανότητα

$$P(A) = \frac{\binom{20}{7} \binom{30}{3} + \binom{20}{8} \binom{30}{2} + \binom{20}{9} \binom{30}{1} + \binom{20}{10}}{\binom{50}{10}} \simeq 0.0365.$$

11. **(Τράπουλα)** Ποια η πιθανότητα τραβώντας 5 φύλλα στην τύχη από μια τράπουλα να φέρετε:

- (α') Άσο μπαστούνι, δηλαδή να περιέχεται το φύλλο $A\spadesuit$.
 (β') Οποιοδήποτε άσο ανάμεσα στα φύλλα σας.
 (γ') Φουλ του άσου, δηλαδή 3 άσους και τα υπόλοιπα 2 φύλλα να είναι όμοια (π.χ., 2 ντάμες).

Υποθέστε ότι όλοι οι συνδυασμοί 5 φύλλων είναι ισοπίθανοι.

Λύση:

- (α') Παρατηρούμε πως υπάρχουν $\binom{52}{5}$ συνδυασμοί φύλλων που μπορεί να έχουμε τραβήξει. Από αυτούς, υπάρχουν $\binom{51}{4}$ δυνατοί συνδυασμοί 4 φύλλων από τα υπόλοιπα 51, στους οποίους μπορούμε να προσθέσουμε τον Άσο μπαστούνι, και να φτιάξουμε έτσι όλους τους δυνατούς συνδυασμούς 5 φύλλων που περιέχουν τον Άσο μπαστούνι. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$p = \frac{\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}} = \frac{51!47!5!}{4!47!52!} = \frac{5}{52}.$$

Το αποτέλεσμα είναι λογικό, και μπορούμε να καταλήξουμε σε αυτό και με ένα άλλο τρόπο: υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 52 χαρτιά, εκ των οποίων 5 είναι στο χέρι μας και 47 είναι στην υπόλοιπη τράπουλα, και το πείραμα είναι η αποκάλυψη ενός εξ αυτών ως ο Άσος μπαστούνι. Το ενδεχόμενο ο Άσος μπαστούνι να αποκαλυφθεί στο χέρι μας αποτελείται από 5 από 52 αποτελέσματα. Είναι διαισθητικά προφανές ότι τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, επομένως τελικά η πιθανότητα αυτού του ενδεχόμενου είναι $5/52$.

- (β') Είναι πιο εύκολο να υπολογίσουμε την πιθανότητα να μην σηκώσουμε κανένα άσο. Από τους $\binom{52}{5}$ ισοπίθανους συνδυασμούς, υπάρχουν $\binom{48}{5}$ χωρίς ούτε ένα άσο, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$p = 1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 1 - \frac{47 \times 46 \times 45 \times 44}{52 \times 51 \times 50 \times 49} \simeq 0.3412.$$

- (γ') Υπάρχουν $\binom{52}{5}$ συνολικά συνδυασμοί φύλλων που μπορούν να επιλεγούν. Για να μετρήσουμε αυτούς που αντιστοιχούν σε φουλ του άσου, παρατηρούμε ότι υπάρχουν $\binom{4}{3} = 4$ τρόποι για να επιλέξουμε ποιους 3 άσους θα διαλέξουμε, 12 τρόποι για να διαλέξουμε το νούμερο που θα έχει το ζεύγος, και $\binom{4}{2} = 6$ να επιλέξουμε τα 2 από τα 4 φύλλα που θα επιλέξουμε από το συγκεκριμένο νούμερο. Τελικά,

$$p = \frac{4 \times 12 \times 6}{\binom{52}{5}} \simeq 1.1 \times 10^{-4}.$$

12. **(Λεωφορείο)** Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με k φοιτητές και περνάει από n στάσεις.

- (α') Να κατασκευαστεί δειγματικός χώρος για τις δυνατές αποβιβάσεις των φοιτητών, και να υπολογισθεί ο αριθμός των δυνατών αυτών αποβιβάσεων.
 (β') Να υπολογισθεί η πιθανότητα τουλάχιστον σε μια στάση να αποβιβαστούν περισσότεροι από ένας φοιτητές.

Λύση:

- (α') Μια επιλογή είναι να ορίσουμε το δειγματικό χώρο ως το σύνολο όλων των επαναληπτικών διατάξεων k αντικειμένων επιλεγμένων από n επιλογές. Επομένως, η διάταξη $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ σημαίνει ότι ο πρώτος φοιτητής κατέβηκε στην n_1 στάση, ο δεύτερος στην n_2 στάση, κ.ο.κ., και τελικά ο φοιτητής k κατέβηκε στην στάση n_k . Τα στοιχεία αυτού του δειγματικού χώρου είναι συνολικά n^k .
- (β') Έστω p_1 η ζητούμενη πιθανότητα. Παρατηρούμε καταρχάς ότι αν $k > n$, δηλαδή υπάρχουν περισσότεροι φοιτητές από στάσεις, τότε $p_1 = 0$, δηλαδή σίγουρα σε κάποια στάση θα κατεβούν πάνω από ένας φοιτητές. Έστω τώρα πως $k \leq n$. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $p_2 = 1 - p_1$ του ενδεχόμενου σε κάθε στάση να κατεβεί το πολύ ένας φοιτητής. Καταρχάς, από το προηγούμενο σκέλος ο δειγματικός χώρος έχει συνολικά n^k αποτελέσματα. Θα μετρήσουμε πόσα από αυτά καταλήγουν στο να κατεβούν όλοι οι φοιτητές μόνοι τους. Υπάρχουν n επιλογές για τον πρώτο φοιτητή, $n - 1$ επιλογές για τον δεύτερο, κ.ο.κ., και τελικά $n - k + 1$ επιλογές για τον τελευταίο. Άρα, τελικά η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$p_1 = 1 - \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k}.$$

13. **(Ασανσέρ)** Έστω κτήριο με 5 ορόφους. (Στους 5 ορόφους δεν υπολογίζεται το ισόγειο. Επίσης, δεν υπάρχει υπόγειο.) Έστω πως 4 άτομα, οι 1,2,3,4, μπαίνουν, από το ισόγειο, στο ασανσέρ. Καθένα από αυτά κατευθύνεται προς έναν από τους 5 ορόφους. Κάθε ένα από τα άτομα θα βγει σε κάποιον όροφο ανεξάρτητα από τα άλλα άτομα, χωρίς κάποια προτίμηση ως προς τον όροφο.

- (α') Ορίστε δειγματικό χώρο για το άνω τυχαίο πείραμα. Πόσα αποτελέσματα περιλαμβάνει και τι πιθανότητα έχει το καθένα;
- (β') Ποια η πιθανότητα να πάνε όλα τα άτομα σε έναν μόνο (αλλά οποιονδήποτε) όροφο;
- (γ') Ποια η πιθανότητα να πάνε όλα τα άτομα σε διαφορετικούς ορόφους;
- (δ') Ποια η πιθανότητα να βγουν δύο (οποιαδήποτε) άτομα μαζί σε έναν (οποιαδήποτε) όροφο και τα δύο άλλα επίσης μαζί σε έναν άλλο (οποιαδήποτε) όροφο;

Λύση:

- (α') Ο πιο προφανής τρόπος να οριστεί ο δειγματικός χώρος είναι ως όλες οι τετράδες της μορφής (x_1, x_2, x_3, x_4) , όπου $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, είναι ο όροφος όπου θα κατέβει από το ασανσέρ το άτομο i . Ο δειγματικός χώρος απαρτίζεται από $5^4 = 625$ αποτελέσματα, και βάσει των υποθέσεων κάθε ένα από αυτά έχει πιθανότητα $1/625$ να προκύψει.
- (β') Έστω A το συγκεκριμένο ενδεχόμενο. Από τα 5^4 αποτελέσματα, υπάρχουν ακριβώς 5, ένα για κάθε όροφο, που περιλαμβάνονται στο ενδεχόμενο A . Άρα,

$$P(A) = \frac{5}{5^4} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}.$$

- (γ') Έστω B το συγκεκριμένο ενδεχόμενο. Φανταστείτε πως τα 4 άτομα αποφασίζουν διαδοχικά για το που θα βγουν. Υπάρχουν 5 επιλογές για τον 1, 4 επιλογές για τον 2, κ.ο.κ., άρα τελικά

$$P(B) = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{5^4} = \frac{24}{5^3} = \frac{24}{125}.$$

- (δ') Έστω C το συγκεκριμένο ενδεχόμενο. Για να μετρήσουμε τα αποτελέσματα από τα οποία αποτελείται, παρατηρούμε πως υπάρχουν $\binom{5}{2} = 10$ επιλογές για τους ορόφους στους οποίους θα καταλήξουν ζεύγη. Με δεδομένους τους ορόφους αυτούς, υπάρχουν $\binom{4}{2} = 6$ τρόποι με τους οποίους μπορούν να κατανεμηθούν τα 4 άτομα. Άρα, τελικά

$$P(C) = \frac{\binom{5}{2} \binom{4}{2}}{5^4} = \frac{60}{5^4} = \frac{12}{125}.$$

Μπορείτε να απαντήσετε τα άνω ερωτήματα με χρήση δεσμευμένων πιθανοτήτων; Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι απαντήσεις σας θα είναι απλούστερες αυτών που δόθηκαν εδώ.

14. **(Ρακούν)** Ένα πάρκο έχει > 25 ρακούν, από τα οποία 10 έχουν αιχμαλωτιστεί, καταγραφεί και κατόπιν ελευθερωθεί. Έστω ότι αιχμαλωτίζονται εκ νέου 20 ρακούν. Να βρεθεί η πιθανότητα 5 από αυτά να έχουν ήδη καταγραφεί. Έστω $P(N)$ αυτή η πιθανότητα. Για ποια τιμή του N μεγιστοποιείται; (Υπόδειξη: συγκρίνετε το λόγο $P(N)/P(N-1)$ με τη μονάδα.)

Λύση: Υπάρχουν συνολικά $\binom{N}{20}$ διαφορετικές ομάδες ρακών που μπορούν να αιχμαλωτιστούν, όλες ισοπίθανες μεταξύ τους. Από όλες αυτές τις ομάδες, αυτές που αντιστοιχούν σε ακριβώς 5 καταγεγραμμένα ρακούν είναι $\binom{N-10}{15} \binom{10}{5}$. Συνεπώς, η πιθανότητα να αιχμαλωτιστούν ακριβώς 5 ρακούν είναι

$$P(N) = \frac{\binom{N-10}{15} \binom{10}{5}}{\binom{N}{20}} = \frac{(N-10)!10!20!(N-20)!}{15!(N-25)!5!5!N!}.$$

Σύμφωνα με την υπόδειξη, σχηματίζουμε τον λόγο $\frac{P(N)}{P(N-1)}$:

$$\frac{P(N)}{P(N-1)} = \frac{(N-10)!(N-20)!(N-26)!(N-1)!}{(N-25)!N!(N-11)!(N-21)!} = \frac{(N-10)(N-20)}{(N-25)N}.$$

Ακολούθως, βρίσκουμε τη συνθήκη ώστε ο λόγος να είναι μεγαλύτερος της μονάδας:

$$\frac{P(N)}{P(N-1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{N^2 - 30N + 300}{N^2 - 25N} > 1 \Leftrightarrow N^2 - 30N + 300 > N^2 - 25N \Leftrightarrow N < 60.$$

Για $N < 60$, ο λόγος είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Για $N = 60$ ισούται με τη μονάδα, και για $N > 60$ είναι μικρότερος της μονάδας. Συνεπώς, οι μεγαλύτερες τιμές της $P(N)$ επιτυγχάνονται για $N = 59, 60$.

15. **(Χρωματιστές μπάλες)** Πόσες δυνατές διακριτές μεταθέσεις υπάρχουν ανάμεσα σε 4 κόκκινες μπάλες, 2 λευκές και 3 μαύρες; Εννοείται ότι μπάλες ίδιου χρώματος είναι εντελώς όμοιες μεταξύ τους, και προφανώς η μετάθεση δεν θα αλλάξει αν αλλάξουν δύο μπάλες ίδιου χρώματος θέση μεταξύ τους.

Λύση: Έχουμε 9 διαφορετικές δυνατότητες για την επιλογή της πρώτης μπάλας, 8 διαφορετικές δυνατότητες για την επιλογή της δεύτερης μπάλας, κοκ. Αν όλες οι μπάλες είχαν διαφορετικό χρώμα, τότε οι διαφορετικές μεταθέσεις θα ήταν $9!$. Όμως υπάρχουν μπάλες του ίδιου χρώματος, με αποτέλεσμα κάποιες από τις $9!$ μεταθέσεις να ταυτίζονται. Για παράδειγμα, οι ακόλουθες δύο μεταθέσεις ταυτίζονται:

$$(\Lambda 1, \Lambda 2, M1, M2, M3, K1, K2, K3, K4) \text{ και } (\Lambda 2, \Lambda 1, M1, M2, M3, K1, K2, K3, K4).$$

Για να υπολογίσουμε τον αριθμό των διακριτών μεταθέσεων, πρέπει να διαιρέσουμε το $9!$ με το 2, καθώς λόγω των δύο λευκών μπαλών, ορισμένες μεταθέσεις εμφανίζονται δύο φορές στις αρχικές $9!$. Ακολούθως, πρέπει να διαιρέσουμε με το $3! = 6$, γιατί λόγω των 3 μαύρων μπαλών, ορισμένες μεταθέσεις εμφανίζονται $3! = 6$ φορές. (Υπάρχουν $3! = 6$ τρόποι με τους οποίους μπορούν να παραταχθούν 3 αντικείμενα.) Τέλος, πρέπει να διαιρέσουμε με $4! = 24$ λόγω των κόκκινων μπαλών. Συνεπώς, ο αριθμός των διατάξεων είναι $\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να σκεφτούμε ως εξής: έχουμε $\binom{9}{4}$ τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τις κόκκινες μπάλες στις θέσεις 1 έως 9. Κατόπιν, έχουμε $\binom{5}{3}$ τρόπους να επιλέξουμε τις 3 θέσεις για τις μαύρες από τις 5 που απομένουν. Πολλαπλασιάζοντας, προκύπτουν και πάλι $\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$ τρόποι. (Παρατηρήστε ότι αν τοποθετήσουμε τις κόκκινες και τις μαύρες, έχουμε καθορίσει με μοναδικό τρόπο τη θέση των λευκών.) δύο λευκές.

3η Ομάδα Ασκήσεων

16. **(Σύνοδος Κορυφής)** Σε μια σύνοδο κορυφής, δύο αρχηγοί κρατών επιλέγουν, για τον επιθετικό προσδιορισμό ενός κράτους, μια διάταξη τριών λέξεων επιλεγμένων από τις ακόλουθες δέκα: Republika, Nova, Severna, Gorna, Vardarska, (Skopje), Ilidenska, Wakanda, Mordor, Tatooine. Όλες οι δυνατές διατάξεις είναι ισοπίθανες.

- (α') Ποια είναι η πιθανότητα να επιλεγούν, στη διάταξη των τριών λέξεων, οι λέξεις Gorna και Severna, και επιπλέον η λέξη Gorna να εμφανίζεται σε κάποια θέση πριν τη λέξη Severna;
- (β') Με δεδομένο ότι μια από τις τρεις λέξεις που τελικά επελέγησαν είναι η Wakanda, ποια είναι η πιθανότητα να ΜΗΝ έχει επιλεγεί ΚΑΙ η λέξη Mordor;

Λύση:

- (α') Μια λύση του προβλήματος είναι η εξής: Υπάρχουν συνολικά $\binom{10}{3}$ συνδυασμοί λέξεων που μπορούν να επιλεγούν, ενώ υπάρχουν οκτώ συνδυασμοί που περιλαμβάνουν τις δύο δοσμένες λέξεις και μια από τις άλλες οκτώ. Επομένως, η πιθανότητα να καταλήξουμε με αυτές τις δύο λέξεις στον επιθετικό προσδιορισμό είναι $8/\binom{10}{3} = \frac{1}{15}$. Όμως, εμείς ενδιαφερόμαστε να εμφανίζεται πρώτα η λέξη Gorna και μετά η λέξη Severna. Λόγω συμμετρίας, τα δύο αυτά ενδεχόμενα πρέπει να είναι ισοπίθανα, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα πρέπει να είναι $\frac{1}{2} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας διατάξεις. Συγκεκριμένα, υπάρχουν $10 \times 9 \times 8$ δυνατές διατάξεις τριών λέξεων. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των διατάξεων που ικανοποιούν την δοθείσα συνθήκη, παρατηρούμε πως έχουμε $\binom{3}{2} = 3$ τρόπους για να επιλέξουμε τις δύο θέσεις που θα καταλάβουν οι δοσμένες λέξεις, και 8 επιλογές για την λέξη που θα συμπληρώσει την τριάδα. Επομένως, υπάρχουν 3×8 διατάξεις στο ενδεχόμενο που εξετάζουμε, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{3 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{30}$, όπως και με την προηγούμενη λύση.

- (β') Έστω A το ενδεχόμενο να επιλεγεί η λέξη Wakanda και B το ενδεχόμενο να μην επιλεγεί η λέξη Mordor. Ζητείται να υπολογιστεί η δεσμευμένη πιθανότητα $P(B|A)$.

Υπάρχουν διάφορες λύσεις. Σχετικά με την πρώτη:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Σχετικά με την $P(A)$, παρατηρούμε πως έχουμε συνολικά $\binom{10}{3}$ συνδυασμούς. Από αυτούς, οι $\binom{9}{2}$ έχουν την λέξη Wakanda, αφού υπάρχουν $\binom{9}{2}$ τρόποι να επιλέξουμε τις δύο άλλες λέξεις. Άρα τελικά:

$$P(A) = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}.$$

Επίσης, το πλήθος των συνδυασμών που έχουν την λέξη Wakanda αλλά όχι τη λέξη Mordor είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε από οκτώ λέξεις (δηλαδή όλες εκτός της Wakanda και της Mordor) τις δύο από αυτές, για να συμπληρώσουν, μαζί με την λέξη Wakanda, την τριάδα. Επομένως,

$$P(AB) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{30},$$

και τελικά

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{7 \times 10}{30 \times 3} = \frac{7}{9}.$$

Σχετικά με τη δεύτερη λύση,

$$P(B|A) = 1 - P(B'|A) = 1 - \frac{P(AB')}{P(A)}.$$

Το ενδεχόμενο AB' είναι το ενδεχόμενο να επιλέξουμε τρεις λέξεις και να υπάρχουν σε αυτές και η λέξη Wakanda και η λέξη Mordor. Η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου είναι το πλήθος των συνδυασμών αυτών των λέξεων με μια άλλη από τις οκτώ, δηλαδή οκτώ, διαιρεμένο με το πλήθος όλων των συνδυασμών, δηλαδή $\binom{10}{3}$. Επομένως,

$$P(AB') = \frac{8}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{15} \Rightarrow P(B|A) = 1 - \frac{P(AB')}{P(A)} = 1 - \frac{10}{15 \times 3} = \frac{7}{9}.$$

Μια τελευταία λύση είναι απλώς να παρατηρούμε ότι με δεδομένο ότι στην διάταξη υπάρχει η Wakanda, υπάρχουν $\binom{9}{2}$ επιλογές για τις άλλες δύο λέξεις, εκ των οποίων οι $\binom{8}{2}$ δεν έχουν τη λέξη Mordor, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{8}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{7}{9}.$$

17. **(Δημοφιλία)** Έξι άτομα, έστω A, B, C, D, E , και F είναι διατεταγμένα σύμφωνα με τη δημοφιλία τους, χωρίς όμως να γνωρίζουν τη διάταξή τους, και υποθέτουν ότι όλες οι διατάξεις είναι εξίσου πιθανές. Με δεδομένο ότι τα άτομα μαθαίνουν ότι ο A είναι πιο δημοφιλής από τον B , ποια είναι η πιθανότητα που δίνουν στο ενδεχόμενο ο A να είναι πιο δημοφιλής και από τον C ;

Λύση: Συμβολίζοντας με $X > Y$ το ενδεχόμενο το άτομο X να είναι δημοφιλέστερο από το άτομο Y , παρατηρούμε πως

$$P(A > C | A > B) = \frac{P(A > C, A > B)}{P(A > B)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Οι τιμές των $P(A > C, A > B)$ και $P(A > B)$ προκύπτουν από συμμετρία.

18. **(Τρεις περιπτώσεις)** Έχουμε τρία χαρτιά τα οποία καλούμε AA, MM, AM . Το AA έχει και τις δύο πλευρές χρωματισμένες άσπρες, το MM και τις δύο μαύρες, ενώ το AM έχει την μία πλευρά χρωματισμένη άσπρη και την άλλη μαύρη. Ένας φίλος μας επιλέγει ένα χαρτί στην τύχη και μας δείχνει μόνο ότι η μια πλευρά του είναι άσπρη. Ποια είναι η πιθανότητα η άλλη πλευρά να είναι μαύρη; Απαντήστε το ερώτημα κάνοντας διαδοχικά τις ακόλουθες παραδοχές:

- (α') Ο φίλος μας δείχνει τη μια πλευρά χωρίς να τη διαλέξει, αλλά επιλέγοντάς την στην τύχη, χωρίς προτίμηση στην πλευρά.
 (β') Ο φίλος μας δείχνει τη μια πλευρά προτιμώντας να δείξει, αν μπορεί, μια άσπρη πλευρά.
 (γ') Ο φίλος μας δείχνει τη μια πλευρά προτιμώντας να δείξει, αν μπορεί, μια μαύρη πλευρά.

Λύση: Έστω AA, AM, MM τα ενδεχόμενα ο φίλος μας να έχει επιλέξει το αντίστοιχο χαρτί. Έχουμε κατά περίπτωση:

- (α') Ορίζουμε επιπλέον το ενδεχόμενο $AM1$ ο φίλος μας να επιλέξει το χαρτί AM και να μας δείξει την πρώτη πλευρά του, που υποθέτουμε πως είναι αυτή που αναγράφεται πρώτη στο όνομα του χαρτιού AM , δηλαδή η άσπρη. Ομοίως ορίζουμε τα ενδεχόμενα $AM2, AA1, AA2, MM1, MM2$. Καθένα από αυτά τα ενδεχόμενα έχουν πιθανότητα $1/6$, λόγω συμμετρίας. Μας έχει δοθεί ότι έχει συμβεί το $E_1 = AA1 \cup AA2 \cup AM1$, και ζητείται η $P(AM|E_1)$. Έχουμε:

$$P(AM|E_1) = \frac{P(AM \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(AM1)}{P(AA1 \cup AA2 \cup AM1)} = \frac{1}{3}.$$

- (β') Σε αυτή την περίπτωση, ξέρουμε πως έχει συμβεί το ενδεχόμενο $E_2 = AM \cup AA$. Άρα,

$$P(AM|E_2) = \frac{P(AM \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(AM)}{P(A \cup AA)} = \frac{1}{2}.$$

- (γ') Σε αυτή την περίπτωση, ξέρουμε πως έχει συμβεί το ενδεχόμενο $E_3 = AA$. Άρα,

$$P(AM|E_3) = \frac{P(AM \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{P(\emptyset)}{P(AA)} = 0.$$

Βεβαιωθείτε πως το αποτέλεσμα συμφωνεί με τη διαίσθησή σας, σε όλες τις περιπτώσεις.

19. **(Κλέφτης)** Το συρτάρι A περιέχει 3 χρυσά και 3 αργυρά κέρματα ενώ το συρτάρι B περιέχει 3 χρυσά και 6 αργυρά. Ένας κλέφτης (στα σκοτεινά) ανοίγει ένα συρτάρι στην τύχη και αρπάζει δύο κέρματα στην τύχη.

- (α') Ποια η πιθανότητα να είναι και τα δύο χρυσά;
 (β') Αν διαπιστωθεί (κατά την σύλληψή του) ότι έχει κλέψει δύο χρυσά κέρματα, ποια είναι η πιθανότητα να είχε ανοίξει το συρτάρι A ;

Λύση: Ορίζουμε τα ενδεχόμενα A ο κλέφτης να ανοίξει το συρτάρι A , B ο κλέφτης να ανοίξει το συρτάρι B , και GG ο κλέφτης να πάρει δύο χρυσά κέρματα. Υποθέτουμε πως $P(A) = P(B) = 1/2$, και επιπλέον παρατηρούμε πως

$$P(GG|A) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{5}, \quad P(GG|B) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{12}.$$

(α') Με χρήση του κανόνα της ολικής πιθανότητας,

$$P(GG) = P(GG|A)P(A) + P(GG|B)P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{120}.$$

(β') Με διπλή χρήση του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(A|GG) = \frac{P(A \cap GG)}{P(GG)} = \frac{P(GG|A)P(A)}{P(GG)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{17}{120}} = \frac{12}{17}.$$

Όπως αναμενόταν, η δεσμευμένη πιθανότητα είναι μεγαλύτερη του $1/2$.

20. **(Εξέταση)** Μια καθηγήτρια εξετάζει ένα φοιτητή στην ύλη ενός μαθήματος ως εξής. Ο φοιτητής απαντά 6 ερωτήσεις, με τις απαντήσεις του να είναι σωστές ή λάθος. Αν απαντήσει σωστά σε 4 και άνω ερωτήσεις, ο φοιτητής περνά το μάθημα, αλλιώς δεν περνά το μάθημα. Δίνεται ότι ο φοιτητής θα είναι αδιάβαστος με πιθανότητα $p_A = 1/2$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.2, θα είναι μισοδιαβασμένος με πιθανότητα $p_B = 1/3$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.5, και διαβασμένος με πιθανότητα $p_C = 1/6$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.8. Σε κάθε μια από τις άνω τρεις περιπτώσεις, η κάθε απάντηση είναι σωστή ή λάθος ανεξάρτητα από τις άλλες απαντήσεις.

(α') Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, να δοθεί ένας τύπος για τη μάζα πιθανότητας του πλήθους X των σωστών απαντήσεων που αυτός θα δώσει.

(β') Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, ποια είναι η πιθανότητα να περάσει το μάθημα;

(γ') Με δεδομένο ότι ο φοιτητής πέρασε το μάθημα, ποια ήταν η πιθανότητα να ήταν αδιάβαστος;

Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο ο φοιτητής να είναι αδιάβαστος, B το ενδεχόμενο να είναι μισοδιαβασμένος, και C το ενδεχόμενο να είναι διαβασμένος. Έστω επίσης S_i , με $i = 1, \dots, 6$, το ενδεχόμενο ο φοιτητής να απάντησε σωστά την ερώτηση i . Μας έχουν δοθεί τα ακόλουθα δεδομένα:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(C) = \frac{1}{6},$$

$$P(S_i|A) = 0.2, \quad P(S_i|B) = 0.5, \quad P(S_i|C) = 0.8, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Τέλος, έστω D το ενδεχόμενο ο φοιτητής να περάσει το μάθημα.

(α') Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, τότε κάθε μια από τις 6 ερωτήσεις θα απαντηθεί σωστά με πιθανότητα 0.2 ανεξάρτητα από τις άλλες. Επομένως, το πλήθος X των σωστών απαντήσεων θα ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 6$ και $p = 0.2$ και θα έχουμε

$$P(X = k) = \binom{6}{k} 0.2^k 0.8^{6-k}.$$

(β') Ο φοιτητής θα περάσει το μάθημα αν απαντήσει τουλάχιστον 4 ερωτήσεις σωστά. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(D) = \binom{6}{4} 0.2^4 0.8^2 + \binom{6}{5} 0.2^5 0.8^1 + \binom{6}{6} 0.2^6 0.8^0 \simeq 0.0170.$$

(γ') Θα χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}P(D|A)}{\frac{1}{2}P(D|A) + \frac{1}{3}P(D|B) + \frac{1}{6}P(D|C)}, \end{aligned}$$

όπου η $P(D|A)$ είναι αυτή που έχει υπολογιστεί στο προηγούμενο σκέλος, ενώ για τις άλλες δεσμευμένες πιθανότητες, ανάλογα με το προηγούμενο σκέλος, έχουμε

$$\begin{aligned} P(D|B) &= \binom{6}{4} 0.5^4 0.5^2 + \binom{6}{5} 0.5^5 0.5^1 + \binom{6}{6} 0.5^6 0.5^0 \simeq 0.3438, \\ P(D|C) &= \binom{6}{4} 0.8^4 0.2^2 + \binom{6}{5} 0.8^5 0.2^1 + \binom{6}{6} 0.8^6 0.2^0 \simeq 0.9091. \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση, τελικά προκύπτει πως

$$P(A|D) \simeq 0.0243.$$

21. **(Φωτιές)** Σε ένα δάσος θα ξεσπάσει κάθε καλοκαίρι έστω και μία πυρκαγιά με πιθανότητα 0.3, αν την προηγούμενη άνοιξη δεν έχει βρέξει σε αυτό, με πιθανότητα 0.2 αν την προηγούμενη άνοιξη έχει βρέξει σε αυτό 1 φορά, και με πιθανότητα 0.1 αν την προηγούμενη άνοιξη έχει βρέξει σε αυτό 2 φορές. Κάθε άνοιξη σε αυτό το δάσος βρέχει 0, 1, ή 2 φορές με πιθανότητες, αντίστοιχα, 0.3, 0.3, και 0.4.

- (α') Με δεδομένο ότι ξέσπασε έστω και μια πυρκαγιά στο δάσος σε ένα καλοκαίρι, ποια η πιθανότητα να είχε βρέξει σε αυτό το δάσος την προηγούμενη άνοιξη 2 φορές;
- (β') Δίνεται ότι τα ενδεχόμενα να ξεσπάσει έστω και μια πυρκαγιά σε διαφορετικά έτη είναι ανεξάρτητα. Ποια είναι η μάζα πιθανότητας της Τ.Μ. X που εκφράζει το πλήθος των ετών εντός μιας δεκαετίας κατά τα οποία θα ξεσπάσει έστω μια πυρκαγιά;

Λύση:

- (α') Έστω B το ενδεχόμενο να ξεσπάσει πυρκαγιά και R_0, R_1, R_2 τα ενδεχόμενα να έχει βρέξει 0, 1 ή 2 φορές την προηγούμενη άνοιξη. Χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του Bayes, θα έχουμε

$$\begin{aligned} P(R_2|B) &= \frac{P(B|R_2)P(R_2)}{P(B|R_0)P(R_0) + P(B|R_1)P(R_1) + P(B|R_2)P(R_2)} \\ &= \frac{0.1 \times 0.4}{0.3 \times 0.3 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.4} = \frac{4}{19}. \end{aligned}$$

- (β') Η πιθανότητα να ξεσπάσει έστω και μια πυρκαγιά σε ένα καλοκαίρι είναι

$$P(B) = P(B|R_0)P(R_0) + P(B|R_1)P(R_1) + P(B|R_2)P(R_2) = 0.19.$$

Επειδή τα ενδεχόμενα να ξεσπάσει πυρκαγιά είναι ανεξάρτητα, το πλήθος των ετών είναι διωνυμικά κατανομημένο, με πλήθος πειραμάτων $N = 10$ και πιθανότητα επιτυχίας $p = P(B) = 0.19$.

22. **(Τέσσερα διαφορετικά κέρματα)** Έχουμε 4 κέρματα. Τα δύο πρώτα είναι δίκαια, το τρίτο έρχεται γράμματα με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και το τέταρτο έρχεται γράμματα με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Διαλέγουμε ένα κέρμα στην τύχη, το ρίχνουμε 2 φορές, και φέρνουμε δύο φορές γράμματα. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε ένα από τα δύο δίκαια κέρματα;

Λύση: Έστω 1, 2, 3, και 4 τα ενδεχόμενα να χρησιμοποιήσουμε το πρώτο, δεύτερο, τρίτο, ή τέταρτο κέρμα αντίστοιχα. Εξ υποθέσεως $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1}{4}$. Έστω το ενδεχόμενο να φέρουμε δύο φορές γράμματα. Εφαρμόζουμε τον τύπο του Bayes:

$$\begin{aligned} P(1|TT) &= \frac{P(TT|1)P(1)}{P(TT|1)P(1) + P(TT|2)P(2) + P(TT|3)P(3) + P(TT|4)P(4)} = \\ &= \frac{P(TT|1)}{P(TT|1) + P(TT|2) + P(TT|3) + P(TT|4)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}} \simeq 0.3711. \end{aligned}$$

Στην τρίτη εξίσωση, κάναμε την υπόθεση ότι, δεδομένης της επιλογής του κέρματος, οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες. Τέλος, παρατηρήστε πως, λόγω συμμετρίας, $P(2|TT) = P(1|TT)$, άρα η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει ένα από τα δίκαια κέρματα είναι περίπου $2 \times 0.3711 = 0.7422$.

4η Ομάδα Ασκήσεων

23. **(Βάσια)** Ο κυβερνήτης του υποβρυχίου «Χατζηπαναγής» έχει στο στόχαστρο ένα κομβίο από 2 εχθρικά μεταγωγικά, το A και το B . Έχει στη διάθεσή του 5 τορπίλες, τις οποίες, για λόγους ασφαλείας, πρέπει να εκτοξεύσει όλες, και σχεδόν ταυτόχρονα, και πριν προλάβει να διαπιστώσει αν κάποια από αυτές έχει βρει στόχο. Κάθε τορπίλη θα πετύχει και θα βυθίσει το μεταγωγικό στο οποίο θα τη στείλει ο καπετάνιος με πιθανότητα $p = \frac{1}{4}$. Ο καπετάνιος ξέρει ότι το μεταγωγικό A έχει αξία, για τον εχθρό, 4 εκατομμύρια ευρώ, ενώ το μεταγωγικό B έχει αξία 8 εκατομμύρια ευρώ.

- (α') Αν ο καπετάνιος στείλει 3 τορπίλες στο μεταγωγικό A και 2 τορπίλες στο μεταγωγικό B , πόση είναι η αναμενόμενη τιμή της ζημιάς που θα επιφέρει στον εχθρό;
 (β') Αν ο καπετάνιος θέλει να μεγιστοποιήσει τη ζημιά που θα επιφέρει στον εχθρό, πόσες τορπίλες πρέπει να στείλει στο μεταγωγικό A και πόσες στο B ;

Λύση: Θα λύσουμε και τα δύο σκέλη μαζί. Έστω x , με $x = 0, 1, \dots, 5$, το πλήθος των τορπιλών που ο καπετάνιος θα αποστείλει στο μεταγωγικό A . Το μεταγωγικό A θα βυθιστεί αν δεν αστοχήσουν όλες, επομένως να βυθιστεί με πιθανότητα $(1 - (\frac{3}{4})^x)$. Με παρόμοιο συλλογισμό, το μεταγωγικό B θα βυθιστεί με πιθανότητα $(1 - (\frac{3}{4})^{5-x})$. Επομένως, η αναμενόμενη τιμή του κόστους στον εχθρό θα είναι

$$E(C) = 4 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x\right) + 8 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}\right) = \begin{cases} 6.1016, & x = 0, \\ 6.4688, & x = 1, \\ 6.3750, & x = 2, \\ 5.8125, & x = 3, \\ 4.7344, & x = 4, \\ 3.0508, & x = 5. \end{cases}$$

Επομένως, αν ο κυβερνήτης στείλει 3 τορπίλες στο μεταγωγικό A , το αναμενόμενο κόστος στον εχθρό θα είναι $E(C_3) = 5.8125$, ενώ αν ο κυβερνήτης στείλει 1 τορπίλες στο μεταγωγικό A , το αναμενόμενο κόστος στον εχθρό θα είναι $E(C_1) = 6.4688$, που είναι και το μεγαλύτερο δυνατό.

24. **(Δράκοι και βαλλίστρες)** 10 βαλλίστρες βρίσκονται αντιμέτωπες με 2 δράκους. Κάθε βαλλίστρα μπορεί να εκτοξεύσει ένα μόνο βέλος, προς έναν από τους δύο δράκους, και θα τον πετύχει με πιθανότητα $p = 0.2$, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Ένα χτύπημα από ένα βέλος αρκεί για να σκοτώσει τον κάθε δράκο. Όλες οι βαλλίστρες θα βάλουν ταυτόχρονα.

- (α') Έστω ότι 3 από τις βαλλίστρες θα στοχεύσουν τον 1 δράκο, και οι άλλες 7 θα στοχεύσουν τον άλλο. Έστω X το πλήθος των δράκων που επιβιώνουν. Βρείτε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας του X .
 (β') Αν έστω ένας δράκος επιβιώσει, θα καταστρέψει όλες τις βαλλίστρες. Αν στόχος σας είναι να σκοτωθούν και οι δύο δράκοι, και να επιζήσουν έτσι οι βαλλίστρες, και έχετε επιλογή να επιλέξετε πόσες βαλλίστρες θα στραφούν προς κάθε δράκο, πόσες θα επιλέξετε να επιτεθούν σε κάθε δράκο; Δώστε πλήρως αιτιολογημένη απάντηση.
 (α') Καταρχάς, ο πρώτος δράκος θα επιβιώσει με πιθανότητα $p_1 = 0.8^3$ και ο δεύτερο δράκος με πιθανότητα $p_2 = 0.8^7$. Επομένως,

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= (1 - p_1)(1 - p_2), \\ P(X = 2) &= p_1 p_2, \\ P(X = 1) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1). \end{aligned}$$

- (β') Έστω ότι x βαλλίστρες θα χτυπήσουν τον πρώτο δράκο και $10 - x$ βαλλίστρες τον δεύτερο. Η πιθανότητα να χτυπηθούν και οι δύο δράκοι είναι

$$f(x) = (1 - p_1)(1 - p_2) = (1 - 0.8^x)(1 - 0.8^{10-x}) = (1 - e^{x \log 0.8})(1 - e^{\log 0.8(10-x)}).$$

Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \Leftrightarrow -e^{x \log 0.8} \log 0.8 (1 - e^{\log 0.8(10-x)}) + (1 - e^{x \log 0.8}) e^{\log 0.8(10-x)} \log 0.8 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{x \log 0.8} - e^{10 \log 0.8} = e^{\log 0.8(10-x)} - e^{10 \log 0.8} \Leftrightarrow e^{x \log 0.8} = e^{\log 0.8(10-x)} \Leftrightarrow x = 10 - x \Leftrightarrow x = 5. \end{aligned}$$

Άρα, το βέλτιστο είναι να μοιράσουμε τις βαλλίστρες. Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι οι βαλλίστρες βάλλουν διαδοχικά. Αν έχουμε στοχεύσει τους δύο δράκους με 6 και 4 βαλλίστρες αντίστροφα, τότε η 6η βαλλίστρα που θα επιτεθεί στον πρώτο δράκο θα είναι λιγότερο χρήσιμη από την περίπτωση που στοχεύσει στον δεύτερο δράκο, γιατί ο δεύτερος δράκος έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να επιζήσει από τα 4 βέλη που έχει δεχτεί, σε σχέση με τον πρώτο δράκο που έχει ήδη δεχτεί 5 βέλη.

25. **(Κολοκύθες)** Κάθε εβδομάδα, ένα μανάβης έχει X πελάτες που ζητούν να αγοράσουν μια κολοκύθα, εφόσον έχουν μείνει απούλητες κολοκύθες, όπου η Τ.Μ. X έχει την ακόλουθη συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$p_X(x) = \frac{9-x}{10}, \quad x = 5, 6, 7, 8.$$

Στην αρχή της εβδομάδας ο μανάβης αγοράζει κολοκύθες προς 2 ευρώ τη μια, ενώ κατά τη διάρκεια της εβδομάδας τις πουλά προς 4 ευρώ τη μία. Στο τέλος της εβδομάδας ο μανάβης πετά όσες κολοκύθες του έχουν απομείνει. Αν ο μανάβης θέλει να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο ΚΑΘΑΡΟ κέρδος του, πόσες κολοκύθες πρέπει να αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας; (Υπόδειξη: υπολογίστε τα αναμενόμενα καθαρά κέρδη του μανάβη αν αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας x κολοκύθες, με $x = 5, 6, 7, 8$, και συγκρίνέτε τα.)

Λύση: Ο μανάβης βγάζει 2 ευρώ καθαρό κέρδος για κάθε κολοκύθα που αγοράζει και κατόπιν πουλάει, και -2 καθαρό κέρδος για κάθε κολοκύθα που αγοράζει και δεν καταφέρνει να μεταπωλήσει. Έστω Z το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του μανάβη. Το αναμενόμενο κέρδος του εξαρτάται από το πόσες κολοκύθες επιλέγει να αγοράσει. Παίρνουμε περιπτώσεις:

(α') Έστω πως ο μανάβης αγοράζει 8 κολοκύθες. Έχουμε:

$$Z = \begin{cases} 8 \times 2 = 16, & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{10}, \\ 7 \times 2 - 2 = 12, & \text{με πιθανότητα } \frac{2}{10}, \\ 6 \times 2 - 2 \times 2 = 8, & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{10}, \\ 5 \times 2 - 3 \times 2 = 4, & \text{με πιθανότητα } \frac{4}{10}. \end{cases}$$

με μέση τιμή

$$E(Z) = 16 \times \frac{1}{10} + 12 \times \frac{2}{10} + 8 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{4}{10} = 8.$$

(β') Έστω πως ο μανάβης αγοράζει 7 κολοκύθες. Έχουμε:

$$Z = \begin{cases} 7 \times 2 = 14, & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{10}, \\ 6 \times 2 - 2 = 10, & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{10}, \\ 5 \times 2 - 2 \times 2 = 6, & \text{με πιθανότητα } \frac{4}{10}. \end{cases}$$

με μέση τιμή

$$E(Z) = 14 \times \frac{3}{10} + 10 \times \frac{3}{10} + 6 \times \frac{4}{10} = \frac{96}{10}.$$

(γ') Έστω πως ο μανάβης αγοράζει 6 κολοκύθες. Έχουμε:

$$Z = \begin{cases} 6 \times 2 = 12, & \text{με πιθανότητα } \frac{6}{10}, \\ 5 \times 2 - 2 = 8, & \text{με πιθανότητα } \frac{4}{10}. \end{cases}$$

με μέση τιμή

$$E(Z) = 12 \times \frac{6}{10} + 8 \times \frac{4}{10} = \frac{104}{10}.$$

(δ') Έστω πως ο μανάβης αγοράζει 5 κολοκύθες. Θα τις πουλήσει σίγουρα όλες, άρα θα έχει κέρδος 10.

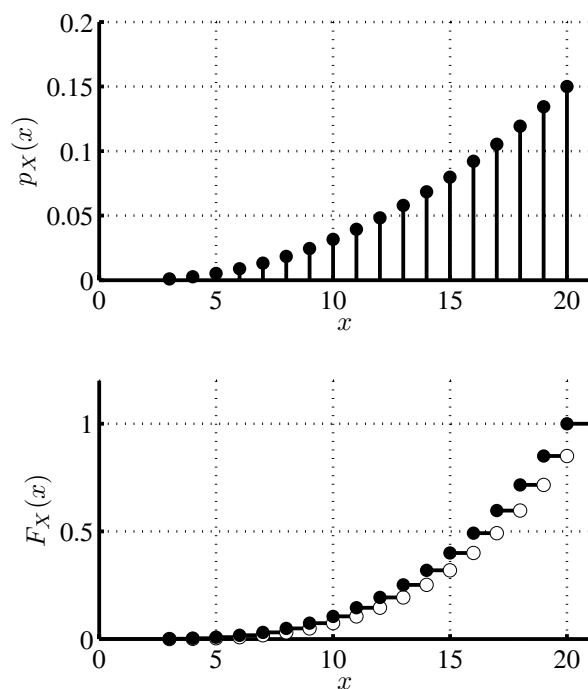
Άρα, τελικά, συμφέρει τον μανάβη να αγοράσει 6 κολοκύθες, διότι τότε μεγιστοποιείται το αναμενόμενο κέρδος του.

26. **(20 μπάλες)** Από ένα δοχείο που περιέχει 20 μπάλες αριθμημένες από το 1 μέχρι το 20 εξάγουμε χωρίς επανάθεση 3 μπάλες, χωρίς να σημειώσουμε τη σειρά της επιλογής.

(α') Να ορισθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος. Πόσα αποτελέσματα περιλαμβάνει;

(β') Να υπολογισθεί η κατανομή $F_X(x)$ της μέγιστης ένδειξης X στις 3 μπάλες του δείγματος, για $x = 1, 2, \dots, 20$.

(γ') Να υπολογισθεί η μάζα πιθανότητας $p_X(x)$.



Σχήμα 3: Άσκηση 26.

(δ') Αν στοιχηματίσουμε ότι βγάζοντας 3 μπάλες θα έχουμε μια τουλάχιστον μπάλα με ένδειξη μεγαλύτερη ή ίση του 17, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσουμε το στοίχημα;

Λύση:

(α') Έστω $B = \{1, 2, \dots, 20\}$. Ο δειγματικός χώρος Ω είναι το σύνολο όλων των $\binom{20}{3}$ δυνατών συνδυασμών των 20 μπαλών χωρίς επανάθεση:

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in B, i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j\}.$$

Περιλαμβάνει $\binom{20}{3}$ αποτελέσματα.

(β') Προφανώς $F_X(x) = 0$, για $x = 1, 2$, και $F_X(20) = 1$. Για $x = 3, 4, \dots, 19$, έχουμε:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{\binom{x}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{x(x-1)(x-2)}{20 \times 19 \times 18}.$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει γιατί υπάρχουν συνολικά $\binom{20}{3}$ συνδυασμοί, εκ των οποίων ακριβώς $\binom{x}{3}$ καταλήγουν σε μέγιστη ένδειξη το πολύ x . Η κατανομή έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 3.

(γ') Προφανώς $p_X(x) = 0$ για $x = 1, 2$. Για να υπολογίσουμε τη μάζα πιθανότητας για τις υπόλοιπες τιμές του x , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο σκέλος, ή εναλλακτικά να παρατηρήσουμε ότι, για $x = 3, \dots, 20$,

$$p_X(x) = P(X = x) = \frac{\binom{x-1}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{(x-1)(x-2)}{2280}.$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει γιατί, για να έχουμε μέγιστο x , πρέπει μια από τις μπάλες να έχει ένδειξη x , και οι άλλες δύο οποιοδήποτε συνδυασμό ενδείξεων μικρότερων του x . Υπάρχουν $\binom{x-1}{2}$ συνδυασμοί για να συμβεί αυτό, από τους συνολικά $\binom{20}{3}$. Η μάζα έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 3.

(δ') Χρησιμοποιώντας το δεύτερο σκέλος προκύπτει ότι η ζητούμενη πιθανότητα p ισούται με:

$$p = P(X \geq 17) = 1 - P(X \leq 16) = 1 - F_X(16) = 1 - \frac{\binom{16}{3}}{\binom{20}{3}} \simeq 0.508.$$

27. **(D&D)** Ένας πολεμιστής είναι οπλισμένος με ένα σιλέτο με το οποίο μπορεί σε κάθε χτύπημα να καταφέρει στον αντίπαλο απώλεια X μονάδων ζωής, όπου η Τ.Μ. X λαμβάνει τις τιμές 1, 2, 3, 4 με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ την κάθε τιμή. (Επομένως, όλα τα χτυπήματα οδηγούν σε απώλεια μονάδων ζωής.) Ένας αντίπαλος έχει 5 μονάδες ζωής. Ο πολεμιστής χτυπά διαδοχικά τον αντίπαλο έως ότου του καταφέρει, αθροιστικά, απώλεια 5 ή περισσότερων μονάδων ζωής, οπότε ο αντίπαλος πεθαίνει. Τα χτυπήματα είναι ανεξάρτητα. Έστω Y η Τ.Μ. που περιγράφει το πλήθος των χτυπημάτων που απαιτούνται για να πεθάνει ο αντίπαλος. (Παρατηρήστε πως το Y μπορεί να λάβει τις τιμές 2 έως 5.) Να προσδιορίσετε τη μάζα $p_Y(y)$, την συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$, τη μέση τιμή $E(Y)$, και τη διασπορά $\text{VAR}(Y)$ της Y .

Λύση: Φανταστείτε ότι τα χτυπήματα αποφασίζονται ρίχνοντας ένα δίκαιο ζάρι με 4 πλευρές. Θα χρειαστούν ακριβώς 2 χτυπήματα αν ρίξουμε το ζάρι 2 φορές και προκύψει κάποιο από τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (2, 3), (2, 4), (1, 4).$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι 10, και καθένα έχει πιθανότητα να προκύψει $\frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$, επομένως $P(Y = 2) = \frac{10}{16}$.

Παρομοίως, θα χρειαστούν ακριβώς 3 χτυπήματα αν ρίξουμε το ζάρι 3 φορές και προκύψει κάποιο από τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$(3, 1, 1), (3, 1, 2), (3, 1, 3), (3, 1, 4), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 2, 4), (2, 1, 2), (2, 1, 3), \\ (2, 1, 4), (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 3, 3), (1, 3, 4).$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι 20, και καθένα έχει πιθανότητα να προκύψει $\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$, επομένως $P(Y = 3) = \frac{20}{64}$.

Ακολούθως παρατηρούμε πως θα χρειαστούν ακριβώς 4 χτυπήματα αν ρίξουμε το ζάρι 4 φορές και προκύψει κάποιο από τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$(1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 3), (1, 1, 1, 4), (1, 1, 2, 1), (1, 1, 2, 2), (1, 1, 2, 3), (1, 1, 2, 4), (1, 2, 1, 1), \\ (1, 2, 1, 2), (1, 2, 1, 3), (1, 2, 1, 4), (2, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 2), (2, 1, 1, 3), (2, 1, 1, 4).$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι 15, και καθένα έχει πιθανότητα να προκύψει $\frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$, επομένως $P(Y = 4) = \frac{15}{256}$.

Τέλος, παρατηρούμε πως θα χρειαστούν ακριβώς 5 χτυπήματα αν ρίξουμε το ζάρι 5 φορές και έρθει ένα από τα αποτελέσματα

$$(1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 3), (1, 1, 1, 1, 4),$$

κάτι που έχει πιθανότητα $\frac{4}{4^5} = \frac{1}{256}$. Επομένως $P(Y = 5) = \frac{1}{256}$.

Παρατηρήστε πως

$$P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) + P(Y = 5) = \frac{10}{16} + \frac{20}{64} + \frac{15}{256} + \frac{1}{256} = \frac{640 + 320 + 60 + 4}{1024} = 1,$$

όπως αναμενόταν. Παρατηρήστε επίσης ότι όλα τα άνω αποτελέσματα θα μπορούσαν να γραφούν ως φύλλα ενός τετραδικού δέντρου.

Σχετικά με την κατανομή της Y , έχουμε

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 2, \\ 10/16, & 2 \leq y < 3, \\ 15/16, & 3 \leq y < 4, \\ 255/256, & 4 \leq y < 5, \\ 1, & 5 \leq y. \end{cases}$$

Τέλος, για τη μέση τιμή και τη διασπορά έχουμε

$$\begin{aligned} E(Y) &= 2 \times \frac{10}{16} + 3 \times \frac{20}{64} + 4 \times \frac{15}{256} + 5 \times \frac{1}{256} = \frac{625}{256} \simeq 2.4414, \\ E(Y^2) &= 2^2 \times \frac{10}{16} + 3^2 \times \frac{20}{64} + 4^2 \times \frac{15}{256} + 5^2 \times \frac{1}{256} = \frac{1625}{256} \simeq 6.3477, \\ \text{VAR}(Y) &= \frac{1625}{256} - \left(\frac{625}{256}\right)^2 = \frac{393}{1015} \simeq 0.3872. \end{aligned}$$

28. **(Αθροισμα ζαριών)** Ρίχνονται δύο δίκαια ζάρια. Έστω X_i η Τ.Μ. που δίνει το αποτέλεσμα του i ζαριού, για $i = 1, 2$.

- (α') Ορίστε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο και ένα μέτρο πιθανότητας που να περιγράφουν το παραπάνω πείραμα.
 (β') Βρείτε την μάζα και συνάρτηση κατανομής της X_1 .
 (γ') Βρείτε την μάζα της τυχαίας μεταβλητής $Z = 7 - X_1$. Τι παρατηρείτε;
 (δ') Βρείτε την μάζα της τυχαίας μεταβλητής $Y = X_1 + X_2$.
 (ε') Ποια είναι η πιο πιθανή τιμή για το άθροισμα των δύο ζαριών; Δηλαδή, για ποια τιμή y στο $\{2, 3, \dots, 12\}$ μεγιστοποιείται η πιθανότητα $P(Y = y)$;
 (ς') Ποια είναι η μέση τιμή του αθροίσματος των δύο ζαριών;

Λύση:

- (α') $\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$, δηλαδή όλα τα δυνατά αποτελέσματα των δύο ζαριών. Επίσης, $P(\{\omega\}) = 1/36$ για κάθε αποτέλεσμα ω , δηλαδή όλα τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα (άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $P(A) = |A|/|\Omega|$).
 (β') Το σύνολο τιμών της X_1 είναι το $S_{X_1} = \{1, \dots, 6\}$ και η μάζα της στο σημείο $x \in S_{X_1}$ ισούται με

$$p_{X_1}(x) = P(X_1 = x) = \frac{|\{\omega : X_1 = x\}|}{|\Omega|} = \frac{|\{(x, 1), (x, 2), \dots, (x, 6)\}|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι η

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1/6, & 1 \leq x < 2, \\ 2/6, & 2 \leq x < 3, \\ 3/6, & 3 \leq x < 4, \\ 4/6, & 4 \leq x < 5, \\ 5/6, & 5 \leq x < 6, \\ 6/6, & x \geq 6. \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι για την X_2 ισχύουν ακριβώς τα ίδια, δηλαδή $S_{X_2} = S_{X_1}$, $p_{X_2}(x) = p_{X_1}(x)$, $F_{X_2}(x) = F_{X_1}(x)$ για κάθε $x \in S_{X_2}$.

- (γ') Το σύνολο τιμών της Z είναι $S_Z = \{1, 2, \dots, 6\} = S_{X_1}$. Η μάζα είναι

$$p_Z(z) = P(Z = z) = P(7 - X_1 = z) = P(X_1 = 7 - z) = \frac{1}{6} = p_{X_1}(z) \text{ για κάθε } z \in S_Z.$$

Παρατηρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές Z και X_1 έχουν την ίδια μάζα, άρα από στατιστικής άποψης είναι αδιαχώριστες αφού λαμβάνουν τιμές με την ίδια πιθανότητα, παρότι οι τιμές τους πάντα διαφέρουν σε κάθε μεμονωμένη ρίψη.

- (δ') Το σύνολο τιμών της Y είναι το $S_Y = \{2, 3, \dots, 12\}$. Για να υπολογίσουμε την μάζα στο σημείο $y \in S_Y$, θεωρούμε πρώτα την περίπτωση $y \leq 7$:

$$p_Y(y) = \frac{|\{\omega : X_1 + X_2 = y\}|}{|\Omega|} = \frac{|\{(1, y-1), (2, y-2), \dots, (y-1, 1)\}|}{|\Omega|} = \frac{y-1}{36}.$$

Για την περίπτωση $y \geq 8$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια μεθοδολογία. Εναλλακτικά, παρατηρούμε πρώτα ότι εάν ορίσουμε τις τυχαίες μεταβλητές $Z_1 = 7 - X_1$, $Z_2 = 7 - X_2$, τότε όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, για $i, j = 1, 2, \dots, 6$,

$$P(Z_1 = i, Z_2 = j) = P(X_1 = 7 - i, X_2 = 7 - j) = \frac{1}{36} = P(X_1 = i, X_2 = j).$$

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα των ζαριών X_1, X_2 είναι στατιστικά αδιαχώριστα από τα συμμετρικά τους αποτελέσματά Z_1, Z_2 . Συνεπώς, $P(X_1 + X_2 = y) = P(Z_1 + Z_2 = y)$ για κάθε $y = 2, \dots, 12$. Τότε όμως

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= P(X_1 + X_2 = y) = P(Z_1 + Z_2 = y) = P((7 - X_1) + (7 - X_2) = y) \\ &= P(X_1 + X_2 = 14 - y) = p_Y(14 - y) = \frac{(14 - y) - 1}{36} = \frac{13 - y}{36}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την τιμή της μάζας στο σημείο $14 - y$, το οποίο είναι πάντα είναι μικρότερο από 7 (αφού υποθέσαμε $y \geq 8$).

Συνεπώς η μάζα σε κάθε σημείο του $\{2, \dots, 12\}$ είναι

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{36}, & y = 2, \dots, 7, \\ \frac{13-y}{36}, & y = 8, \dots, 12. \end{cases}$$

(ε') Εφόσον η μάζα $p_Y(y)$ είναι αύξουσα στα σημεία $y \in \{2, \dots, 7\}$, φθίνουσα στα $y \in \{8, \dots, 12\}$ και ισχύει $p_Y(7) = 1/6 > 5/36 = p_Y(8)$, συμπεραίνουμε ότι η πιο πιθανή τιμή του αθροίσματος Y είναι το 7.

(ζ')

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y=2}^{12} yp_Y(y) = \sum_{y=2}^6 yp_Y(y) + 7p_Y(7) + \sum_{y=8}^{12} yp_Y(y) \\ &= \sum_{y=2}^6 y \frac{y-1}{36} + 7 \times \frac{1}{6} + \sum_{y=8}^{12} y \frac{13-y}{36} = \frac{7}{6} + \sum_{i=1}^5 \frac{(i+1)i}{36} + \sum_{i=1}^5 \frac{(13-i)i}{36} \\ &= \frac{7}{6} + \sum_{i=1}^5 \frac{[(i+1) + (13-i)]i}{36} = \frac{7}{6} + \sum_{i=1}^5 \frac{14i}{36} = \frac{7}{6} + \frac{14}{36} \times \frac{5 \times 6}{2} = 7, \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση του τύπου $\sum_{i=1}^n i = n(n+1)/2$. Εναλλακτικά, βέβαια, θα μπορούσαμε, μετά την πρώτη ισότητα, να αντικαταστήσουμε τις τιμές της μάζας και να προσθέσουμε τους δώδεκα όρους που προκύπτουν.

5η Ομάδα Ασκήσεων

29. **(Υπέρβαση χωρητικότητας)** Σε μια εξέταση πιθανοτήτων έχουν λάβει οδηγία να καθίσουν σε μια αίθουσα 22 άτομα. Καθένα από αυτά τα άτομα θα έρθει με πιθανότητα $\frac{3}{4}$. Η αίθουσα χωρά να καθίσουν μόλις 20. Ποια είναι η πιθανότητα p τελικά να υπάρξει τουλάχιστον ένα άτομο που δεν θα βρει θέση να καθίσει σε εκείνη την αίθουσα;

Λύση: Το πλήθος των ατόμων που θα έρθουν ακολουθεί την διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους $N = 22$ και $p = \frac{3}{4}$. Άρα τελικά η πιθανότητα να έρθουν παραπάνω φοιτητές από τις διαθέσιμες θέσεις είναι

$$p = \binom{22}{21} \left(\frac{3}{4}\right)^{21} \left(\frac{1}{4}\right) + \binom{22}{22} \left(\frac{3}{4}\right)^{22} = 22 \left(\frac{3}{4}\right)^{21} \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^{22} = \frac{25}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{21}.$$

30. **(Μεταγραφή)** Μια ποδοσφαιρική ομάδα κάνει μεταγραφή ένα νέο επιθετικό παίκτη. Ο παίκτης αυτός ανήκει σε μια από τρεις κατηγορίες ποιότητας:

- (α') Ο επιθετικός είναι «χέλι» με πιθανότητα $\frac{1}{6}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{2}{3}$.
- (β') Ο επιθετικός είναι «μέτριος» με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{1}{3}$.
- (γ') Ο επιθετικός είναι «παλτό» με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{1}{6}$.

Τη στιγμή της μεταγραφής η ομάδα δεν γνωρίζει σε ποια κατηγορία ποιότητας ανήκει ο επιθετικός. Επίσης, με δεδομένη την κατηγορία στην οποία ανήκει ο επιθετικός, ο επιθετικός σκοράρει σε κάθε παιχνίδι ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα παιχνίδια. Παρατηρήστε ότι στα άνω δεν έχει ληφθεί υπόψη πόσα γκολ βάζει ο επιθετικός σε ένα παιχνίδι, αλλά μόνο αν σκοράρει (έστω και ένα γκολ) ή όχι. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- (α') Έστω πως παίζεται το πρώτο παιχνίδι, και ο επιθετικός σκοράρει. Ποια είναι η νέα πιθανότητα ο επιθετικός να είναι «χέλι»;
- (β') Έστω πως ο επιθετικός είναι «χέλι», και έχουν παιχτεί 10 παιχνίδια. Ποια είναι η μάζα, η μέση τιμή, και η διασπορά του πλήθους X των παιχνιδιών στα οποία ο επιθετικός σκόραρε;
- (γ') Έστω πως έχουν παιχτεί 5 παιχνίδια, και ο επιθετικός έχει σκοράρει στα 2. Ποια είναι η νέα πιθανότητα ο επιθετικός να είναι «χέλι»;

Λύση: Έστω τα ενδεχόμενα A ο επιθετικός να είναι «χέλι», B ο επιθετικός να είναι «μέτριος», και C ο επιθετικός να είναι «παλτό». Μας έχει δοθεί ότι

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(C) = \frac{1}{2}.$$

Έστω, επίσης το ενδεχόμενο G ο επιθετικός να σκοράρει σε ένα παιχνίδι. Μας έχει δοθεί ότι

$$P(G|A) = \frac{2}{3}, \quad P(G|B) = \frac{1}{3}, \quad P(G|C) = \frac{1}{6}.$$

- (α') Χρησιμοποιούμε τον Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned} P(A|G) &= \frac{P(AG)}{P(G)} = \frac{P(G|A)P(A)}{P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) + P(G|C)P(C)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}} = \frac{4}{4 + 4 + 3} = \frac{4}{11} \simeq 0.3636. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι η πιθανότητα ο επιθετικός να ήταν «χέλι» αυξήθηκε, όπως αναμενόταν.

- (β') Αφού ο επιθετικός σκοράρει σε κάθε παιχνίδι ανεξάρτητα από τα άλλα και με την ίδια πιθανότητα $\frac{2}{3}$ σε καθένα από αυτά, το πλήθος των παιχνιδιών X στα οποία ο επιθετικός σκοράρει ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (πλήθος πειραμάτων) $N = 10$ και (πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε πείραμα) $p = \frac{2}{3}$, επομένως

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k},$$

και

$$E(X) = Np = \frac{20}{3} \simeq 6.6667, \quad \text{VAR}(X) = Np(1-p) = 10 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{20}{9} \simeq 2.2222.$$

(γ') Έστω τώρα G_2 το ενδεχόμενο ο επιθετικός να σκοράρει σε ακριβώς 2 από τα 5 παιχνίδια. Όπως και στο προηγούμενο σκέλος, το πλήθος των παιχνιδιών στα οποία θα σκοράρει δίνεται από την διωνυμική κατανομή, επομένως

$$\begin{aligned}P(G_2|A) &= \binom{5}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3, \\P(G_2|B) &= \binom{5}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3, \\P(G_2|C) &= \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3.\end{aligned}$$

Και πάλι, χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του Bayes, έχουμε

$$\begin{aligned}P(A|G_2) &= \frac{P(AG_2)}{P(G_2)} = \frac{P(G_2|A)P(A)}{P(G_2|A)P(A) + P(G_2|B)P(B) + P(G_2|C)P(C)} \\&= \frac{\binom{5}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{6}}{\binom{5}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{6} + \binom{5}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} + \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{2}} \\&= \frac{4}{4 + 16 + 3 \times 5^3/2^5} = \frac{128}{128 + 512 + 375} \simeq 0.1261.\end{aligned}$$

31. **(Gormiti)** Έχουμε ένα σετ από 100 διαφορετικές κάρτες Gormiti, εκ των οποίων ένας είναι ο Magmion και ένας άλλος ο Electricon. Έστω το ακόλουθο πείραμα: επιλέγω στην τύχη 2 κάρτες, χωρίς επανάθεση, και χωρίς κάποια προτίμηση στον συνδυασμό των καρτών που θα επιλέξω.

Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- (α') Ποια είναι η πιθανότητα στην επιλογή μου να υπάρχει ο Magmion;
- (β') Ποια είναι η πιθανότητα η επιλογή μου να αποτελείται από τον Magmion **και** τον Electricon;
- (γ') Ποια είναι η πιθανότητα η επιλογή μου να περιλαμβάνει τον Magmion **ή** τον Electricon (και ενδεχομένως και τους δύο);
- (δ') Δώστε ένα τύπο (χωρίς να κάνετε τις πράξεις) που να δίνει **επακριβώς** την πιθανότητα να βρω τον Magmion ακριβώς 7 φορές αν επαναλάβω το πείραμα 200 φορές, και τα επαναλαμβανόμενα πειράματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Λύση:

- (α') Υπάρχουν $\binom{100}{2}$ ισοπίθανοι συνδυασμοί ζευγών. Το ενδεχόμενο A που ερευνούμε αντιστοιχεί σε 99 συνδυασμούς. Πράγματι, αν η μία κάρτα είναι ο Magmion, για την άλλη κάρτα έχουμε 99 επιλογές. Άρα η πιθανότητα του A είναι

$$P(A) = \frac{99}{\binom{100}{2}} = \frac{1}{50}.$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με την πιθανότητα η πρώτη κάρτα να είναι ο Magmion, που είναι $\frac{1}{100}$, συν την πιθανότητα η δεύτερη κάρτα να είναι ο Magmion, που είναι επίσης $\frac{1}{100}$. (Επειδή δεν έχω επανάθεση, η πιθανότητα να είναι και οι δύο ο Magmion είναι 0.)

- (β') Υπάρχουν $\binom{100}{2}$ ισοπίθανοι συνδυασμοί ζευγών. Το ενδεχόμενο B που ερευνούμε αντιστοιχεί σε ένα μόνο συνδυασμό, άρα η πιθανότητά του είναι

$$P(B) = \frac{1}{\binom{100}{2}} = \frac{2}{99 \times 100} = \frac{1}{4950}.$$

Εναλλακτικά, παρατηρήστε πως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με την πιθανότητα η πρώτη κάρτα να είναι ένας από τους δύο Gormiti που ψάχνουμε, που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{2}{100}$, επί την δεσμευμένη πιθανότητα $\frac{1}{99}$ ο δεύτερος να είναι αυτός που ψάχνουμε, με δεδομένο ότι ήδη βρήκαμε έναν.

- (γ') Έστω C το συγκεκριμένο ενδεχόμενο. Είναι πιο εύκολο να υπολογίσουμε την πιθανότητα του συμπληρώματός του, C' , δηλαδή του ενδεχόμενου να μην βρούμε κανέναν από τους δύο Gormiti. Και πάλι, υπάρχουν $\binom{100}{2}$ ισοπίθανοι συνδυασμοί ζευγών, και στο C' αντιστοιχούν $\binom{98}{2}$. Άρα τελικά

$$P(C') = \frac{\binom{98}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{98!98!2!}{96!2!100!} = \frac{98 \times 97}{100 \times 99} = \frac{4753}{4950} \Rightarrow P(C) = 1 - \frac{4753}{4950} = \frac{197}{4950}.$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του C' ως εξής: Δεν θα βρω κανέναν από τους δύο αν ο πρώτος που θα επιλέξω δεν είναι κάποιος από αυτούς, που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{98}{100}$, και, με δεδομένο ότι ο πρώτος δεν είναι κάποιος από αυτούς, να μην είναι και ο δεύτερος. Αυτό έχει πιθανότητα $\frac{97}{99}$.

- (δ') Εκτελώ 200 πειράματα, καθένα με πιθανότητα επιτυχίας $\frac{1}{50}$, όπως βρήκαμε στο πρώτο σκέλος, άρα η κατανομή του πλήθους M των καρτών του Magmion που βρίσκω είναι η διωνυμική, με παραμέτρους $N = 200$, $p = \frac{1}{50}$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$P(M = 7) = \binom{200}{7} \left(\frac{1}{50}\right)^7 \left(\frac{49}{50}\right)^{193} \simeq 0.0592.$$

Η προσέγγιση Poisson δίνει πιθανότητα $\simeq 0.0595$.

32. **(Δύο φίλοι)** Σε ένα άλλο τραπέζι της καφετέριας, συνομιλούν δύο φίλοι, ο A και ο B , εκ των οποίων ο A είναι υγιής, ενώ ο B έχει κορωνοϊό. Όποτε ο B φτερνίζεται, κολλά τον A με κορωνοϊό με πιθανότητα $p_1 = 0.05$. Τα διαδοχικά φτερνίσματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

- (α') Ποια κατανομή ακολουθεί το πλήθος των φορών που πρέπει να φτερνιστεί ο B για να κολλήσει τον A , και με ποια παράμετρο ή παραμέτρους;
(β') Πόσες φορές πρέπει να φτερνιστεί ο B ώστε ο A να έχει κολλήσει, σε κάποιο από τα φτερνίσματα, τον κορωνοϊό, με πιθανότητα τουλάχιστον 0.8;

Λύση:

- (α') Τα φτερνίσματα είναι ανεξάρτητα και όμοια, επομένως αν θεωρήσουμε επιτυχία να κολλήσει ο A και X είναι το πλήθος μέχρι το πρώτο επιτυχημένο φτέρνισμα, η X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή, με παράμετρο $p = 0.05$.
(β') Κατά τα γνωστά από τη θεωρία για την γεωμετρική κατανομή, $P(X > k) = (1 - p)^k$. Επομένως,

$$\begin{aligned} P(X \leq k) \geq 0.8 &\Leftrightarrow 1 - P(X > k) \geq 0.8 \Leftrightarrow P(X < k) \leq 0.2 \\ &\Leftrightarrow (1 - p)^k \leq 0.2 \Leftrightarrow k \log(1 - p) \leq \log 0.2 \Leftrightarrow k \geq \frac{\log 0.2}{\log(1 - p)}. \end{aligned}$$

33. **(Πίτσες και μακαρονάδες)** Ένας οικοδεσπότης ετοιμάζεται να υποδεχτεί 20 καλεσμένους για φαγητό. Κάθε καλεσμένος με την άφιξή του θα θελήσει να φάει πίτσα με πιθανότητα $p = 0.6$ και μακαρονάδα με πιθανότητα $1 - p = 0.4$, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Ο οικοδεσπότης, προκειμένου να μην χρονοτριβήσουν, παραγγέλνει από πριν 16 πίτσες και 12 μακαρονάδες. Ποια είναι η πιθανότητα να μην μπορούν να φάνε όλοι το φαγητό της επιλογής τους;

Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο να μην φάει ένας καλεσμένος το φαγητό της επιλογής του. Το A μπορεί να γραφεί ως η ένωση δύο ξένων ενδεχόμενων A_1 και A_2 , όπου A_1 είναι το ενδεχόμενο να ζητήσουν πάνω από 16 άτομα πίτσα, και A_2 το ενδεχόμενο να ζητήσουν περισσότερα από 12 άτομα μακαρονάδα, ή αλλιώς λιγότερα από 8 άτομα πίτσα. Έστω X το πλήθος των ατόμων που επιλέγουν πίτσα. Παρατηρούμε πως το X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 20$ (το πλήθος των πειραμάτων) και $p = 0.6$ (η πιθανότητα επιτυχίας). Παρατηρούμε, τέλος, πως

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \sum_{x=17}^{20} P(X = x) + \sum_{x=0}^7 P(X = x) \\ &= \sum_{x=0,1,2,3,4,5,6,7,17,18,19,20} \binom{20}{x} 0.6^x 0.4^{20-x} \simeq 0.037. \end{aligned}$$

34. **(Ασφαλιστής)** Ένας ασφαλιστής ασφαλίζει 100 οδηγούς για μια χρονιά. Καθένας από τους οδηγούς προκαλεί ατύχημα την δεδομένη χρονιά με πιθανότητα $p = 1/1000$. Έστω X ο αριθμός των οδηγών που προκαλούν ατύχημα εκείνη την χρονιά. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(X \leq 1)$, $P(X = 3)$, $P(X = 10)$, και έπειτα οι προσεγγίσεις τους χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της κατανομής της X από κατάλληλη κατανομή Poisson.

Λύση: Η Τ.Μ. X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 100$ και $p = \frac{1}{1000}$, και επομένως προσεγγίζεται από μια Τ.Μ. Y Poisson με παράμετρο $\lambda = Np = \frac{1}{10}$.

Χωρίς προσεγγίσεις, έχουμε:

$$\begin{aligned}P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) = (1 - p)^{100} + 100p(1 - p)^{99} \simeq 0.995362, \\P(X = 3) &= \binom{100}{3} p^3 (1 - p)^{97} \simeq 1467 \times 10^{-7}, \\P(X = 10) &= \binom{100}{10} p^{10} (1 - p)^{90} \simeq 1581 \times 10^{-20}.\end{aligned}$$

Οι αντίστοιχες προσεγγίσεις είναι

$$\begin{aligned}P(X \leq 1) &\simeq P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = e^{-0.1} + e^{-0.1} 0.1 \simeq 0.995321, \\P(X = 3) &\simeq P(Y = 3) = e^{-0.1} (0.1)^3 / 3! \simeq 1508 \times 10^{-7}, \\P(X = 10) &\simeq P(Y = 10) = e^{-0.1} (0.1)^{10} / 10! \simeq 2493 \times 10^{-20}.\end{aligned}$$

35. **(Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης)** Παίζουμε το εξής παιχνίδι. Ένα αμερόληπτο κέρμα ρίχνεται διαδοχικά, και αν η ένδειξη κορώνα εμφανίζεται για πρώτη φορά στην k ρίψη τότε κερδίζουμε 2^k Ευρώ. Ποιο είναι το μέσο κέρδος του παιχιδιού; Θα δίνετε 50 Ευρώ για να παίξετε το παιχνίδι;

Λύση: Έστω Z η πρώτη δοκιμή κατά την οποία εμφανίζεται η κορώνα, και έστω $X = 2^Z$ το κέρδος μας. Προφανώς η Z ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 1/2$ και μάζα $P(Z = k) = 2^{-k}$. Επομένως

$$E(X) = (2) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k P(Z = k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Το παράδοξο είναι ότι ενώ η μέση τιμή είναι άπειρη και επομένως οποιαδήποτε πεπερασμένη τιμή για να παίξουμε το παιχνίδι είναι μεγάλη έκπτωση, κανείς δεν προτίθεται να δώσει μεγάλο ποσό για να παίξει. 50 Ευρώ θεωρείται ακριβή τιμή για το παιχνίδι. Το παράδοξο διατυπώθηκε το 1713 από τον Nicolas Bernoulli.

36. **(Μπρελόκ)** Έστω ένα μπρελόκ με 6 κλειδιά, εκ των οποίων ένα μόνο ανοίγει μια πόρτα. Δοκιμάζουμε τα κλειδιά στην πόρτα, χωρίς κάποια προτίμηση στη σειρά, μέχρι να βρούμε αυτό που την ανοίγει. Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις:

- (α') Όταν ελέγχουμε ότι ένα κλειδί δεν ανοίγει την πόρτα, το βάζουμε στην άκρη, και δεν το ξαναδοκιμάζουμε.
(β') Έστω εναλλακτικά πως (λόγω του ότι πάσχουμε από αμνησία) όταν ελέγχουμε ότι ένα κλειδί δεν ανοίγει την πόρτα, δεν το βάζουμε στην άκρη, αλλά το επιστρέφουμε στο μπρελόκ και ξαναρχίζουμε την αναζήτηση εντελώς από την αρχή.

Υπολογίστε, και για τις δύο περιπτώσεις, (α) κατά μέσο όρο πόσες προσπάθειες θα κάνουμε για να βρούμε το σωστό κλειδί, και (β) την πιθανότητα να χρειαστούμε ακριβώς 4 προσπάθειες μέχρι να βρούμε το σωστό κλειδί.

Λύση: Έστω X το πλήθος των φορών που θα δοκιμάσουμε αν ανοίγει την πόρτα ένα κλειδί.

- (α') Σε αυτή την περίπτωση, η Τ.Μ. X είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, και επομένως

$$P(X = i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, \dots, 6,$$

επομένως

$$P(X = 4) = \frac{1}{6}, \quad E(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6}.$$

- (β') Στη δεύτερη περίπτωση, η Τ.Μ. X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή, με πιθανότητα επιτυχίας $p = \frac{1}{6}$, επομένως

$$P(X = 4) = (1 - p)^3 p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6} = \frac{5^3}{6^4}, \quad E(X) = 1/p = 6.$$

6η Ομάδα Ασκήσεων

37. **(Σοκολατάκια)** Μια φοντανιέρα περιέχει 5 σοκολατάκια με γέμιση λικέρ (και 80 θερμίδες έκαστο), 10 σοκολατάκια με γέμιση πραλίνα (και 100 θερμίδες έκαστο) και 15 σοκολατάκια με γέμιση γουασάμπι (και 120 θερμίδες έκαστο). Τα σοκολατάκια είναι πανομοιότυπα εξωτερικά. Ο Σταύρος επιλέγει να φάει 3 από τα 30 σοκολατάκια, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό από σοκολατάκια που θα επιλέξει. Έστω X το πλήθος από σοκολατάκια λικέρ και Y το πλήθος από σοκολατάκια πραλίνας που θα φάει ο Σταύρος.

(α') Να υπολογίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X, Y .

(β') Ποια είναι η μέση τιμή των θερμίδων που θα καταναλώσει ο Σταύρος τρώγοντας τα 3 σοκολατάκια;

(γ') Ποια είναι η πιθανότητα ο Σταύρος να μην φάει κανένα σοκολατάκι με γέμιση γουασάμπι;

Λύση:

(α') Υπάρχουν συνολικά $5 + 10 + 15 = 30$ σοκολατάκια και επομένως $\binom{30}{3}$ συνδυασμοί από τριάδες με σοκολατάκια που μπορεί να επιλέξει ο Σταύρος. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(X = x, Y = y)$ ο Σταύρος να επιλέξει x σοκολατάκια λικέρ και y σοκολατάκια πραλίνα, όπου $0 \leq x, y \leq 3$. Καταρχάς, παρατηρούμε πως αν $x + y > 3$ τότε η πιθανότητα είναι μηδέν, αφού ο Σταύρος θα φάει μόνο 3 σοκολατάκια. Στην περίπτωση που $x + y \leq 3$, παρατηρούμε πως έχουμε $\binom{5}{x}$ τρόπους να επιλέξουμε x σοκολατάκια λικέρ, ακολούθως $\binom{10}{y}$ τρόπους να επιλέξουμε y σοκολατάκια πραλίνας και, τέλος, $\binom{15}{3-x-y}$ τρόπους να επιλέξουμε τα υπόλοιπα $3 - x - y$ σοκολατάκια γουασάμπι. Επομένως:

$$P(X = x, Y = y) = \frac{\binom{5}{x} \binom{10}{y} \binom{15}{3-x-y}}{\binom{30}{3}}.$$

Σε μορφή πίνακα:

y x	0	1	2	3
0	13/116	15/58	135/812	6/203
1	15/116	75/406	45/812	0
2	15/406	5/203	0	0
3	1/406	0	0	0

(β') Υπάρχουν δύο τρόποι για να υπολογίσουμε τη ζητούμενη μέση τιμή. Ο τρόπος με τις λιγότερες πράξεις είναι ο εξής: έστω C_i , όπου $i = 1, 2, 3$ οι θερμίδες που θα έχει το κάθε σοκολατάκι από τα 3 που θα φάει ο Σταύρος. Παρατηρούμε πως

$$E(C_i) = \frac{5}{30} \times 80 + \frac{10}{30} \times 100 + \frac{15}{30} \times 120 = \frac{320}{3} \simeq 106.67,$$

Η μέση τιμή από θερμίδες που θα καταναλώσει ο Σταύρος θα είναι

$$E\left(\sum_{i=1}^3 C_i\right) = 3E(C_i) = 320.$$

Παρατηρήστε ότι τα C_i , $i = 1, 2, 3$, δεν είναι ανεξάρτητα, παρόλα αυτά οι άνω υπολογισμοί είναι σωστοί.

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο σκέλος:

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot \left(\frac{13}{116} + \frac{15}{58} + \frac{135}{812} + \frac{6}{203}\right) + 1 \cdot \left(\frac{15}{116} + \frac{75}{406} + \frac{45}{812}\right) + 2 \cdot \left(\frac{15}{406} + \frac{5}{203}\right) + 3 \cdot \frac{1}{406} \\ &= \frac{1}{2}, \\ E(Y) &= 0 \cdot \left(\frac{13}{116} + \frac{15}{116} + \frac{15}{406} + \frac{1}{406}\right) + 1 \cdot \left(\frac{15}{58} + \frac{75}{406} + \frac{5}{203}\right) + 2 \cdot \left(\frac{135}{812} + \frac{45}{812}\right) + 3 \cdot \frac{6}{203} \\ &= 1, \\ E(C) &= E(80X + 100Y) = 80E(X) + 100E(Y) = 140. \end{aligned}$$

Τέλος, παρατηρήστε ότι οι μέσες τιμές $E(X)$ και $E(Y)$ θα μπορούσαν να υπολογιστούν με λιγότερες πράξεις παρατηρώντας, εναλλακτικά, πως $X = X_1 + X_2 + X_3$ και $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ όπου οι X_i και Y_i , $i = 1, 2, 3$, κατάλληλα ορισμένες Τ.Μ. Bernoulli.

(γ') Έστω D το ενδεχόμενο ο Σταύρος να μην φάει ούτε ένα σοκολατάκι με γέμιση γουασάμπι. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να λυθεί η άσκηση. Ο πρώτος είναι να κάνουμε χρήση του πρώτου σκέλους:

$$P(D) = P(X + Y = 3) = \frac{1}{406} + \frac{5}{203} + \frac{45}{812} + \frac{6}{203} = \frac{13}{116}.$$

Εναλλακτικά, έστω $A_i, i = 1, 3$ το ενδεχόμενο το σοκολατάκι i να μην είναι με γέμιση γουασάμπι. Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 A_1) = \frac{15}{30} \times \frac{14}{29} \times \frac{13}{28} = \frac{13}{116}.$$

Τέλος, μια τρίτη λύση είναι να παρατηρήσουμε πως υπάρχουν $\binom{15}{3}$ συνδυασμοί από σοκολατάκια χωρίς γουασάμπι, επομένως

$$P(D) = \frac{\binom{15}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{15 \times 14 \times 13}{30 \times 29 \times 28} = \frac{13}{116}.$$

38. **(Φιγούρες)** Μια κανονική τράπουλα έχει 52 φύλλα, εκ των οποίων τα 12 είναι φιγούρες. Επιλέγουμε 5 φύλλα από τα 52 φύλλα της τράπουλας, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό.

(α') Ποια είναι η πιθανότητα να είναι και τα 5 επιλεγμένα φύλλα φιγούρες;

(β') Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε τουλάχιστον 3 φιγούρες;

Λύση:

(α') Υπάρχουν συνολικά $\binom{52}{5}$ συνδυασμοί, εκ των οποίων $\binom{12}{5}$ περιλαμβάνουν μόνο φιγούρες, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$p = \frac{\binom{12}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48} \simeq 3.05 \times 10^{-4}.$$

Εναλλακτικά, έστω πως επιλέγουμε τα φύλλα διαδοχικά και έστω $A_i, i = 1, \dots, 5$ το ενδεχόμενο η επιλογή μας i να είναι φιγούρα. Θα έχουμε

$$\begin{aligned} p &= P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2)P(A_4|A_1 A_2 A_3)P(A_5|A_1 A_2 A_3 A_4) \\ &= \frac{12}{52} \times \frac{11}{51} \times \frac{10}{50} \times \frac{9}{49} \times \frac{8}{48} \simeq 3.05 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

(β') Έστω Y το πλήθος από φιγούρες που θα βρεθούν στα 5 φύλλα. Παρατηρούμε πως το πλήθος των συνδυασμών 5 φύλλων με k φιγούρες είναι $\binom{12}{k} \binom{40}{5-k}$, καθώς έχουμε $\binom{12}{k}$ τρόπους να επιλέξουμε k φιγούρες και $\binom{40}{5-k}$ τρόπους να επιλέξουμε τα υπόλοιπα φύλλα, ώστε να φτιάξουμε ένα συνδυασμό 5 φύλλων. Επομένως,

$$p_Y(k) = \frac{\binom{12}{k} \binom{40}{5-k}}{\binom{52}{5}},$$

και η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$p_Y(3) + p_Y(4) + p_Y(5) = \frac{\binom{12}{3} \binom{40}{2}}{\binom{52}{5}} + \frac{\binom{12}{4} \binom{40}{1}}{\binom{52}{5}} + \frac{\binom{12}{5} \binom{40}{0}}{\binom{52}{5}} \simeq 0.0739.$$

39. **(Ρηγάδες και Κούπες)** Λαμβάνουμε από μια κανονική τράπουλα τα ακόλουθα 16 φύλλα: τους 4 άσσους (A), τους 4 ρήγες (K), τις 4 ντάμες (Q) και τους 4 βαλέδες (J). Κάθε μια από τις άνω τετράδες αποτελείται από μια κούπα (♥), ένα σπαθί (♠), ένα καρό (♦) και ένα μπαστούνι (♣). Επομένως, τα 16 φύλλα που έχουμε λάβει είναι τα ακόλουθα:

$$A\clubsuit, A\diamondsuit, A\spadesuit, A\heartsuit, K\clubsuit, K\diamondsuit, K\spadesuit, K\heartsuit, Q\clubsuit, Q\diamondsuit, Q\spadesuit, Q\heartsuit, J\clubsuit, J\diamondsuit, J\spadesuit, J\heartsuit.$$

Λαμβάνουμε ένα συνδυασμό 3 φύλλων από τα άνω 16, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό. Έστω X το πλήθος από ρηγάδες που επιλέξαμε, και έστω Y το πλήθος από κούπες που επιλέξαμε.

(α') Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή της T.M. X .

(β') Είναι οι T.M. X, Y ανεξάρτητες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ') Να προσδιορίσετε την από κοινού μέγιστη πιθανότητας των T.M. X και Y .

Λύση:

(α') Έστω οι T.M. Bernoulli $I_i, i = 1, 2, 3$, ίσες με 1 αν το φύλλο i που επιλέγουμε είναι ρήγας και 0 αλλιώς. Η ζητούμενη μέση τιμή ισούται με

$$E\left(\sum_{i=1}^3 I_i\right) = 3 \times \left(1 \times \frac{4}{16} + 0 \times \frac{12}{16}\right) = \frac{3}{4}.$$

Εναλλακτικά, αλλά με περισσότερες πράξεις, παρατηρούμε πως

$$P(X = k) = \frac{\binom{4}{k} \binom{12}{3-k}}{\binom{16}{3}},$$

όπου $k = 0, 1, 2, 3$. Πράγματι, έχουμε $\binom{4}{k}$ τρόπους για να επιλέξουμε k ρηγάδες από τους διαθέσιμους 4 και $\binom{12}{3-k}$ τρόπους για να επιλέξουμε άλλα $3 - k$ φύλλα από τα υπόλοιπα 12 διαθέσιμα φύλλα για να φτιάξουμε μια τριάδα φύλων. Επομένως, η μέση τιμή $E(X)$ ισούται με

$$E(X) = 0 \times \frac{\binom{4}{0} \binom{12}{3}}{\binom{16}{3}} + 1 \times \frac{\binom{4}{1} \binom{12}{2}}{\binom{16}{3}} + 2 \times \frac{\binom{4}{2} \binom{12}{1}}{\binom{16}{3}} + 3 \times \frac{\binom{4}{3} \binom{12}{0}}{\binom{16}{3}} = \frac{3}{4}.$$

(β') Οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες. Πράγματι, παρατηρήστε πως υπάρχουν $\binom{16}{3}$ συνδυασμοί που μπορούμε να επιλέξουμε. Από αυτούς, ακριβώς 4 έχουν 3 ρηγάδες, καθώς έχουμε 4 επιλογές για το ποιος ρήγας δεν θα εμφανιστεί στο συνδυασμό. Έχουμε επίσης 4 συνδυασμούς μόνο με κούπες (γιατί έχουμε 4 τρόπους να αποφασίσουμε ποια κούπα δεν θα εμφανιστεί στο συνδυασμό). Όμως δεν υπάρχει κανένας συνδυασμός που να έχει και 3 ρηγάδες και 3 κούπες. Επομένως, προκύπτουν οι ακόλουθες πιθανότητες:

$$P(X = 3) = \frac{4}{\binom{16}{3}}, \quad P(Y = 3) = \frac{4}{\binom{16}{3}}, \quad P(X = 3, Y = 3) = 0.$$

Έχουμε, λοιπόν, $P(X = x, Y = y) \neq P(X = x)P(Y = y)$, για κάποιο συνδυασμό x, y και, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, οι T.M. X, Y δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητες.

(γ') Οι X και Y μπορούν να λάβουν τις τιμές 0, 1, 2, 3. Παρατηρούμε πως

$$P(X = 2, Y = 3) = P(X = 3, Y = 2) = P(X = 3, Y = 3) = 0.$$

Πράγματι, αφού υπάρχει μόνο ένας ρήγας κούπα, δεν μπορούμε να έχουμε στα 3 φύλλα που θα επιλέξουμε ούτε 2 ρηγάδες και μόνο κούπες, ούτε μόνο ρηγάδες και 2 κούπες, ούτε μόνο ρηγάδες και μόνο κούπες.

Για κάθε ένα από τους υπόλοιπους συνδυασμούς τιμών, πρέπει να λύσουμε ένα πρόβλημα συνδυαστικής. Παρατηρούμε, καταρχάς, πως υπάρχουν συνολικά $\binom{16}{3}$ τρόποι για να λάβουμε ένα συνδυασμό 3 φύλων από 16 φύλλα. Επιπλέον,

i. Υπάρχουν 9 φύλλα που δεν είναι ούτε ρήγας ούτε κούπα, και $\binom{9}{3}$ τρόποι να τα επιλέξουμε, επομένως

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{16}{3}}.$$

ii. Για να μην επιλέξουμε κανένα ρήγα και μόνο μια κούπα, έχουμε 3 επιλογές για το φύλλο που είναι μεν κούπα αλλά όχι ρήγας και $\binom{9}{2}$ επιλογές για τα φύλλα που δεν είναι ούτε ρήγας ούτε κούπα. Επομένως

$$P(X = 0, Y = 1) = \frac{3 \times \binom{9}{2}}{\binom{16}{3}}.$$

iii. Για να μην επιλέξουμε κανένα ρήγα αλλά να επιλέξουμε 2 κούπες, έχουμε 3 επιλογές για την κούπα που δεν θα επιλέξουμε (παρατηρήστε ότι ο ρήγας κούπα σίγουρα δεν θα επιλεγεί), και 9 επιλογές για το φύλλο που δεν θα είναι ούτε κούπα ούτε ρήγας. Επομένως,

$$P(X = 0, Y = 2) = \frac{3 \times 9}{\binom{16}{3}}.$$

iv. Μόνο ένας συνδυασμός έχει μόνο κούπες και κανένα ρήγα. Επομένως,

$$P(X = 0, Y = 3) = \frac{1}{\binom{16}{3}}.$$

v. Θα επιλέξουμε ακριβώς ένα ρήγα και ακριβώς μια κούπα με δύο διαφορετικούς τρόπους. Είτε θα επιλέξουμε τον ρήγα κούπα και άλλα δύο φύλλα που δεν είναι ούτε ρήγας ούτε κούπα, κάτι που γίνεται με $\binom{9}{2}$ τρόπους, είτε να επιλέξουμε ένα ρήγα που δεν είναι κούπα (γίνεται με 3 τρόπους), μια κούπα που δεν είναι ρήγας (γίνεται με 3 τρόπους) και τέλος ένα φύλλο που δεν είναι ούτε ρήγας ούτε κούπα (γίνεται με 9 τρόπους). Επομένως,

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{\binom{9}{2} + 3 \times 3 \times 9}{\binom{16}{3}}.$$

vi. Θα επιλέξουμε ακριβώς ένα ρήγα και ακριβώς δύο κούπες με δύο διαφορετικούς τρόπους. Είτε θα επιλέξουμε ένα ρήγα που δεν είναι κούπα (γίνεται με 3 τρόπους) και δύο κούπες που δεν είναι ρήγας (γίνεται με 3 τρόπους) είτε θα επιλέξουμε τον ρήγα κούπα, μια κούπα ακόμα (γίνεται με 3 τρόπους) και ένα φύλλο που δεν είναι ούτε ρήγας ούτε κούπα (γίνεται με 9 τρόπους). Επομένως,

$$P(X = 1, Y = 2) = \frac{3 \times 3 + 3 \times 9}{\binom{16}{3}}.$$

vii. Θα επιλέξουμε ένα ρήγα και 3 κούπες αν επιλέξουμε τον ρήγα κούπα και άλλες δύο κούπες από τις 3 διαθέσιμες. Αυτό μπορεί να γίνει με 3 τρόπους. Επομένως

$$P(X = 1, Y = 3) = \frac{3}{\binom{16}{3}}.$$

viii. Θα επιλέξουμε δύο ρηγάδες και δύο κούπες αν επιλέξουμε τον ρήγα κούπα, ακόμα ένα ρήγα από τους 3 διαθέσιμους, και ακόμα μια κούπα από τις 3 διαθέσιμες. Επομένως,

$$P(X = 2, Y = 2) = \frac{3 \times 3}{\binom{16}{3}}.$$

Τέλος, λόγω συμμετρίας, θα πρέπει $P(X = i, Y = j) = P(X = j, Y = i)$, δηλαδή η από κοινού μάζα πιθανότητας είναι ένας συμμετρικός πίνακας. Χρησιμοποιώντας αυτή τη συμμετρία, μπορούμε να συμπληρώσουμε τον παρακάτω πίνακα:

y x	0	1	2	3
0	$\frac{\binom{9}{3}}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3\binom{9}{2}}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3 \times 9}{\binom{16}{3}}$	$\frac{1}{\binom{16}{3}}$
1	$\frac{3\binom{9}{2}}{\binom{16}{3}}$	$\frac{\binom{9}{2} + 3 \times 3 \times 9}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3 \times 3 + 3 \times 9}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3}{\binom{16}{3}}$
2	$\frac{3 \times 9}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3 \times 3 + 3 \times 9}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3 \times 3}{\binom{16}{3}}$	0
3	$\frac{1}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3}{\binom{16}{3}}$	0	0

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι τόσο οι γραμμές όσο και οι στήλες αθροίζονται στην μάζα πιθανότητας που έχει δοθεί στο πρώτο σκέλος.

40. **(Ποδόσφαιρο)** Στο ετήσιο αρκαδικό clasico μεταξύ των ποδοσφαιρικών ομάδων του Ζυγοβιστίου και της Τριπόλεως, βάσει ιστορικών δεδομένων έχει υπολογιστεί ότι οι ασυγκράτητοι λεβέντες του Ζυγοβιστίου σκοράρουν X γκολ, ενώ τα κουρασμένα παλικάρια της Τρίπολης μόλις Y γκολ, σύμφωνα με τις ακόλουθες περιθώριες μάζες πιθανότητας:

$$p_X(x) = \frac{1}{5}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4,$$

$$p_Y(0) = \frac{1}{2}, \quad p_Y(1) = \frac{1}{4}, \quad p_Y(2) = \frac{1}{4}.$$

(α') Αν δίνεται ότι οι Τ.Μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, ποια είναι η από κοινού μάζα πιθανότητάς τους, $p_{XY}(x, y)$;

(β') Αν δίνεται ότι οι Τ.Μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

(γ') Αν οι Τ.Μ. X και Y ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες, αλλά πρέπει να έχουν τις άνω περιθώριες μάζες, ποια είναι η ΜΕΓΙΣΤΗ δυνατή πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

(δ') Αν οι Τ.Μ. X και Y ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες, αλλά πρέπει να έχουν τις άνω περιθώριες μάζες, ποια είναι η ΕΛΑΧΙΣΤΗ δυνατή πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

Λύση:

(α') Λόγω ανεξαρτησίας, έχουμε

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y), \quad \forall x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, y \in \{0, 1, 2\},$$

και τελικά προκύπτει ο παρακάτω πίνακας που δίνει την $p_{XY}(x, y)$:

x	0	1	2	3	4
y					
0	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10
1	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20
2	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20

(β') Για να κερδίσει η Τρίπολη, πρέπει να έρθει το σκορ $1 - 0$, $2 - 1$, ή $2 - 0$ υπέρ της. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) + P(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{3}{20}.$$

(γ') Αφού οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, πρέπει να επιλέξουμε τιμές για τους διάφορους συνδυασμούς των (x, y) που εμφανίζονται ως ορίσματα της από κοινού μάζας ώστε να μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα

$$P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) + P(X = 0, Y = 2),$$

φροντίζοντας οι περιθώριες μάζες να είναι οι δοσμένες. Μια επιλογή είναι η ακόλουθη:

x	0	1	2	3	4
y					
0	0	0	1/6	1/6	1/6
1	1/5	0	1/60	1/60	1/60
2	0	1/5	1/60	1/60	1/60

Επομένως, η μέγιστη πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη είναι

$$P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) + P(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + 0 = \frac{2}{5}.$$

(δ') Παρόμοια, τώρα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την πιθανότητα

$$P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) + P(X = 0, Y = 2),$$

φροντίζοντας οι περιθώριες μάζες να είναι οι δοσμένες. Μια επιλογή είναι η ακόλουθη:

x	0	1	2	3	4
y					
0	1/5	1/5	1/10	0	0
1	0	0	1/20	1/10	1/10
2	0	0	1/20	1/10	1/10

Επομένως, η ελάχιστη πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη είναι

$$P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) + P(X = 0, Y = 2) = 0.$$

41. **(Πεπόνια)** Σε ένα καλάθι υπάρχουν 5 πεπόνια, εκ των οποίων τα 2 είναι καλά, και τα άλλα τρία χαλασμένα. Αρχίζουμε και κόβουμε τα πεπόνια, μέχρι να βρούμε και τα δύο καλά, και μετά σταματάμε. (Επομένως, ενδεχομένως υπάρχουν κάποια χαλασμένα πεπόνια που δεν θα κόψουμε.) Έστω X το πλήθος των πεπονιών που κόβουμε μέχρι να βρούμε το πρώτο καλό, και έστω Y το πλήθος των ΕΠΙΠΛΕΟΝ πεπονιών που κόβουμε μέχρι να βρούμε και το δεύτερο καλό.

Επομένως, οι Τ.Μ. X, Y λαμβάνουν τις τιμές 1, 2, 3, 4. Ποια είναι η από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X, Y ; Υπολογίστε τις $E(X), E(Y), \text{COV}(X, Y)$.

Λύση: Αφού οι X, Y λαμβάνουν τις τιμές 1, 2, 3, 4, συνολικά πρέπει να εξετάσουμε $4 \times 4 = 16$ περιπτώσεις, για να προσδιορίσουμε την από κοινού μάζα πιθανότητας. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X=1, Y=1) &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}, \\ P(X=1, Y=2) &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}, \\ P(X=1, Y=3) &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}, \\ P(X=1, Y=4) &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{10}, \\ P(X=2, Y=1) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}, \\ P(X=2, Y=2) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}, \\ P(X=2, Y=3) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{10}, \\ P(X=3, Y=1) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}, \\ P(X=3, Y=2) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{10}, \\ P(X=4, Y=1) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Όλα τα άλλα ζεύγη έχουν μηδενική πιθανότητα να συμβούν. Δεν είναι τυχαίο ότι όλα τα ζεύγη με θετική πιθανότητα έχουν την ίδια πιθανότητα. Πράγματι, έχουμε να τοποθετήσουμε τα δύο καλά πεπόνια σε δύο από 5 διαθέσιμες θέσεις. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{5}{2} = 10$ τρόπους, όλους με την ίδια πιθανότητα (λόγω συμμετρίας), άρα αυτή η πιθανότητα είναι $\frac{1}{10}$. Προκύπτει επομένως η ακόλουθη από κοινού μάζα:

x	1	2	3	4	
y					$p_Y(y)$
1	1/10	1/10	1/10	1/10	4/10
2	1/10	1/10	1/10	0	3/10
3	1/10	1/10	0	0	2/10
4	1/10	0	0	0	1/10
$p_X(x)$	4/10	3/10	2/10	1/10	

Ακολουθώντας, εύκολα έχουμε

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times \frac{1}{10} = 2, \\ E(Y) &= 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times \frac{1}{10} = 2, \\ E(XY) &= \frac{1}{10} \times (1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 4 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 1) \\ &= \frac{35}{10}, \\ \text{COV}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{35}{10} - 2 \times 2 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ήταν αναμενόμενο ότι η συνδιακύμανση είναι αρνητική. Πράγματι, αν αργήσουμε να βρούμε το πρώτο καλό πεπόνι, σημαίνει ότι έχουμε ανοίξει πολλά χαλασμένα, επομένως θα είναι πλέον πιο εύκολο να βρούμε το δεύτερο καλό πεπόνι.

42. **(Αυτιά και μύτες)** Ο Σταύρος έχει μεγάλη μύτη και η Μαρία έχει μεγάλα αυτιά. Ο Σταύρος και η Μαρία κάνουν 5 παιδιά, καθένα εκ των οποίων είναι αγόρι με πιθανότητα 0.5. Καθένα από αυτά κληρονομεί τα μεγάλα αυτιά της Μαρίας με πιθανότητα 0.5 και τη μεγάλη μύτη του Σταύρου με πιθανότητα 0.5. Κάθε παιδί κληρονομεί τη μεγάλη μύτη του Σταύρου ανεξάρτητα από το αν κληρονομεί τα μεγάλα αυτιά της Μαρίας, και ανεξάρτητα από το τι συνέβη στα άλλα παιδιά.

- (α') Έστω X το πλήθος των παιδιών που έχουν κληρονομήσει και τα μεγάλα αυτιά του Σταύρου και τη μεγάλη μύτη της Μαρίας. Γράψτε ένα μαθηματικό τύπο για την πιθανότητα $P(X = x)$, αναφέροντας τις δυνατές τιμές του x .
- (β') Έστω Y το πλήθος των παιδιών που έχουν κληρονομήσει είτε τα μεγάλα αυτιά, είτε τη μεγάλη μύτη, είτε και τα δύο. Γράψτε ένα μαθηματικό τύπο για την πιθανότητα $P(Y = y)$, αναφέροντας τις δυνατές τιμές του y .
- (γ') Μια πλαστική επέμβαση που επαναφέρει τη μύτη σε κανονικό μέγεθος κοστίζει 2000 ευρώ και μια πλαστική επέμβαση που επαναφέρει τα αυτιά (και τα δύο) σε κανονικό μέγεθος κοστίζει 4000 ευρώ. Αν ο Σταύρος και η Μαρία επιδιορθώσουν με πλαστική όλες τις μεγάλες μύτες και τα μεγάλα αυτιά των κοριτσιών τους, ποια είναι η μέση τιμή των χρημάτων που θα χρειαστούν;

Λύση:

- (α') Το ενδεχόμενο A ένα παιδί να έχει μεγάλα αυτιά και το ενδεχόμενο B να έχει μεγάλη μύτη είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Επομένως, η πιθανότητα να συμβαίνουν και τα δύο ενδεχόμενα ισούται με $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}$. Κάθε παιδί έχει μεγάλα αυτιά και μύτη ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα, επομένως το πλήθος των παιδιών με μεγάλα αυτιά και μύτη ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 5$ και $p = \frac{1}{4}$. Επομένως,

$$P(X = x) = \binom{5}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

- (β') Το ενδεχόμενο A ένα παιδί να έχει μεγάλα αυτιά και το ενδεχόμενο B να έχει μεγάλη μύτη είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Επομένως, η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα δύο ενδεχόμενα είναι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Κάθε παιδί έχει μεγάλα αυτιά ή μεγάλη μύτη ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα, επομένως το πλήθος των παιδιών με μεγάλα αυτιά ή μεγάλη μύτη ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 5$ και $p = \frac{3}{4}$. Επομένως,

$$P(X = x) = \binom{5}{x} \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{5-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

- (γ') Έστω W το πλήθος από κορίτσια με μεγάλη μύτη. Έστω επίσης V το πλήθος από κορίτσια με μεγάλα αυτιά. Παρατηρήστε ότι ορισμένα κορίτσια ενδέχεται να ανήκουν και στις δύο ομάδες. Παρατηρήστε επίσης ότι κάθε παιδί θα είναι κορίτσι με μεγάλη μύτη ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα παιδιά με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ (γιατί τα ενδεχόμενα να έχει μεγάλη μύτη και να είναι κορίτσι είναι επίσης ανεξάρτητα), επομένως η Τ.Μ. W ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 5$ και $p = \frac{1}{4}$, και μέση τιμή $E(W) = np = \frac{5}{4}$. Εντελώς ανάλογα, η Τ.Μ. V ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με τις ίδιες παραμέτρους $n = 5$ και $p = \frac{1}{4}$, και μέση τιμή επίσης $E(V) = np = \frac{5}{4}$. Τα χρήματα που θα δαπανηθούν είναι η Τ.Μ. $Z = 2000W + 4000V$, με μέση τιμή

$$E(2000W + 4000V) = 2000E(W) + 4000E(V) = 7500.$$

7η Ομάδα Ασκήσεων

43. **(Πυρκαγιάς)** Ένα καλοκαιρινό μήνα η μέγιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια μιας ημέρας είναι T.M. X με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} K [25 - (x - 40)^2], & 35 \leq x \leq 45, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α') Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου K .

(β') Σύμφωνα με έγκριτους δασολόγους, η έκταση των δασών που καίγεται κατά τη διάρκεια μιας ημέρας με μέγιστη θερμοκρασία X είναι $g(X) = e^{X-40}$. Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή της έκτασης των δασών που θα καούν σε μια ημέρα εκείνου του μήνα.

Λύση:

(α') Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{35}^{45} K [25 - (x - 40)^2] dx = K \int_{35}^{45} \left[25x - \frac{(x - 40)^3}{3} \right]' dx \\ &= K \left[25x - \frac{(x - 40)^3}{3} \right]_{35}^{45} = K \left[25 \times 45 - \frac{125}{3} - 25 \times 35 - \frac{125}{3} \right] = \frac{500K}{3}, \end{aligned}$$

επομένως, καθώς το άνω ολοκλήρωμα πρέπει να είναι μονάδα, έχουμε $K = \frac{3}{500}$.

(β') Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, η ζητούμενη αναμενόμενη τιμή θα είναι

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx = K \int_{35}^{45} e^{x-40} [25 - (x - 40)^2] dx \\ &= 25K \int_{35}^{45} e^{x-40} dx - K \int_{35}^{45} e^{x-40} (x - 40)^2 dx = 25K(e^5 - e^{-5}) - K \int_{-5}^5 e^t t^2 dt, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα κάναμε την αντικατάσταση $t = x - 40$. Επιπλέον, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-5}^5 e^t t^2 dt &= \int_{-5}^5 (e^t)' t^2 dt = [e^t t^2]_{-5}^5 - 2 \int_{-5}^5 e^t t dt = 25(e^5 - e^{-5}) - 2 [te^t]_{-5}^5 + 2 \int_{-5}^5 e^t dt \\ &= 25(e^5 - e^{-5}) - 10e^5 - 10e^{-5} + 2e^5 - 2e^{-5} = 17e^5 - 37e^{-5}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$E(g(X)) = 25K(e^5 - e^{-5}) - K(17e^5 - 37e^{-5}) = \frac{3}{500} (8e^5 + 12e^{-5}).$$

44. **(Πυκνότητα Πιθανότητας)** Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x}, & x \in [1, 2], \\ 0, & x \notin [1, 2], \end{cases}$$

μιας T.M., X , όπου το c είναι παράμετρος.

(α') Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου c .

(β') Να προσδιορίσετε την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F(x)$ που αντιστοιχεί στην άνω πυκνότητα.

(γ') Να υπολογίσετε την μέση τιμή $E(X)$.

(δ') Να υπολογίσετε ένα t τέτοιο ώστε $P(X \leq t) = P(X \geq t)$.

Λύση:

(α') Παρατηρούμε πως

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow c \int_1^2 e^{-x} dx = 1 \Leftrightarrow c [-e^{-x}]_1^2 = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{e^{-1} - e^{-2}}.$$

(β') Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας δίνεται από την εξίσωση

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Καθώς η $f(x)$ είναι κλαδική συνάρτηση, θα εξετάσουμε περιπτώσεις. Αν $x < 1$, τότε

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = \lim_{h \rightarrow -\infty} \int_h^x 0 dt = \lim_{h \rightarrow -\infty} 0 = 0.$$

Αν $x > 2$, τότε

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = \lim_{h \rightarrow -\infty} \left[\int_h^x 0 dt \right] = \lim_{h \rightarrow -\infty} \left[\int_h^1 0 dt + \int_1^2 ce^{-t} dt + \int_2^x 0 \right] = 1.$$

Τέλος, αν $1 \leq x \leq 2$, τότε

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = \lim_{h \rightarrow -\infty} \left[\int_h^x 0 dt \right] = \lim_{h \rightarrow -\infty} \left[\int_h^1 0 dt + \int_1^x ce^{-t} dt \right] = [ce^{-t}]_1^x = \frac{e^{-1} - e^{-x}}{e^{-1} - e^{-2}}.$$

Συγκεντρωτικά:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{e^{-1} - e^{-x}}{e^{-1} - e^{-2}}, & 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

(γ') Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = c \int_1^2 xe^{-x} dx = c \int_1^2 x(-e^{-x})' dx = c [-xe^{-x}]_1^2 + c \int_1^2 (-e^{-x})' dx \\ &= c [e^{-1} - 2e^{-2}] + c [e^{-1} - e^{-2}] = \frac{2e^{-1} - 3e^{-2}}{e^{-1} - e^{-2}}. \end{aligned}$$

(δ') Επειδή πρέπει $P(X \leq t) + P(X \geq t) = 1$, θα έχουμε $P(X \leq t) = P(X \geq t) = \frac{1}{2}$.

Το απλούστερο είναι να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας που έχουμε βρει:

$$F(x) = \frac{e^{-1} - e^{-t}}{e^{-1} - e^{-2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-1} - e^{-t} = \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e^{-2}}{2} \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{e^{-1}}{2} + \frac{e^{-2}}{2} \Leftrightarrow t = -\log \left[\frac{e^{-1}}{2} + \frac{e^{-2}}{2} \right].$$

45. **(Τοστιέρα-αποστειρωτής)** Ένας διδάσκων πιθανοτήτων αποστειρώνει γραπτά της τελικής εξέτασης στην τοστιέρα του σπιτιού του. Προκειμένου να αποστειρωθεί πλήρως ένα γραπτό, πρέπει να παραμείνει στην τοστιέρα για ένα χρόνο X ο οποίος είναι Τ.Μ. με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} C(x-1)e^{-x}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1, \end{cases}$$

όπου το C είναι μια άγνωστη σταθερά.

(α') Προσδιορίστε την τιμή της σταθεράς C .

(β') Να δώσετε ένα τύπο για την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F_X(x)$ της X .

(γ') Καθώς ο διδάσκων δεν έχει στη διάθεσή του άπειρο χρόνο, κρατά στην τοστιέρα κάθε γραπτό για χρόνο θ ο οποίος εξασφαλίζει ότι το γραπτό θα έχει αποστειρωθεί πλήρως με πιθανότητα 99%. Βρείτε μια εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί το θ . (Μην επιχειρήσετε να την λύσετε ως προς θ , καθώς δεν μπορεί να γραφτεί σε κλειστή μορφή χρησιμοποιώντας απλές συναρτήσεις.)

(δ') Για τον χρόνο θ του προηγούμενου σκέλους, ποια ακριβώς είναι η κατανομή των γραπτών που ΔΕΝ έχουν αποστειρωθεί πλήρως, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν 400 γραπτά και οι χρόνοι αποστείρωσης είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους; Ποια είναι επακριβώς η πιθανότητα να μην έχουν αποστειρωθεί ακριβώς 10 γραπτά; Μπορείτε να γράψετε μια προσέγγιση για αυτή την πιθανότητα;

Λύση:

(α') Θα πρέπει το ολοκλήρωμα της πυκνότητας σε όλο το $\mathbb{R}$ να ισούται με τη μονάδα. Το ολοκλήρωμα όμως αυτό ισούται με

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} C(x-1)e^{-x} dx = C \int_1^{\infty} (x-1)(-e^{-x})' dx \\ &= [-C(x-1)e^{-x}]_1^{\infty} + C \int_1^{\infty} e^{-x} dx = 0 + C[e^{-x}]_1^{\infty} = Ce^{-1} = 1 \Rightarrow C = e.\end{aligned}$$

(β') Γενικά ισχύει $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, επομένως η $F(x) = 0$ για $x < 1$, ενώ για $x \geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_1^x e(t-1)e^{-t} dt = - \int_1^x e(t-1)(e^{-t})' dt = [-e(t-1)e^{-t}]_1^x + e \int_1^x e^{-t} dt \\ &= -e^{1-x}(x-1) - e \int_1^x (e^{-t})' dt = -(x-1)e^{1-x} - e(e^{-x} - e^{-1}) \\ &= -(x-1)e^{-(x-1)} - e^{-(x-1)} + 1 = (-x+1-1)e^{-(x-1)} + 1 = 1 - xe^{-(x-1)},\end{aligned}$$

άρα, συγκεντρωτικά,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - xe^{-(x-1)}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

(γ') Πρέπει

$$1 - \theta e^{-(\theta-1)} = 0.99 \Leftrightarrow \theta e^{-(\theta-1)} = 0.01.$$

(δ') Το πλήθος των γραπτών που δεν αποστειρώνεται ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 400$ και $p = 0.01$, διότι το κάθε γραπτό από τα 400 δεν αποστειρώνεται ανεξάρτητα από τα άλλα γραπτά με πιθανότητα 0.99. Επομένως, η πιθανότητα να μην αποστειρωθούν ακριβώς 10 γραπτά είναι

$$p = \binom{400}{10} 0.01^{10} 0.99^{390}.$$

Προσεγγιστικά, επειδή το N είναι πολύ μεγάλο και το p πολύ μικρό, η άνω πιθανότητα δίνεται προσεγγιστικά και από την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 400 \times 0.01 = 4$:

$$p \simeq e^{-4} \frac{4^{10}}{10!}.$$

46. **(Καντάδες)** Κάθε βράδυ ο Ρωμαίος κάνει μια καντάδα στην Ιουλιέτα. Η διάρκεια της καντάδας του είναι μια συνεχής Τ.Μ. X (σε λεπτά) με πυκνότητα:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^3, & x \in [0, 1], \\ ax, & x \in [1, 3], \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Αν ο χρόνος ξεπεράσει τα 2 λεπτά, η μητέρα της Ιουλιέτας του πετάει έναν κουβά με μπουγαδόνερο.

(α') Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a .

(β') Έστω πως ο Ρωμαίος σταματάει τις καντάδες μόλις φάει έναν κουβά νερό στο κεφάλι. Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του συνολικού πλήθους καντάδων που θα κάνει (συμπεριλαμβανομένης της τελευταίας);

(γ') Έστω τώρα πως ο Ρωμαίος συνεχίζει τις καντάδες ακόμα κι αν κάποιες μέρες του ρίξουν τον κουβά. Ποια είναι η πιθανότητα σε δύο βδομάδες (14 ημέρες) να καταφέρει να κάνει ακριβώς 10 καντάδες χωρίς να του ρίξει η μητέρα της Ιουλιέτας τον κουβά;

Λύση:

(α') Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, πρέπει το ολοκλήρωμα της πυκνότητας να είναι μονάδα, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow a \int_0^1 x^3 dx + a \int_1^3 x dx = 1 \Leftrightarrow a \left[\frac{1}{4} - 0 \right] + a \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right] = 1 \Leftrightarrow \frac{17}{4}a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{4}{17}.$$

(β') Ο Ρωμαίος θα φάει τον κουβά στο κεφάλι με πιθανότητα

$$q = \int_2^3 ax \, dx = a \left[\frac{9}{2} - \frac{4}{2} \right] = \frac{10}{17}.$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι καντάδες είναι ανεξάρτητα πειράματα που έχουν δύο αποτελέσματα, δηλαδή αποτυχία, αν ο Ρωμαίος δεν φάει τον κουβά στο κεφάλι, και επιτυχία, αν ο Ρωμαίος φάει τον κουβά στο κεφάλι, και επαναλαμβάνονται μέχρι να συμβεί η πρώτη επιτυχία. Επομένως, το πλήθος X των καντάδων είναι γεωμετρική Τ.Μ. με παράμετρο $q = \frac{10}{17}$, επομένως

$$E(X) = \frac{1}{q} = \frac{17}{10}, \quad \text{VAR}(X) = \frac{1-q}{q^2} = 1.19.$$

(γ') Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε καντάδα είναι ένα πείραμα που είναι επιτυχημένο αν ο Ρωμαίος δεν φάει τον κουβά, κάτι που γίνεται με πιθανότητα $p = \frac{7}{10}$, και αποτυχημένο αν φάει τον κουβά. Το πλήθος των επιτυχιών ακολουθεί την διωνυμική κατανομή, επομένως τελικά η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\binom{14}{10} \left(\frac{7}{17} \right)^{10} \left(\frac{10}{17} \right)^4 \simeq 0.0168.$$

47. **(Συνδυασμός πυκνοτήτων)** Έστω $f(x)$ και $g(x)$ δύο πυκνότητες πιθανότητας, των Τ.Μ. X και Y αντίστοιχα. Έστω η συνάρτηση $h(x) = af(x) + (1-a)g(x)$, όπου $a \in (0, 1)$.

(α') Να δείξετε ότι η $h(x)$ είναι επίσης πυκνότητα πιθανότητας, έστω μιας Τ.Μ. Z .

(β') Πόση είναι η $E(Z)$;

(γ') Πόση είναι η $E(Z^2)$;

(δ') Πόση είναι η $\text{VAR}(Z)$;

Οι απαντήσεις σας στα σκέλη (β'), (γ'), (δ') να δοθούν συναρτήσει των $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$, $E(Y^2)$ και a .

Λύση:

(α') Η $h(x)$ είναι παντού μη αρνητική, αφού $a > 0$, $1-a > 0$, $f(x) \geq 0$, και $g(x) \geq 0$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι έχει ολοκλήρωμα στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ ίσο με τη μονάδα. Πράγματι,

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (af(x) + (1-a)g(x)) \, dx = a \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx + (1-a) \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dx = a + (1-a) = 1.$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι πυκνότητες, επομένως το ολοκλήρωμά τους είναι μονάδα.

(β') Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} xh(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x(af(x) + (1-a)g(x)) \, dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) \, dx + (1-a) \int_{-\infty}^{\infty} xg(x) \, dx = aE(X) + (1-a)E(Y). \end{aligned}$$

(γ') Με ανάλογες πράξεις, έχουμε

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2h(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(af(x) + (1-a)g(x)) \, dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x) \, dx + (1-a) \int_{-\infty}^{\infty} x^2g(x) \, dx = aE(X^2) + (1-a)E(Y^2). \end{aligned}$$

(δ') Συνδυάζοντας τα δύο προηγούμενα σκέλη, έχουμε τελικά

$$\text{VAR}(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = aE(X^2) + (1-a)E(Y^2) - (aE(X) + (1-a)E(Y))^2.$$

48. **(Εμβόλια)** Δύο φαρμακευτικές εταιρίες ετοιμάζουν εμβόλια για τον κορονοϊό. Το πρώτο εξ αυτών θα είναι έτοιμο μετά από ένα τυχαίο χρόνο X , μετρούμενο σε έτη, που ακολουθεί την πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} k_1 e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Το δεύτερο εξ αυτών θα είναι έτοιμο μετά από τυχαίο χρόνο Y , επίσης μετρούμενο σε έτη, που ακολουθεί την πυκνότητα πιθανότητας

$$g(y) = \begin{cases} k_2 y(1-y), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Οι X, Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

(α') Προσδιορίστε την τιμή της k_1 .

(β') Προσδιορίστε την τιμή της k_2 .

(γ') Ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένουμε μισό τουλάχιστον χρόνο για να γίνει διαθέσιμο κάποιο εμβόλιο, είτε το ένα είτε το άλλο;

Λύση:

(α') Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow k_1 \int_0^1 e^{-x} dx = 1 \Leftrightarrow k_1 [-e^{-x}]_0^1 = 1 \Leftrightarrow k_1 = \frac{1}{1 - e^{-1}}.$$

(β') Ομοίως,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = 1 \Leftrightarrow k_2 \int_0^1 y(1-y) dy = 1 \Leftrightarrow k_2 \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow k_2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = 1 \Leftrightarrow k_2 = 6.$$

(γ') Θα περιμένουμε μισό τουλάχιστον χρόνο, αν και τα δύο εμβόλια χρειαστούν πάνω από μισό χρόνο. Λόγω ανεξαρτησίας, αυτό θα γίνει με πιθανότητα $P(X > \frac{1}{2}) P(Y > \frac{1}{2})$. Όμως

$$P\left(X \geq \frac{1}{2}\right) = k_1 \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x} dx = k_1 [-e^{-x}]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{1 - e^{-1}},$$

και

$$P\left(Y \geq \frac{1}{2}\right) = k_2 \int_{\frac{1}{2}}^1 y(1-y) dy = k_2 \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = 6 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} \right] = \frac{1}{2}.$$

Άρα τελικά η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{2(1 - e^{-1})}.$$

49. **(Η μέθοδος του ανεμιστήρα)** Ένας διδάσκων διορθώνει γραπτά τελικών εξετάσεων Πιθανοτήτων με τη μέθοδο του ανεμιστήρα. Συγκεκριμένα, αφήνει κάθε γραπτό μπροστά από ένα ανεμιστήρα. Το γραπτό πέφτει στο πάτωμα σε απόσταση X από τον διδάσκοντα, που μοντελοποιείται ως T.M. με την ακόλουθη πυκνότητα:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{v} e^{-x/v}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Η τιμή v είναι μια παράμετρος που εξαρτάται από την ένταση του ανεμιστήρα. Αν $X \geq 10$, τότε ο βαθμός Y που λαμβάνει ο φοιτητής είναι 10. Αλλιώς, ο βαθμός που λαμβάνει ο φοιτητής είναι το ακέραιο μέρος $\lfloor X \rfloor$ του X , δηλαδή ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του X . Επομένως, δεν επιτρέπονται ημιακέραιοι βαθμοί. Ο φοιτητής περνά το μάθημα αν πάρει βαθμό 5 και άνω.

(α') Αν ο διδάσκων θέλει να περάσει ακριβώς το 10% των φοιτητών, πόση πρέπει να είναι η τιμή του v ;

(β') Να δώσετε μια μαθηματική έκφραση για την πιθανότητα $P(Y = k)$, για κάθε ένα $k = 0, 1, 2, \dots, 10$.

Λύση:

(α') Παρατηρούμε πως ένας φοιτητής θα περάσει αν και μόνο αν $Y \geq 5$, επομένως απαιτούμε

$$\begin{aligned} \int_5^\infty \frac{1}{v} e^{-x/v} dx &= \frac{1}{10} \Leftrightarrow \int_5^\infty \left(-e^{-x/v}\right)' dx = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 0 + e^{-5/v} = \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{v} = -\log 10 \Leftrightarrow v = \frac{5}{\log 10} \simeq 2.1715. \end{aligned}$$

(β') Ειδικά για την περίπτωση $k = 10$, έχουμε

$$P(Y = 10) = \int_{10}^\infty \frac{1}{v} e^{-x/v} dx = \int_{10}^\infty \left(-e^{-x/v}\right)' dx = e^{-10/v}.$$

Στις περιπτώσεις $k = 0, 1, \dots, 9$, έχουμε

$$P(Y = k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{v} e^{-x/v} dx = \int_k^{k+1} \left(-e^{-x/v}\right)' dx = e^{-k/v} - e^{-(k+1)/v}.$$

Σχετικά με τη μέση τιμή της άνω Τ.Μ. Y , κατά τα γνωστά από τον ορισμό της μέσης τιμής διακριτών Τ.Μ., έχουμε

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{10} k P(Y = k) = \sum_{k=1}^9 k \left[e^{-k/v} - e^{-(k+1)/v} \right] + 10 \left[e^{-10/v} \right].$$

8η Ομάδα Ασκήσεων

50. **(Λάμπες)** Δύο λάμπες έχουν τυχαίες διάρκειες ζωής X και Y , ανεξάρτητες μεταξύ τους, που περιγράφονται από τις ακόλουθες πυκνότητες πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} k_1 x(1-x), & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1], \end{cases} \quad g(y) = \begin{cases} k_2 y e^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

(α') Να προσδιορίσετε τις τιμές των παραμέτρων k_1 και k_2 .

(β') Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(X > \frac{1}{2})$ και $P(Y > \frac{1}{2})$.

(γ') Επιλέγουμε μια από τις δύο λάμπες στην τύχη, χωρίς προτίμηση στην επιλογή, και έστω T η διάρκεια ζωής της. Έστω το ενδεχόμενο A να επιλέξαμε την λάμπα με πυκνότητα $f(x)$. Δίνεται ότι το ενδεχόμενο A είναι ανεξάρτητο από τις άνω διάρκειες ζωής. Με δεδομένο ότι εν τέλει η διάρκεια ζωής της λάμπας που επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε υπερβαίνει το $\frac{1}{2}$, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχόμενου A ;

Λύση:

(α') Σχετικά με την k_1 , έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 k_1 x(1-x) dx = k_1 \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)' dx = \frac{1}{6} k_1,$$

επομένως $k_1 = 6$. Σχετικά με την k_2 ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy &= \int_0^{\infty} k_2 y e^{-y} dy = \int_0^{\infty} k_2 y (-e^{-y})' dy = \lim_{h \rightarrow \infty} k_2 [y e^{-y}]_0^h + \lim_{h \rightarrow \infty} k_2 \int_0^h e^{-y} dy \\ &= k_2 \left(0 - \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{h}{e^h} \right) + k_2 \lim_{h \rightarrow \infty} (1 - e^{-h}) = k_2, \end{aligned}$$

επομένως $k_2 = 1$.

(β')

$$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 6x(1-x) dx = 6 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)' dx = 6 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} P\left(Y > \frac{1}{2}\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} y e^{-y} dy = \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\int_{\frac{1}{2}}^h y e^{-y} dy \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} [-y e^{-y}]_{\frac{1}{2}}^h + \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{2}}^h e^{-y} dy = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(γ') Κάνοντας χρήση του Κανόνα του Bayes,

$$\begin{aligned} P\left(A|T > \frac{1}{2}\right) &= \frac{P(A, T > \frac{1}{2})}{P(T > \frac{1}{2}|A)P(A) + P(T > \frac{1}{2}|A')P(A')} \\ &= \frac{P(A, X > \frac{1}{2})}{P(X > \frac{1}{2}|A)P(A) + P(Y > \frac{1}{2}|A')P(A')} \\ &= \frac{P(A)P(X > \frac{1}{2})}{P(A)P(X > \frac{1}{2}) + P(A')P(Y > \frac{1}{2})} = \frac{1}{1 + 3e^{-1}}. \end{aligned}$$

51. **(Κώστας και Δώρα)** Όταν ο Κώστας και η Δώρα κάνουν check-in για να παραδώσουν τις αποσκευές τους πριν από την πτήση, και έχουν την επιλογή να περιμένουν σε μια από δύο ουρές, αντί να περιμένουν μαζί σε μια ουρά κάθονται σε μια ουρά ο καθένας, και όποιος φτάσει πρώτος να εξυπηρετηθεί, φωνάζει τον άλλο στην ουρά του, και αρχίζει η εξυπηρέτηση και των δύο ταυτόχρονα.

Υποθέτουμε ότι ο Κώστας θα χρειαστεί χρόνο μέχρι να αδειάσει η δικιά του ουρά και να αρχίσει να εξυπηρετείται ίσο με X , και η Δώρα αντίστοιχα χρόνο ίσο με Y , όπου η X και η Y είναι εκθετικές T.M. με μέση τιμή 1, ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- (α') Ποια είναι η κατανομή και η μέση τιμή του χρόνου Z ο οποίος χρειάζεται για να ξεκινήσει η εξυπηρέτηση του πρώτου (και επομένως και του δεύτερου, βάσει του κανόνα που ακολουθούν);
- (β') Ποια είναι η κατανομή και η μέση τιμή του χρόνου W που γλιτώνει από την αναμονή του ο ένας από τους δύο; (Παρατήρηση: προφανώς ο άλλος δεν θα γλιτώσει καθόλου χρόνο, γιατί είχε επιλέξει την γρήγορη ουρά).

Λύση:

- (α') Παρατηρούμε πως ο χρόνος που θα ξεκινήσει η εξυπηρέτηση και των δύο είναι $Z = \min\{X, Y\}$. Το ελάχιστο δύο εκθετικών T.M. είναι επίσης εκθετική T.M., σύμφωνα με τη θεωρία. Ειδικά στην περίπτωση μας, έχουμε

$$P(\min\{X, Y\} \leq x) = 1 - P(\min(X, Y) \geq x) = 1 - P(X \geq x, Y \geq x) \\ 1 - P(X \geq x)P(Y \geq x) = 1 - e^{-x}e^{-x} = 1 - e^{-2x},$$

επομένως πράγματι το ελάχιστο $\min\{X, Y\}$ είναι εκθετική T.M. με μέση τιμή $\frac{1}{2}$. Επομένως, η εξυπηρέτηση θα αρχίσει κατά μέσο όρο μετά από χρόνο $E(\min\{X, Y\}) = \frac{1}{2}$.

- (β') Σχετικά με το χρόνο που θα γλιτώσει ο ένας εκ των δύο, παρατηρούμε πως από τη στιγμή που αδειάζει η μία ουρά, η άλλη ουρά θα αδειάσει πάλι μετά από εκθετικό χρόνο με μέση τιμή 1, λόγω της ιδιότητας έλλειψης μνήμης.

52. (Αριθμητικοί υπολογισμοί με την κανονική κατανομή) Έστω X μια T.M. με κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$.

- (α') Αν $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$, να βρεθούν οι $P(X < 1.22)$ και $P(X > -1.22)$.
- (β') Αν $\mu = 1$ και $\sigma^2 = 1$, να βρεθεί η πιθανότητα $P(X > 2.7)$ και η πιθανότητα $P(X < -4.7 \text{ ή } X > 2.7)$.
- (γ') Αν $\mu = 1$ και $\sigma^2 = 1$, να βρεθεί η $P(X > 2.1 \text{ ή } -1 < X < 1)$.
- (δ') Αν $\mu = -1$ και $\sigma^2 = 4$, να βρεθούν οι $P(X > 3)$ και $P(X > 3 | X > 2)$.
- (ε') Αν $\mu = -2$ και $\sigma^2 = 3.5$, να βρεθεί η μέση τιμή των $Y = 1 - X^2$ και $Y = (X + 2)^{15}$.
- (ζ') Αν $\mu = 2$, να βρεθεί η τιμή της διασποράς για την οποία $P(X < 0) = 1/3$.

Λύση: Έχουμε, κατά περίπτωση:

- (α') Αντικαθιστώντας τις σχετικές τιμές της $\Phi(z)$ από τον πίνακα τιμών της Φ , έχουμε

$$P(X < 1.22) = \Phi(1.22) \simeq 0.8888, \\ P(X > -1.22) = 1 - P(X \leq -1.22) = 1 - \Phi(-1.22) = \Phi(1.22) \simeq 0.8888.$$

- (β') Έχουμε

$$P(X > 2.7) = 1 - P(X \leq 2.7) = 1 - \Phi\left(\frac{2.7 - 1}{1}\right) = 1 - \Phi(1.7) \simeq 1 - 0.9554 = 0.0446,$$

και

$$P(X < -4.7 \text{ ή } X > 2.7) = P(X < -4.7) + P(X > 2.7) = \Phi\left(\frac{-4.7 - 1}{1}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{2.7 - 1}{1}\right) \\ = \Phi(-5.7) + 1 - \Phi(1.7) \simeq 0 + 1 - 0.9554 = 0.0446.$$

- (γ') Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα,

$$P(X > 2.1 \text{ ή } -1 < X < 1) = P(X > 2.1) + P(-1 < X < 1) \\ = 1 - \Phi\left(\frac{2.1 - 1}{1}\right) + \Phi\left(\frac{1 - 1}{1}\right) - \Phi\left(\frac{-1 - 1}{1}\right) \\ = 1 - \Phi(1.1) + \Phi(0) - \Phi(-2) \simeq 1 - 0.8643 + 0.5 - 0.0228 = 0.6129.$$

- (δ') Εδώ έχουμε

$$P(X > 3) = 1 - \Phi\left(\frac{3 + 1}{2}\right) = 1 - \Phi(2) \simeq 0.0228,$$

και

$$P(X > 2) = 1 - \Phi\left(\frac{2 + 1}{2}\right) = 1 - \Phi(1.5) \simeq 0.0668,$$

οπότε

$$P(X > 3 | X > 2) = \frac{P(X > 3, X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{P(X > 3)}{P(X > 2)} = \frac{1 - \Phi(2)}{1 - \Phi(1.5)} \simeq 0.0593.$$

(ε') Για $Y = 1 - X^2$ έχουμε:

$$E(Y) = E((1 - X^2)) = 1 - E(X^2) = 1 - (\sigma^2 + \mu^2) = 1 - 3.5 - 4 = -6.5.$$

Για $Y = (X + 2)^{15}$ έχουμε:

$$E(Y) = E((X + 2)^{15}) = E(W^{15}),$$

όπου $W = X + 2$ είναι μια Τ.Μ. με κατανομή $N(0, 3.5)$, δηλαδή με μέση τιμή μηδέν. Έστω $f(x)$ η πυκνότητα της W . Παρατηρήστε πως

$$E(Y) = E(W^{15}) = \int_{-\infty}^{\infty} w^{15} f(w) dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)} dw.$$

Παρατηρήστε ότι το καταχρηστικό ολοκλήρωμα ισούται με

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)} dw &= \int_{-\infty}^0 w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)} dw + \int_0^{\infty} w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)} dw \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)} dw + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)} dw. \end{aligned}$$

Καθένα από τα άνω όρια είναι πεπερασμένο, γιατί η συνάρτηση $e^{-w^2/(2\sigma^2)}$ μειώνεται πολύ πιο γρήγορα από την w^{15} .

(Αν θέλουμε να κάνουμε μια αυστηρή απόδειξη, μπορούμε να ξεκινήσουμε παρατηρώντας πως με μερικές εφαρμογές του κανόνα L'Hôpital προκύπτει ότι

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w^{15}}{e^{w^2/(4\sigma^2)}} = 0,$$

άρα υπάρχει κάποιο W έτσι ώστε για $w > W$ να έχουμε

$$w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)} < e^{w^2/(4\sigma^2)} \times e^{-w^2/(2\sigma^2)} = e^{-w^2/4\sigma^2},$$

του οποίου το ολοκλήρωμα στο διάστημα $[W, \infty]$ είναι πεπερασμένο. Μπορείτε να συμπληρώσετε τα κενά στην άνω απόδειξη;)

Επιπλέον, τα δύο όρια είναι αντίθετα, γιατί

$$\int_{-\infty}^0 w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)} dw = - \int_0^{\infty} w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)} dw.$$

Αυτό προκύπτει αν κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητής $w \rightarrow -w$ σε ένα από τα δύο.

Άρα τελικά το άθροισμα των δύο καταχρηστικών ολοκληρωμάτων είναι 0, και τελικά $E[Y] = 0$.

(ζ') Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X < 0) &= \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(X - 2 < 0 - 2) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P\left(\frac{X - 2}{\sigma} < \frac{-2}{\sigma}\right) = \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{-2}{\sigma}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{\sigma} = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma = -\frac{2}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)}. \end{aligned}$$

Από τον πίνακα τιμών της Φ , βλέπουμε πως για την αντίστροφη της Φ έχουμε $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \simeq -0.43$, άρα τελικά

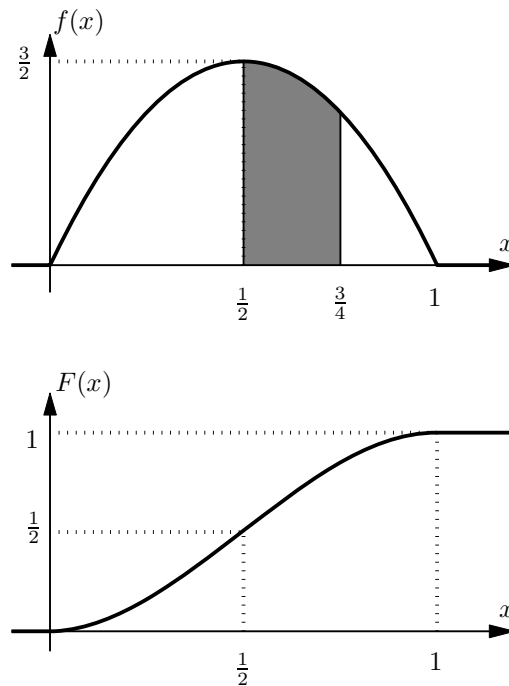
$$\sigma \simeq -\frac{2}{-0.43} = 4.65 \Leftrightarrow \sigma^2 \simeq 21.63.$$

53. **(Κατανομή Βήτα)** Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα:

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

(α') Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c .

(β') Υπολογίστε την πιθανότητα $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4})$.



Σχήμα 4: Η πυκνότητα και η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X στην Άσκηση 53.

(γ') Βρείτε την συνάρτηση κατανομής $F(x)$.

Λύση:

(α') Η σταθερά c πρέπει να έχει τέτοια τιμή ώστε το ολοκλήρωμα της πυκνότητας να ισούται με τη μονάδα. Άρα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 cx(1-x) dx = c \int_0^1 x - x^2 dx = c \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = c \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = \frac{c}{6},$$

Συνεπώς $c = 6$. Η πυκνότητα έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 4.

(β') Παρομοίως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4}\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f(x) dx = 6 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x(1-x) dx = 6 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \\ &= 6 \left[\frac{9}{32} - \frac{1}{8} - \frac{9}{64} + \frac{1}{24} \right] = \frac{11}{32}. \end{aligned}$$

Το αντίστοιχο εμβαδόν εμφανίζεται σκιασμένο στο Σχήμα 4.

(γ') Προφανώς για $x < 0$ έχουμε $F(x) = 0$, και για $x > 1$ έχουμε $F(x) = 1$. Για την περίπτωση $0 \leq x \leq 1$, έχουμε:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x 6t(1-t) dt = 3x^2 - 2x^3.$$

Συμπερασματικά:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 3x^2 - 2x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Η συνάρτηση κατανομής έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 4.

54. **(Μέση τιμή της Τ.Μ. Cauchy)** Μια Τ.Μ. X ακολουθεί την κατανομή Cauchy με παραμέτρους $\gamma > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, όταν η πυκνότητά της ισούται με

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma} \right)^2 \right]}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(α') Επιβεβαιώστε ότι το ολοκλήρωμα της $f(x)$ στο $\mathbb{R}$ είναι μονάδα.

(β') Να δείξετε ότι η Τ.Μ. Cauchy δεν έχει μέση τιμή, γιατί η απόπειρα υπολογισμού του καταχρηστικού ολοκληρώματος που την ορίζει καταλήγει σε απροσδιοριστία $\infty - \infty$.

Λύση:

(α') Παρατηρήστε πως

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{x_0} \frac{dx}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]} + \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]} \\&= \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{\pi(1+t^2)} + \int_0^{\infty} \frac{dt}{\pi(1+t^2)} \\&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 (\arctan t)' dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (\arctan t)' dt \\&= \frac{1}{\pi} [\arctan t]_{-\infty}^0 + \frac{1}{\pi} [\arctan t]_0^{\infty} = \frac{1}{\pi} \left[0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = 1.\end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα κάναμε αντικατάσταση $t = \frac{x-x_0}{\gamma}$, ενώ στην τρίτη, χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ιδιότητα της αντίστροφης εφαπτόμενης $(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}$.

(β') Από τον ορισμό των καταχρηστικών ολοκληρωμάτων,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^{x_0} \frac{xdx}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]} + \int_{x_0}^{\infty} \frac{xdx}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]},$$

εφόσον υπάρχουν και τα δύο ολοκληρώματα και δεν προκύπτει απροσδιοριστία. Παρατηρήστε πως έχουμε σπάσει το αρχικό ολοκλήρωμα σε δύο καταχρηστικά αριστερά και δεξιά της θέσης x_0 , για να εκμεταλλευτούμε την προφανή συμμετρία.

Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x_0} \frac{xdx}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]} &= \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\left(t + \frac{x_0}{\gamma}\right) dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{tdt}{\pi(1+t^2)} + \frac{x_0}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} \\&= \frac{\gamma}{\pi} \left[\frac{1}{2} \log(1+t^2)\right]_{-\infty}^0 + \frac{x_0}{\pi} [\arctan t]_{-\infty}^0 \\&= \frac{\gamma}{\pi} [0 - \infty] + \frac{x_0}{\pi} \left[0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\infty.\end{aligned}$$

Στην πρώτη ισότητα κάναμε αλλαγή μεταβλητής $t = \frac{x-x_0}{\gamma}$, ενώ στην δεύτερη χρησιμοποιήσαμε τις γνωστές σχέσεις

$$\left[\frac{1}{2} \log(1+t^2)\right]' = \frac{t}{1+t^2}, \quad (\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, με εντελώς ανάλογο τρόπο, έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{\infty} \frac{xdx}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]} &= \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(t + \frac{x_0}{\gamma}\right) dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{tdt}{\pi(1+t^2)} + \frac{x_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\&= \frac{\gamma}{\pi} \left[\frac{1}{2} \log(1+t^2)\right]_0^{\infty} + \frac{x_0}{\pi} [\arctan t]_0^{\infty} \\&= \frac{\gamma}{\pi} [\infty - 0] + \frac{x_0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \infty.\end{aligned}$$

Άρα τελικά, το καταχρηστικό ολοκλήρωμα δεν υπάρχει, λόγω απροσδιοριστίας $\infty - \infty$, και τελικά δεν υπάρχει η μέση τιμή.

55. (Άγνωστες παράμετροι) Έστω Τ.Μ. X με την ακόλουθη πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} Ke^{-x}, & x \in [0, A], \\ 0, & x \notin [0, A]. \end{cases}$$

όπου οι K, A είναι άγνωστες πραγματικές θετικές παράμετροι.

(α') Να υπολογίσετε την τιμή του K συναρτήσει του A .

(β') Να προσδιορίσετε την τιμή της μέσης τιμής της X συναρτήσει των τιμών των K και A .

(γ') Να προσδιορίσετε την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F(y) = P(Y \leq y)$ της Τ.Μ. $Y = 2X + 1$.

Λύση:

(α') Το ολοκλήρωμα της $f(x)$ πρέπει να είναι μονάδα. Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 &\Leftrightarrow \int_0^A Ke^{-x} dx = 1 \Leftrightarrow [Ke^{-x}]_0^A = 1 \Leftrightarrow K - Ke^{-A} = 1 \\ &\Leftrightarrow K[1 - e^{-A}] = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{1 - e^{-A}}. \end{aligned}$$

(β') Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^A Kxe^{-x} dx = \int_0^A Kx(-e^{-x})' dx = [-Kxe^{-x}]_0^A + K \int_0^A e^{-x} dx \\ &= -KAe^{-A} + K - Ke^{-A} = K[1 - Ae^{-A} - e^{-A}]. \end{aligned}$$

(γ') Παρατηρούμε πως

$$P(Y \leq y) = P[2X + 1 \leq y] = P[2X \leq y - 1] = P\left[X \leq \frac{y-1}{2}\right] = \int_{-\infty}^{\frac{y-1}{2}} f(x) dx.$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να εξετάσουμε διαφορετικές περιπτώσεις. Αν $\frac{y-1}{2} < 0$, τότε $P(Y \leq y) = 0$. Αν $\frac{y-1}{2} > A$, τότε το ολοκλήρωμα περιλαμβάνει όλο το θετικό κομμάτι της πυκνότητας $f(x)$, επομένως $P(Y \leq y) = 1$. Τέλος, αν $0 \leq \frac{y-1}{2} < A \Leftrightarrow 1 < y < 2A + 1$, τότε

$$\int_{-\infty}^{\frac{y-1}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{y-1}{2}} Ke^{-x} dx = [Ke^{-x}]_0^{\frac{y-1}{2}} = K - Ke^{-\frac{y-1}{2}}.$$

Συγκεντρωτικά:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1, \\ K - Ke^{-\frac{y-1}{2}}, & 1 \leq y \leq 2A + 1, \\ 1, & y > 2A + 1. \end{cases}$$

9η Ομάδα Ασκήσεων

56. **(Γεωμετρικό ξυπνητήρι)** Ένα «γεωμετρικό ξυπνητήρι» χτυπάει X λεπτά μετά τη ρύθμισή του, όπου η Τ.Μ. X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p \in (0, 1)$.

Έχετε στη διάθεσή σας δύο γεωμετρικά ξυπνητήρια Α και Β. Το Α χτυπάει κατά μέσο όρο 10 λεπτά μετά τη ρύθμισή του ενώ το ίδιο ισχύει και για το Β. Θεωρήστε ότι οι χρόνοι που χτυπούν τα ξυπνητήρια είναι ανεξάρτητοι.

- (α') Υπολογίστε πόσα κατά μέσο όρο λεπτά περνούν μέχρι να χτυπήσει το πρώτο από τα ξυπνητήρια.
- (β') Αφότου χτυπήσει το πρώτο ξυπνητήρι πόσος επιπλέον χρόνος περνάει μέχρι να χτυπήσει το δεύτερο;
- (γ') Υπολογίστε πόσα κατά μέσο όρο λεπτά περνούν, από την αρχή του χρόνου, μέχρι να χτυπήσει το δεύτερο ξυπνητήρι.

Λύση: Έστω X_1 και X_2 οι χρόνοι όταν θα χτυπήσουν τα δύο ξυπνητήρια. Έστω επίσης $Y = \min\{X_1, X_2\}$ ο χρόνος που θα χτυπήσει το πρώτο από αυτά.

(α') Παρατηρούμε πως όταν $y \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = 1 - P(Y > y) = 1 - P(\min\{X_1, X_2\} > y) = 1 - P(X_1 > y, X_2 > y) \\ &= 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y) = 1 - \exp(-y/10) \exp(-y/10) = 1 - \exp(-y/5). \end{aligned}$$

Αν $y < 0$, τότε παρομοίως

$$F_Y(y) = 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y) = 1 - 1 \times 1 = 0.$$

Επομένως,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \exp(-y/5), & y \geq 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases}$$

και τελικά η Y είναι εκθετική Τ.Μ. με παράμετρο 5 και μέση τιμή $E(Y) = 5$.

(β') Όταν χτυπήσει το πρώτο ξυπνητήρι, το δεύτερο δεν έχει χτυπήσει ακόμα και, από την ιδιότητα της απώλειας μνήμης, ο επιπλέον χρόνος, έστω Z , ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 10.

(γ') Απλώς έχουμε $E(Y + Z) = E(Y) + E(Z) = 5 + 10 = 15$.

57. **(Από κοινού συνεχείς Τ.Μ.)** Οι από κοινού συνεχείς Τ.Μ. X, Y έχουν την από κοινού πυκνότητα

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{5}(x + 2y), & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 2], \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (α') Ποια είναι η μέση τιμή $E[XY]$;
- (β') Ποιες είναι οι περιθώριες $f_X(x), f_Y(y)$;

Λύση:

(α') Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} xy f_{XY}(x, y) dA = \frac{1}{5} \iint_{[0,1] \times [0,2]} xy(x + 2y) dA = \frac{1}{5} \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2 y + 2xy^2) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{5} \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} xy^3 \right)' dy \right) dx = \frac{1}{5} \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{16}{3} x \right) dx = \frac{1}{5} \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{8}{3} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(β') Επίσης κατά τα γνωστά από τη θεωρία, έχουμε

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx.$$

Υπολογίζουμε καταρχάς την $f_X(x)$. Όταν $x \in [0, 1]$, έχουμε

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^2 \frac{1}{5}(x + 2y) dy = \frac{1}{5} \int_0^2 (xy + y^2)' dy = \frac{1}{5}(2x + 4),$$

ενώ όταν $x \notin [0, 1]$,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \, dy = 0.$$

Συγκεντρωτικά,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x+4), & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Με ανάλογο τρόπο, όταν $y \in [0, 2]$, έχουμε

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) \, dx = \int_0^1 \frac{1}{5}(x+2y) \, dx = \frac{1}{5} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 2xy \right)' \, dx = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} + 2y \right),$$

ενώ όταν $y \notin [0, 2]$,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \, dx = 0.$$

Συγκεντρωτικά,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5}(\frac{1}{2} + 2y), & y \in [0, 2], \\ 0, & y \notin [0, 2]. \end{cases}$$

58. **(Πελταστές)** Πρόσφατες αρχαιολογικές ανασκαφές επιβεβαίωσαν την αναφορά του Ηροδότου ότι ένας Σπαρτιάτης πελταστής της κλασσικής εποχής μπορούσε να ρίξει το δόρυ σε μια απόσταση X ομοιόμορφα κατανομημένη μεταξύ των 60 και 150 μέτρων, μπορούσε να εκτοξεύσει ένα λίθο με χρήση σφεντόνας σε μια απόσταση Y επίσης ομοιόμορφα κατανομημένη μεταξύ των 90 και 210 μέτρων, και, επιπλέον, τα X, Y ήταν ανεξάρτητα. Βάσει των άνω:

(α') Γράψτε εκφράσεις για τις πυκνότητες $f_X(x), f_Y(y), f_{XY}(x, y)$. Επίσης, δώστε μια έκφραση για την πιθανότητα $P(X > Y)$ σε μορφή διπλού ολοκληρώματος.

(β') Υπολογίστε την τιμή του διπλού ολοκληρώματος του προηγούμενου σκέλους.

Λύση:

(α') Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{90}, & 60 \leq x \leq 150, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{120}, & 90 \leq y \leq 210, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases}$$

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{10800}, & 60 \leq x \leq 150, 90 \leq y \leq 210, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad P(X > Y) = \iint_{\{(x,y):x>y\}} f_{XY}(x, y) \, dA.$$

(β') Παρατηρούμε πως η από κοινού πυκνότητα είναι θετική (και ίση με $c = \frac{1}{10800}$) μόνο εντός του ορθογωνίου $C = \{(x, y) : x \in [60, 150], y \in [90, 210]\}$. Άρα,

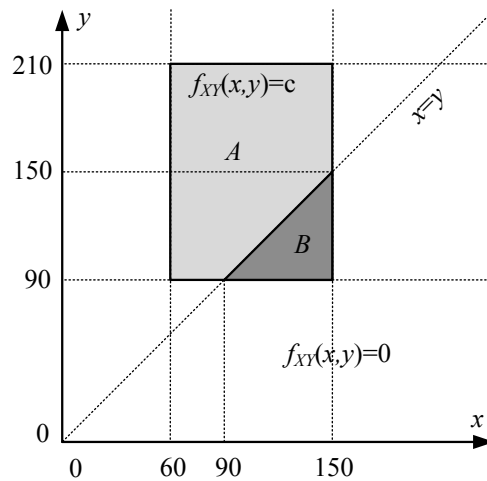
$$P(X > Y) = \iint_{\{(x,y):x>y\}} f_{XY}(x, y) \, dA = \iint_{C \cap \{(x,y):x>y\}} \frac{1}{10800} \, dA = \iint_B \frac{1}{10800} \, dA,$$

όπου $B = C \cap \{(x, y) : x > y\}$ είναι το υποσύνολο του C όπου επιπλέον $x > y$. Και τα δύο, καθώς και το υποσύνολο A του C όπου $y > x$, έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 5. Παρατηρήστε ότι καλούμαστε να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα μιας σταθερής συνάρτησης επί ενός τριγωνικού χωρίου εμβαδού $\frac{1}{2} \times 60 \times 60 = 1800$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(X > Y) = 1800 \times \frac{1}{10800} = \frac{1}{6}.$$

59. **(Age of Empires duels)** Ένας ιππότης μάχεται με ένα καταπέλτη μέχρι θανάτου. Ο ιππότης θα επιτύχει την εξόντωση του καταπέλτη σε χρόνο που μοντελοποιείται ως συνεχής T.M. X κατανομημένη ομοιόμορφα μεταξύ των χρόνων 10 και 20. Ο καταπέλτης θα πετύχει την εξόντωση του ιππότη σε χρόνο που μοντελοποιείται ως συνεχής T.M. Y εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο $\theta = 15$. Οι T.M. X, Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

(α') Γράψτε αναλυτικά ως κλαδική συνάρτηση την από κοινού πυκνότητα $f_{XY}(x, y)$ των X, Y . Σχεδιάστε στο επίπεδο xy το χωρίο όπου η $f_{XY}(x, y)$ λαμβάνει θετικές τιμές.



Σχήμα 5: Άσκηση 58.

(β') Ποια είναι η πιθανότητα $P(X > Y)$ να εξοντώσει ο καταπέλτης πρώτος τον υπόπτη;

Λύση:

(α') Έχουμε

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & x \in [10, 20], \\ 0, & x \notin [10, 20], \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{15}e^{-y/15}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Επομένως, λόγω της ανεξαρτησίας των X, Y ,

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{150}e^{-y/15}, & 10 \leq x \leq 20, y \geq 0, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Η πυκνότητα έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 6 (αριστερά), όπου φαίνεται και το ζητούμενο χωρίο.

(β') Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

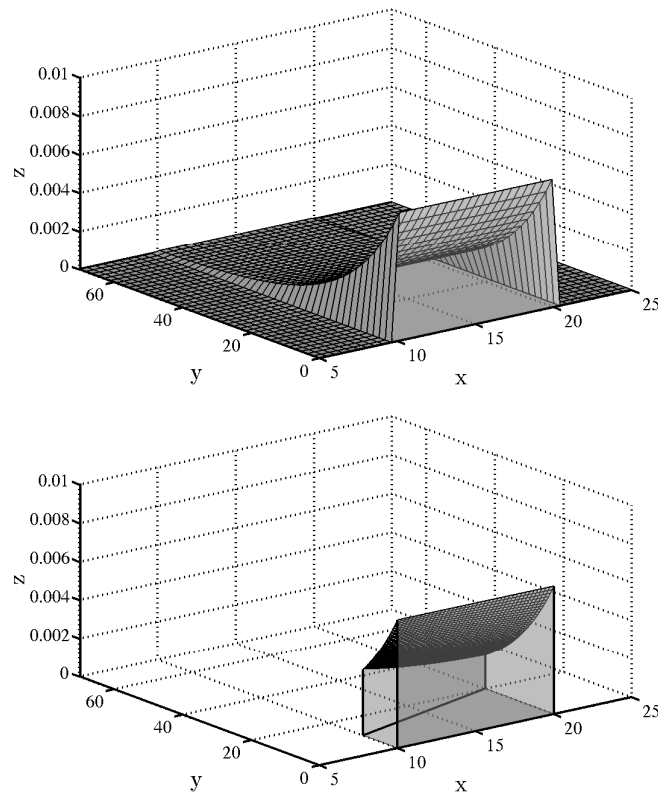
$$P(X > Y) = \iint_{R_1} f_{XY}(x, y) dA,$$

όπου $R_1 = \{(x, y) : x > y\}$. Επειδή όμως η πυκνότητα είναι μηδενική εκτός του χωρίου $R_2 = \{(x, y) : 10 \leq x \leq 20, y \geq 0\}$, εν τέλει η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα στο χωρίο $R = R_1 \cap R_2 = \{10 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq x\}$. (Παρατηρήστε πως μπορούμε να αντικαθιστούμε ανισοϊσότητες με ανισότητες χωρίς πρόβλημα, προκειμένου να ολοκληρώσουμε πυκνότητες.)

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \iint_R \frac{1}{150}e^{-y/15} dA = \int_{10}^{20} \left(\int_0^x \frac{1}{150}e^{-y/15} dy \right) dx \\ &= \frac{1}{10} \int_{10}^{20} \left(\int_0^x \left[-e^{-y/15} \right]' dy \right) dx \\ &= \frac{1}{10} \int_{10}^{20} \left[1 - e^{-x/15} \right] dx = 1 + \frac{15}{10} \int_{10}^{20} \left[e^{-x/15} \right]' dx = 1 + \frac{15}{10} \left[e^{-20/15} - e^{-10/15} \right] \\ &\simeq 0.6253. \end{aligned}$$

Η πιθανότητα που υπολογίσαμε ισούται με τον όγκο του στερεού στο Σχήμα 6 (δεξιά).

60. **(Διασπορά αθροίσματος)** Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 με $\text{VAR}(X_1) = \text{VAR}(X_2) = 1$ και διασπορά του αθροίσματος $\text{VAR}(X_1 + X_2) = 3$. Είναι οι X_1, X_2 ανεξάρτητες; Ποια είναι η συνδιακύμανσή τους; Αν είναι γνωστό ότι για κάποια σταθερά c οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και $X_2 - cX_1$ είναι ανεξάρτητες, τι συμπέρασμα βγάζετε για την σταθερά c ;



Σχήμα 6: Άσκηση 59.

Λύση: Αν ήταν ανεξάρτητες, τότε έπρεπε $\text{VAR}(X_1 + X_2) = \text{VAR}(X_1) + \text{VAR}(X_2) = 2$ το οποίο είναι άτοπο. Επιπλέον

$$3 = \text{VAR}(X_1 + X_2) = \text{VAR}(X_1) + \text{VAR}(X_2) + 2\text{COV}(X_1, X_2) = 2 + 2\text{COV}(X_1, X_2) \Rightarrow \text{COV}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}.$$

Ακολουθώντας, παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \text{COV}(X_1, X_2 - cX_1) &= E(X_1(X_2 - cX_1)) - E(X_1)E(X_2 - cX_1) \\ &= E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) - E(X_1cX_1) + E(X_1)E(cX_1) \\ &= \text{COV}(X_1, X_2) - c\text{COV}(X_1, X_1) = \frac{1}{2} - c\text{VAR}(X_1) = \frac{1}{2} - c, \end{aligned}$$

και αφού οι X_1 και $X_2 - cX_1$ είναι ανεξάρτητες, πρέπει $\text{COV}(X_1, X_2 - cX_1) = 0$, άρα $c = 1/2$.

61. **(Υπολογισμός περιθωρίων πυκνοτήτων)** Το ζεύγος των Τ.Μ. X, Y έχει την από κοινού πυκνότητα πιθανότητας

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x, y \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Να βρεθούν οι περιθώριες πυκνότητες πιθανότητας των X, Y .

Λύση: Προφανώς $f_X(x) = 0$ για $x < 0$. Αν $x \geq 0$,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^{\infty} xe^{-x(1+y)} dy = xe^{-x} \int_0^{\infty} e^{-xy} dy = -e^{-x} \int_0^{\infty} (e^{-xy})' dy = e^{-x}.$$

Παρομοίως, $f_Y(y) = 0$ για $y < 0$. Αν $y \geq 0$,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_0^{\infty} xe^{-x(1+y)} dx = \frac{1}{(y+1)^2}.$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει είτε με παραγοντική ολοκλήρωση είτε με χρήση των ιδιοτήτων της συνάρτησης Γάμμα.

10η Ομάδα Ασκήσεων

62. **(Πρόεδρος)** Ένας Πρόεδρος κάνει κάθε μέρα ένα τυχαίο αριθμό από σαρδάμ. Όταν εκείνη την ημέρα είναι ξεκούραστος (κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα 0.6) η Τ.Μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $N = 2$ και $p = 0.25$. Όταν όμως είναι κουρασμένος (κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα 0.4) η Τ.Μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $N = 3$ και $p = 0.5$.

- (α') Με δεδομένο ότι μια συγκεκριμένη μέρα ο Πρόεδρος έκανε 2 σαρδάμ, ποια η πιθανότητα να ήταν ξεκούραστος;
 (β') Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του X όταν ο Πρόεδρος είναι ξεκούραστος;
 (γ') Ποια είναι η πιθανότητα τα σαρδάμ του Προέδρου σε 100 μέρες στις οποίες είναι ξεκούραστος να ξεπεράσουν τα 55;

Λύση:

(α') Έστω A το ενδεχόμενο ο Πρόεδρος να είναι ξεκούραστος και B να κάνει 2 σαρδάμ. Θα χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')} \\ &= \frac{\binom{2}{2}0.25^2(1-0.25)^{2-2}0.6}{\binom{2}{2}0.25^2(1-0.25)^{2-2}0.6 + \binom{3}{2}0.5^20.5^{3-2}0.4} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

- (β') Η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 2$ και $p = 0.25$, επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, έχει μέση τιμή $\mu = Np = \frac{1}{2}$ και διασπορά $\sigma^2 = Np(1-p) = \frac{3}{8}$.
 (γ') Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Έστω $X_i, i = 1, \dots, 100$, το πλήθος από σαρδάμ που θα κάνει ο Πρόεδρος την μέρα i . Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 55\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\mu}{\sigma\sqrt{100}} > \frac{55 - 100\mu}{\sigma\sqrt{100}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{55 - 100\mu}{\sigma\sqrt{100}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \simeq 0.2071. \end{aligned}$$

63. **(Πασχαλινά αυγά)** Τα εκατοντάδες κόκκινα αυγά που περίσσεψαν στο σπίτι του Σταύρου μετά το Πάσχα είναι τριών ειδών: μικρά, με βάρος 70 γραμμάρια, μεσαία, με βάρος 80 γραμμάρια, και μεγάλα, με βάρος 90 γραμμάρια. Όποτε ο Σταύρος επιλέγει από το ψυγείο ένα αυγό για να φάει, επιλέγει ένα μικρό με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, ένα μεσαίο με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και ένα μεγάλο με πιθανότητα $\frac{1}{6}$.

- (α') Έστω X το βάρος ενός αυγού που επιλέγει ο Σταύρος. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση μάζας πιθανότητας, την μέση τιμή, και τη διασπορά της Τ.Μ. X .
 (β') Αν ο Σταύρος φάει σε μια μέρα 100 αυγά, ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα το βάρος τους να υπερβαίνει τα 7800 γραμμάρια;
 (γ') Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος από αυγά που μπορεί να φάει ο Σταύρος ώστε η πιθανότητα να φάει πάνω από 10000 γραμμάρια να μην υπερβαίνει το 0.01;

Λύση:

(α') Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας είναι η

$$p_X(70) = \frac{1}{2}, \quad p_X(80) = \frac{1}{3}, \quad p_X(90) = \frac{1}{6},$$

επομένως η μέση τιμή και η διασπορά υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mu_X &= \frac{1}{2} \times 70 + \frac{1}{3} \times 80 + \frac{1}{6} \times 90 = \frac{230}{3} \simeq 76.66, \\ E(X^2) &= \frac{1}{2} \times 70^2 + \frac{1}{3} \times 80^2 + \frac{1}{6} \times 90^2 = \frac{17800}{3} \simeq 5933.33, \\ \text{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{500}{9} \simeq 55.55, \\ \sigma_X &= \sqrt{\text{VAR}(X)} \simeq 7.45. \end{aligned}$$

(β') Έστω $X_i, i = 1, \dots, 100$ τα βάρη των 100 αυγών. Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.), όπου οι μ_X, σ_X δίνονται στο πρώτο σκέλος και $N = 100$:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^N X_i \leq 7800\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^N X_i - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X} \leq \frac{7800 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{7800 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \simeq \Phi(1.7889) \simeq 0.9632. \end{aligned}$$

(γ') Και πάλι θα χρησιμοποιήσουμε το Κ.Ο.Θ. Εδώ όμως, το πλήθος N των Τ.Μ. που θα προστεθούν είναι το ζητούμενο. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^N X_i \geq 10^4\right) &\leq 0.01 \Leftrightarrow P\left(\frac{\sum_{i=1}^N X_i - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X} \geq \frac{10^4 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \leq 0.01 \\ &\Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{10^4 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \leq 0.01 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{10^4 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \geq 0.99 \Leftrightarrow \frac{10^4 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X} \geq \Phi^{-1}(0.99) \\ &\Leftrightarrow 10^4 - N\mu_X - \Phi^{-1}(0.99)\sqrt{N}\sigma_X \geq 0 \Leftrightarrow \mu_X N + \Phi^{-1}(0.99)\sqrt{N}\sigma_X - 10^4 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{N_1} \leq \sqrt{N} \leq \sqrt{N_2}, \end{aligned}$$

όπου

$$\sqrt{N_{1,2}} = \frac{-\Phi^{-1}(0.99)\sigma_X \pm \sqrt{(\Phi^{-1}(0.99)\sigma_X)^2 + 4 \times 10^4 \mu_X}}{2\mu_X}.$$

Παρατηρήστε πως η μία από τις δύο ρίζες είναι αρνητική, ενώ η άλλη θετική. Προκύπτει, τελικά, πως θα πρέπει

$$N \leq \left(\frac{-\Phi^{-1}(0.99)\sigma_X + \sqrt{(\Phi^{-1}(0.99)\sigma_X)^2 + 4 \times 10^4 \mu_X}}{2\mu_X}\right)^2 \simeq 127.8772.$$

Επομένως, ο Σταύρος μπορεί να φάει άφοβα μέχρι 127 αυγά.

64. **(Σουβλάκια και Μπύρες)** Ο Σταύρος καταναλώνει κάθε βράδυ X σουβλάκια και Y μπύρες, όπου X, Y διακριτές Τ.Μ. Όταν ο Σταύρος είναι σε φόρμα, οι X, Y δίνονται από την κάτω αριστερά από κοινού μάζα, ενώ όταν δεν είναι σε φόρμα, από την κάτω δεξιά από κοινού μάζα:

y	1	2	3
x			
3	1/12	1/12	1/4
4	1/12	1/4	1/4

y	1	2	3
x			
3	1/6	1/6	1/6
4	1/6	1/6	1/6

Ο Σταύρος είναι κάθε βράδυ σε φόρμα με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ανεξάρτητα από τα άλλα βράδια.

- (α') Με δεδομένο ότι ο Σταύρος έφαγε ένα βράδυ 4 σουβλάκια, ποια είναι η πιθανότητα να ήταν σε φόρμα εκείνο το βράδυ;
- (β') Ποιες είναι οι μάζες πιθανότητας των Τ.Μ. X και Y , αν δεν γνωρίζουμε αν ο Σταύρος είναι σε φόρμα, αλλά μόνο την πιθανότητα να είναι σε φόρμα;
- (γ') Αν κάθε σουβλάκι έχει 600 θερμίδες και κάθε μπύρα έχει 200 θερμίδες, κατά μέσο όρο πόσες θερμίδες καταναλώνει ο Σταύρος κάθε βράδυ;
- (δ') Ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα ο Σταύρος να καταναλώσει πάνω από 350 σουβλάκια σε 100 διαδοχικά βράδια;

Λύση:

(α') Έστω A το ενδεχόμενο εκείνο το βράδυ ο Σταύρος να ήταν σε φόρμα, και C το ενδεχόμενο να έφαγε 4 σουβλάκια. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Bayes,

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C|A)P(A) + P(C|A')P(A')} = \frac{\frac{7}{12} \times \frac{1}{4}}{\frac{7}{12} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}} = \frac{7}{25}.$$

(β') Έστω A το ενδεχόμενο ο Σταύρος να είναι σε φόρμα. Έχουμε

$$\begin{aligned}P(X=3) &= P(X=3|A)P(A) + P(X=3|A')P(A') = \frac{5}{12} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{23}{48}, \\P(X=4) &= P(X=4|A)P(A) + P(X=4|A')P(A') = \frac{7}{12} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{25}{48}, \\P(Y=1) &= P(Y=1|A)P(A) + P(Y=1|A')P(A') = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{24}, \\P(Y=2) &= P(Y=2|A)P(A) + P(Y=2|A')P(A') = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3}, \\P(Y=3) &= P(Y=3|A)P(A) + P(Y=3|A')P(A') = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

(γ') Ο Σταύρος καταναλώνει κάθε βράδυ κατά μέσο όρο

$$\begin{aligned}E(600X + 200Y) &= 600E(X) + 200E(Y) \\&= 600 \left(3 \times \frac{23}{48} + 4 \times \frac{25}{48} \right) + 200 \left(1 \times \frac{7}{24} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{3}{8} \right) = 2529.2\end{aligned}$$

θερμίδες.

(δ') Τα σουβλάκια που θα φάει ο Σταύρος σε ένα βράδυ έχουν μέση τιμή και διασπορά που υπολογίζονται, κατά τα γνωστά, ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}E(X) &= 3 \times \frac{23}{48} + 4 \times \frac{25}{48} = 3.5208, \\E(X^2) &= 3^2 \times \frac{23}{48} + 4^2 \times \frac{25}{48} = 12.6458, \\\text{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = 0.2498.\end{aligned}$$

Έστω X_i το πλήθος από σουβλάκια που θα φάει ο Σταύρος το βράδυ i , $i = 1, \dots, 100$. Χρησιμοποιώντας το Κ.Ο.Θ.,

$$\begin{aligned}P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 350\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100E(X)}{\sqrt{100\text{VAR}(X_i)}} > \frac{350 - 100E(X_i)}{\sqrt{100\text{VAR}(X_i)}}\right) \\&\simeq 1 - \Phi\left(\frac{350 - 100E(X_i)}{\sqrt{100\text{VAR}(X_i)}}\right) = 0.6614\end{aligned}$$

65. **(Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής)** Σε ένα διαγώνισμα υπάρχουν 110 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Υποθέτουμε ότι κάποιος φοιτητής απαντάει όλες τις ερωτήσεις στην τύχη, ανεξάρτητα τη μια απ' την άλλη.

(α') Αν η κάθε ερώτηση έχει 65 δυνατές απαντήσεις, βρείτε μια καλή προσέγγιση για την πιθανότητα στο τέλος ο φοιτητής να έχει απαντήσει σωστά ακριβώς 2 ερωτήσεις.

(β') Έστω τώρα πως η κάθε ερώτηση έχει μόνο 4 δυνατές απαντήσεις, και πως για κάθε σωστή απάντηση ο εξεταζόμενος παίρνει 10 βαθμούς και για κάθε λάθος χάνει 3 βαθμούς. Βρείτε μια ακριβή προσέγγιση για την πιθανότητα να πάρει τελικά θετικό βαθμό.

Λύση:

(α') Έχουμε 110 πειράματα, όλα με την ίδια πιθανότητα επιτυχίας $p = \frac{1}{65}$, καθένα εκ των οποίων είναι επιτυχία ανεξάρτητα από τα άλλα, επομένως η πιθανότητα ο φοιτητής να έχει ακριβώς 2 απαντήσεις σωστές είναι, σύμφωνα με τη διωνυμική κατανομή,

$$\binom{110}{2} p^2 (1-p)^{108} \simeq 0.2659.$$

Επειδή, πάντως, το πλήθος των πειραμάτων είναι μεγάλο και η πιθανότητα επιτυχίας σε καθένα από αυτά είναι μικρή, μπορούμε να προσεγγίσουμε την διωνυμική κατανομή με την κατανομή Poisson με $\lambda = 110 \times \frac{1}{65}$, επομένως προσεγγιστικά η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \simeq 0.2636.$$

Πράγματι, παρατηρήστε ότι αυτή η προσέγγιση είναι αρκετά καλή.

(β') Οι βαθμοί που παίρνει ο φοιτητής στην ερώτηση i είναι μια τυχαία μεταβλητή X_i που λαμβάνει την τιμή 10 με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ και την τιμή -3 με πιθανότητα $\frac{3}{4}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 10 \times \frac{1}{4} + (-3) \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \\ E(X_i^2) &= 10^2 \times \frac{1}{4} + (-3)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{127}{4}, \\ \text{VAR}(X_i) &= \frac{127}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{507}{16} \simeq 31.6875. \end{aligned}$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ισούται με

$$\begin{aligned} P\left[\sum_{i=1}^{110} X_i > 0\right] &= P\left[\frac{\sum_{i=1}^{110} X_i - 110 \times \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{110 \times 507}{16}}} > \frac{0 - 110 \times \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{110 \times 507}{16}}}\right] \\ &\simeq P\left[Z > -\frac{110 \times \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{110 \times 507}{16}}}\right] = 1 - \Phi\left(-\frac{110 \times \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{110 \times 507}{16}}}\right) = 1 - \Phi(0.4658) \simeq 0.6793. \end{aligned}$$

Η προσεγγιστική ισότητα προέκυψε με χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος.

66. **(Καρέκλες)** Στο πανηγύρι του Σωτήρος του Ζυγοβιστίου ο έφορος της εκκλησίας φροντίζει για την προμήθεια καρεκλών. Ο έφορος γνωρίζει ότι υπάρχουν 1000 Ζυγοβιστινοί, καθένας εκ των οποίων θα επισκεφθεί το πανηγύρι ανεξάρτητα από τους άλλους, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Πόσες καρέκλες πρέπει να προμηθευτεί ο έφορος, ώστε η πιθανότητα να έχουν όλοι όσοι έρθουν καρέκλα να υπερβαίνει το 99%; Αρκεί να δώσετε μια μαθηματική έκφραση, χωρίς να υπολογίσετε ακριβή τιμή.

Λύση: Έστω οι 1000 Τ.Μ. Bernoulli X_i , $i = 1, \dots, 1000$, τέτοιες ώστε $X_i = 1$ αν έρθει ο i -οστός Ζυγοβιστινός, και $X_i = 0$ αν δεν έρθει. Έχουμε $E(X_i) = \mu = \frac{1}{2}$ και $\text{VAR}(X_i) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ επομένως η τυπική απόκλιση των X_i ισούται με $\sigma = \sqrt{\text{VAR}(X_i)} = \frac{1}{2}$.

Έστω πως ο έφορος της εκκλησίας προμηθεύεται K καρέκλες. Τότε, η πιθανότητα να μην επαρκούν οι καρέκλες ισούται με

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i > K\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000\mu}{\sqrt{1000}\sigma} > \frac{K - 1000\mu}{\sqrt{1000}\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{1000} \times \frac{1}{2}} > \frac{K - 1000 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{1000} \times \frac{1}{2}}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{K - 500}{5\sqrt{10}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{K - 500}{5\sqrt{10}}\right). \end{aligned}$$

Η τελευταία προσεγγιστική ισότητα προκύπτει από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Ο αριθμός K πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα

$$1 - \Phi\left(\frac{K - 500}{5\sqrt{10}}\right) < 0.01 \Leftrightarrow \Phi^{-1}(0.99) < \frac{K - 500}{5\sqrt{10}} \Leftrightarrow K > 500 + 5\sqrt{10}\Phi^{-1}(0.99) \Leftrightarrow K > 536.78,$$

και επειδή το K πρέπει να είναι ακέραιο, προκύπτει ότι ο έφορος πρέπει να αγοράσει 537 καρέκλες. Στην πρώτη ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η συνάρτηση Φ , άρα και η αντίστροφή της Φ^{-1} , είναι γνησίως αύξουσες.

Μία ελαφρώς καλύτερη προσέγγιση θα μπορούσε να γίνει αν αρχικά προσεγγίσαμε την $P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i > K + \frac{1}{2}\right)$. (Μπορείτε να καταλάβετε γιατί;) Θα προέκυπτε τότε ότι $K + \frac{1}{2} > 536.78 \Leftrightarrow K > 536.28$, επομένως και πάλι $K = 537$.

Χωρίς την προσέγγιση, αλλά με χρήση υπολογιστή, προκύπτει πως πράγματι ο $K = 537$ είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας μιας διωνυμικής με παραμέτρους N και p υπερβαίνει το 0.99. Επομένως, στο συγκεκριμένο πρόβλημα το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα δεν εισήγαγε κάποιο σφάλμα.

67. **(Μπιφτέκια)** Ένας μάγειρας θέλει να φτιάξει 100 μπιφτέκια. Ετοιμάζει το μείγμα, και αρχίζει να πλάθει τα μπιφτέκια, σκοπεύοντας το καθένα να έχει βάρος 200 γραμμάρια. Επειδή δεν μπορεί να υπολογίσει το βάρος του κάθε μπιφτεκιού επακριβώς, τα μπιφτέκια έχουν βάρη, σε γραμμάρια, που μοντελοποιούνται ως συνεχείς Τ.Μ. ομοιόμορφα κατανομημένες στο διάστημα $[180, 220]$.

- (α') Αν το μείγμα που έχει στη διάθεσή του ο μάγειρας έχει βάρος 20200 γραμμάρια, ποια είναι η πιθανότητα να μπορέσει να φτιάξει τουλάχιστον 100 μπιφτέκια;
- (β') Πόσο μείγμα πρέπει να έχει στη διάθεσή του ώστε η πιθανότητα να μπορέσει να φτιάξει τουλάχιστον 100 μπιφτέκια να είναι τουλάχιστον 99%;

Υποθέστε ότι και το τελευταίο μπιφτέκι που θα φτιάξει ο μάγειρας *πρέπει* να έχει την άνω κατανομή. Δηλαδή, ο μάγειρας δεν προχωρά στην κατασκευή ενός μπιφτεκιού που, κατά την εκτίμησή του, είναι μικρότερο του κανονικού.

Λύση: Έστω X_i , $i = 1, \dots, 100$ τα βάρη, σε γραμμάρια, των διαδοχικών μπιφτεκιών που φτιάχνει ο μάγειρας. Επειδή τα X_i είναι ομοιόμορφες T.M., κατά τα γνωστά από τη θεωρία έχουμε

$$\mu = E(X_i) = \frac{180 + 220}{2} = 200, \quad \sigma^2 = \frac{(220 - 180)^2}{12} = \frac{400}{3}.$$

- (α') Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα το άθροισμα των X_i να μην υπερβαίνει τα 20200 γραμμάρια, για την οποία έχουμε

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 20200\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \times 200}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}} \leq \frac{20200 - 100 \times 200}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}}\right) \\ &\simeq P\left(\leq \frac{20200 - 100 \times 200}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}}\right) = \Phi\left(\sqrt{3}\right) \simeq 0.9584. \end{aligned}$$

Στην πρώτη προσεγγιστική ισότητα, χρησιμοποιήσαμε το Κ.Ο.Θ.

- (β') Έστω πως ο μάγειρας έχει στη διάθεσή του μείγμα βάρους K . Έχουμε, ανάλογα με το προηγούμενο σκέλος,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq K\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \times 200}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}} \leq \frac{K - 100 \times 200}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}}\right) \\ &\simeq P\left(\leq \frac{K - 20000}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}}\right) \geq 0.99 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{K - 20000}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}}\right) \geq 0.99 \Leftrightarrow \frac{K - 20000}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}} \geq \Phi^{-1}(0.99) \\ &\Leftrightarrow K \geq 20000 + \frac{200}{\sqrt{3}} \Phi^{-1}(0.99) \Leftrightarrow K \gtrapprox 20269. \end{aligned}$$