ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2023-2024
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

# Λύσεις Τελικής Εξέτασης Ιουνίου Ακ. Έτους 2023-2024

1. **(Εξέταση)** Μια καθηγήτρια εξετάζει ένα φοιτητή στην ύλη ενός μαθήματος ως εξής. Ο φοιτητής απαντά 6 ερωτήσεις, με τις απαντήσεις του να είναι σωστές ή λάθος. Αν απαντήσει σωστά σε 4 και άνω ερωτήσεις, ο φοιτητής περνά το μάθημα, αλλιώς δεν περνά το μάθημα. Δίνεται ότι ο φοιτητής θα είναι αδιάβαστος με πιθανότητα $p_A = 1/2$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.2, θα είναι μισοδιαβασμένος με πιθανότητα $p_B = 1/3$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.5, και διαβασμένος με πιθανότητα $p_C = 1/6$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.8. Σε κάθε μια από τις άνω τρεις περιπτώσεις, η κάθε απάντηση είναι σωστή ή λάθος ανεξάρτητα από τις άλλες απαντήσεις.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, να δοθεί ένας τύπος για τη μάζα πιθανότητας του πλήθους $X$ των σωστών απαντήσεων που αυτός θα δώσει.

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, ποια είναι η πιθανότητα να περάσει το μάθημα;

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Με δεδομένο ότι ο φοιτητής πέρασε το μάθημα, ποια ήταν η πιθανότητα να ήταν αδιάβαστος;

   **Λύση:** Έστω $A$ το ενδεχόμενο ο φοιτητής να είναι αδιάβαστος, $B$ το ενδεχόμενο να είναι μισοδιαβασμένος, και $C$ το ενδεχόμενο να είναι διαβασμένος. Έστω επίσης $S_i$, με $i = 1, \ldots, 6$, το ενδεχόμενο ο φοιτητής να απάντησε σωστά την ερώτηση $i$. Μας έχουν δοθεί τα ακόλουθα δεδομένα:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(C) = \frac{1}{6},$$
$$P(S_i|A) = 0.2, \quad P(S_i|B) = 0.5, \quad P(S_i|C) = 0.8, \quad i = 1, \ldots, 6.$$

   Τέλος, έστω $D$ το ενδεχόμενο ο φοιτητής να περάσει το μάθημα.

   (α΄) Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, τότε κάθε μια από τις 6 ερωτήσεις θα απαντηθεί σωστά με πιθανότητα 0.2 ανεξάρτητα από τις άλλες. Επομένως, το πλήθος $X$ των σωστών απαντήσεων θα ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 6$ και $p = 0.2$ και θα έχουμε

$$P(X = k) = \binom{6}{k} 0.2^k 0.8^{6-k}.$$

   (β΄) Ο φοιτητής θα περάσει το μάθημα αν απαντήσει τουλάχιστον 4 ερωτήσεις σωστά. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(D) = \binom{6}{4} 0.2^4 0.8^2 + \binom{6}{5} 0.2^5 0.8^1 + \binom{6}{6} 0.2^6 0.8^0 \simeq 0.0170.$$

   (γ΄) Θα χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}P(D|A)}{\frac{1}{2}P(D|A) + \frac{1}{3}P(D|B) + \frac{1}{6}P(D|C)}, \end{aligned}$$

   όπου η $P(D|A)$ είναι αυτή που έχει υπολογιστεί στο προηγούμενο σκέλος, ενώ για τις άλλες δεσμευμένες πιθανότητες, ανάλογα με το προηγούμενο σκέλος, έχουμε

$$\begin{aligned} P(D|B) &= \binom{6}{4} 0.5^4 0.5^2 + \binom{6}{5} 0.5^5 0.5^1 + \binom{6}{6} 0.5^6 0.5^0 \simeq 0.3438, \\ P(D|C) &= \binom{6}{4} 0.8^4 0.2^2 + \binom{6}{5} 0.8^5 0.2^1 + \binom{6}{6} 0.8^6 0.2^0 \simeq 0.9091. \end{aligned}$$

   Με αντικατάσταση, τελικά προκύπτει πως

$$P(A|D) \simeq 0.0243.$$

2. **(Σιοκολατάκια)** Μια φοντανιέρα περιέχει 5 σοκολατάκια με γέμιση λικέρ (και 80 θερμίδες έκαστο), 10 σοκολατάκια με γέμιση πραλίνα (και 100 θερμίδες έκαστο) και 15 σοκολατάκια με γέμιση γουασάμπι (και 120 θερμίδες έκαστο). Τα σοκολατάκια είναι πανομοιότυπα εξωτερικά. Ο Σταύρος επιλέγει να φάει 3 από τα 30 σοκολατάκια, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό από σοκολατάκια που θα επιλέξει. Έστω $X$ το πλήθος από σοκολατάκια λικέρ και $Y$ το πλήθος από σοκολατάκια πραλίνας που θα φάει ο Σταύρος.

(α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. $X, Y$.

(β΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η μέση τιμή από τις θερμίδες που θα καταναλώσει ο Σταύρος τρώγοντας τα 3 σοκολατάκια;

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα ο Σταύρος να μην φάει κανένα σοκολατάκι με γέμιση γουασάμπι;

**Λύση:**

(α΄) Υπάρχουν συνολικά $5+10+15 = 30$ σοκολατάκια και επομένως $\binom{30}{3}$ συνδυασμοί από τριάδες με σοκολατάκια που μπορεί να επιλέξει ο Σταύρος. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(X = x, Y = y)$ ο Σταύρος να επιλέξει $x$ σοκολατάκια λικέρ και $y$ σοκολατάκια πραλίνα, όπου $0 \le x, y \le 3$. Καταρχάς, παρατηρούμε πως αν $x + y > 3$ τότε η πιθανότητα είναι μηδέν, αφού ο Σταύρος θα φάει μόνο 3 σοκολατάκια. Στην περίπτωση που $x+y \le 3$, παρατηρούμε πως έχουμε $\binom{5}{x}$ τρόπους να επιλέξουμε $x$ σοκολατάκια λικέρ, ακολούθως $\binom{10}{y}$ τρόπους να επιλέξουμε $y$ σοκολατάκια πραλίνας και, τέλος, $\binom{15}{4-x-y}$ τρόπους να επιλέξουμε τα υπόλοιπα $3 - x - y$ σοκολατάκια γουασάμπι. Επομένως:

$$P(X = x, Y = y) = \frac{\binom{5}{x}\binom{10}{y}\binom{15}{3-x-y}}{\binom{30}{3}}.$$

Σε μορφή πίνακα:

| $x$ \ $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 13/116 | 15/58 | 135/812 | 6/203 |
| 1 | 15/116 | 75/406 | 45/812 | 0 |
| 2 | 15/406 | 5/203 | 0 | 0 |
| 3 | 1/406 | 0 | 0 | 0 |

(β΄) Υπάρχουν δύο τρόποι για να υπολογίσουμε τη ζητούμενη μέση τιμή. Ο τρόπος με τις λιγότερες πράξεις είναι ο εξής: έστω $C_i$, όπου $i = 1, 2, 3$ οι θερμίδες που θα έχει το κάθε σοκολατάκι από τα 3 που θα φάει ο Σταύρος. Παρατηρούμε πως

$$E(C_i) = \frac{5}{30} \times 80 + \frac{10}{30} \times 100 + \frac{15}{30} \times 120 = \frac{320}{3} \simeq 106.67,$$

Η μέση τιμή από θερμίδες που θα καταναλώσει ο Σταύρος θα είναι

$$E\left(\sum_{i=1}^{3} C_i\right) = 3E(C_i) = 320.$$

Παρατηρήστε ότι τα $C_i$, $i = 1, 2, 3$, δεν είναι ανεξάρτητα, παρόλα αυτά οι άνω υπολογισμοί είναι σωστοί.

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο σκέλος:

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0 \cdot \left(\frac{13}{116} + \frac{15}{58} + \frac{135}{812} + \frac{6}{203}\right) + 1 \cdot \left(\frac{15}{116} + \frac{75}{406} + \frac{45}{812}\right) + 2 \cdot \left(\frac{15}{406} + \frac{5}{203}\right) + 3 \cdot \frac{1}{406} \\
&= \frac{1}{2}, \\
E(Y) &= 0 \cdot \left(\frac{13}{116} + \frac{15}{116} + \frac{15}{406} + \frac{1}{406}\right) + 1 \cdot \left(\frac{15}{58} + \frac{75}{406} + \frac{5}{203}\right) + 2 \cdot \left(\frac{135}{812} + \frac{45}{812}\right) + 3 \cdot \frac{6}{203} \\
&= 1, \\
E(C) &= E(80X + 100Y) = 80E(X) + 100E(Y) = 140.
\end{aligned}$$

Τέλος, παρατηρήστε ότι οι μέσες τιμές $E(X)$ και $E(Y)$ θα μπορούσαν να υπολογιστούν με λιγότερες πράξεις παρατηρώντας, εναλλακτικά, πως $X = X_1 + X_2 + X_3$ και $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ όπου οι $X_i$ και $Y_i$, $i = 1, 2, 3$, κατάλληλα ορισμένες Τ.Μ. Bernoulli.

(γ΄) Έστω $D$ το ενδεχόμενο ο Σταύρος να μην φάει ούτε ένα σοκολατάκι με γέμιση γουασάμπι. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να λυθεί η άσκηση. Ο πρώτος είναι να κάνουμε χρήση του πρώτου σκέλους:

$$P(D) = P(X+Y=3) = \frac{1}{406} + \frac{5}{203} + \frac{45}{812} + \frac{6}{203} = \frac{13}{116}.$$

Εναλλακτικά, έστω $A_i, i = 1, 3$ το ενδεχόμενο το σοκολατάκι $i$ να μην είναι με γέμιση γουασάμπι. Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1) = \frac{15}{30} \times \frac{14}{29} \times \frac{13}{28} = \frac{13}{116}.$$

Τέλος, μια τρίτη λύση είναι να παρατηρήσουμε πως υπάρχουν $\binom{15}{3}$ συνδυασμοί από σοκολατάκια χωρίς γουασάμπι, επομένως

$$P(D) = \frac{\binom{15}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{15 \times 14 \times 13}{30 \times 29 \times 28} = \frac{13}{116}.$$

3. **(Πυκνότητα Πιθανότητας)** Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x}, & x \in [1,2], \\ 0, & x \notin [1,2], \end{cases}$$

μιας Τ.Μ., $X$, όπου το $c$ είναι παράμετρος.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $c$.

(β΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F(x)$ που αντιστοιχεί στην άνω πυκνότητα.

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε την μέση τιμή $E(X)$.

(δ΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε ένα $t$ τέτοιο ώστε $P(X \le t) = P(X \ge t)$.

**Λύση:**

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow c\int_1^2 e^{-x}\,dx = 1 \Leftrightarrow c\left[-e^{-x}\right]_1^2 = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{e^{-1}-e^{-2}}.$$

(β΄) Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας δίνεται από την εξίσωση

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Καθώς η $f(x)$ είναι κλαδική συνάρτηση, θα εξετάσουμε περιπτώσεις. Αν $x < 1$, τότε

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = \lim_{h\to-\infty}\int_h^x 0\,dt = \lim_{h\to-\infty} 0 = 0.$$

Αν $x > 2$, τότε

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = \lim_{h\to-\infty}\left[\int_h^x 0\,dt\right] = \lim_{h\to-\infty}\left[\int_h^1 0\,dt + \int_1^2 ce^{-t}\,dt + \int_2^x 0\right] = 1.$$

Τέλος, αν $1 \le x \le 2$, τότε

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = \lim_{h\to-\infty}\left[\int_h^x 0\,dt\right] = \lim_{h\to-\infty}\left[\int_h^1 0\,dt + \int_1^x ce^{-t}\,dt\right] = \left[ce^{-t}\right]_1^x = \frac{e^{-1}-e^{-x}}{e^{-1}-e^{-2}}.$$

Συγκεντρωτικά:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{e^{-1}-e^{-x}}{e^{-1}-e^{-2}}, & 1 \le x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

(γ΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = c\int_1^2 x e^{-x}\, dx = c\int_1^2 x(-e^{-x})'\, dx = c\left[-xe^{-x}\right]_1^2 + c\int_1^2 (-e^{-x})'\, dx \\ &= c\left[e^{-1} - 2e^{-2}\right] + c\left[e^{-1} - e^{-2}\right] = \frac{2e^{-1} - 3e^{-2}}{e^{-1} - e^{-2}}. \end{aligned}$$

(δ΄) Επειδή πρέπει $P(X \leq t) + P(X \geq t) = 1$, θα έχουμε $P(X \leq t) = P(X \geq t) = \frac{1}{2}$.
Το απλούστερο είναι να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας που έχουμε βρει:

$$F(x) = \frac{e^{-1} - e^{-t}}{e^{-1} - e^{-2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-1} - e^{-t} = \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e^{-2}}{2} \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{e^{-1}}{2} + \frac{e^{-2}}{2} \Leftrightarrow t = -\log\left[\frac{e^{-1}}{2} + \frac{e^{-2}}{2}\right].$$

4. **(Πασχαλινά αυγά)** Τα εκατοντάδες κόκκινα αυγά που περίσσεψαν στο σπίτι του Σταύρου μετά το Πάσχα είναι τριών ειδών: μικρά, με βάρος 70 γραμμάρια, μεσαία, με βάρος 80 γραμμάρια, και μεγάλα, με βάρος 90 γραμμάρια. Όποτε ο Σταύρος επιλέγει από το ψυγείο ένα αυγό για να φάει, επιλέγει ένα μικρό με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, ένα μεσαίο με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και ένα μεγάλο με πιθανότητα $\frac{1}{6}$.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Έστω $X$ το βάρος ενός αυγού που επιλέγει ο Σταύρος. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση μάζας πιθανότητας, την μέση τιμή, και τη διασπορά της Τ.Μ. $X$.

(β΄) *(1 μονάδα)* Αν ο Σταύρος φάει σε μια μέρα 100 αυγά, ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητας το βάρος τους να υπερβαίνει τα 7800 γραμμάρια;

(γ΄) *(1 μονάδα)* Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος από αυγά που μπορεί να φάει ο Σταύρος ώστε η πιθανότητα να φάει πάνω από 10000 γραμμάρια να μην υπερβαίνει το 0.01;

**Λύση:**

(α΄) Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας είναι η

$$p_X(70) = \frac{1}{2}, \quad p_X(80) = \frac{1}{3}, \quad p_X(90) = \frac{1}{6},$$

επομένως η μέση τιμή και η διασπορά υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mu_X &= \frac{1}{2}\times 70 + \frac{1}{3}\times 80 + \frac{1}{6}\times 90 = \frac{230}{3} \simeq 76.66, \\ E(X^2) &= \frac{1}{2}\times 70^2 + \frac{1}{3}\times 80^2 + \frac{1}{6}\times 90^2 = \frac{17800}{3} \simeq 5933.33, \\ \mathrm{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{500}{9} \simeq 55.55, \\ \sigma_X &= \sqrt{\mathrm{VAR}(X)} \simeq 7.45. \end{aligned}$$

(β΄) Έστω $X_i$, $i = 1, \ldots, 100$ τα βάρη των 100 αυγών. Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.), όπου οι $\mu_X$, $\sigma_X$ δίνονται στο πρώτο σκέλος και $N = 100$:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \leq 7800\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X} \leq \frac{7800 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{7800 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \simeq \Phi(1.7889) \simeq 0.9632. \end{aligned}$$

(γ΄) Και πάλι θα χρησιμοποιήσουμε το Κ.Ο.Θ. Εδώ όμως, το πλήθος $N$ των Τ.Μ. που θα προστεθούν είναι το ζητούμενο. Έχουμε:

$$P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \geq 10^4\right) \leq 0.01 \Leftrightarrow P\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X} \geq \frac{10^4 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \leq 0.01$$

$$\Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{10^4 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \leq 0.01 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{10^4 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \geq 0.99 \Leftrightarrow \frac{10^4 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X} \geq \Phi^{-1}(0.99)$$

$$\Leftrightarrow 10^4 - N\mu_X - \Phi^{-1}(0.99)\sqrt{N}\sigma_X \geq 0 \Leftrightarrow \mu_X N + \Phi^{-1}(0.99)\sqrt{N}\sigma_X - 10^4 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{N_1} \leq \sqrt{N} \leq \sqrt{N_2},$$

όπου

$$\sqrt{N_{1,2}} = \frac{-\Phi^{-1}(0.99)\sigma_X \pm \sqrt{(\Phi^{-1}(0.99)\sigma_X)^2 + 4 \times 10^4 \mu_X}}{2\mu_X}.$$

Παρατηρήστε πως η μία από τις δύο ρίζες είναι αρνητική, ενώ η άλλη θετική. Προκύπτει, τελικά, πως θα πρέπει

$$N \leq \left( \frac{-\Phi^{-1}(0.99)\sigma_X + \sqrt{(\Phi^{-1}(0.99)\sigma_X)^2 + 4 \times 10^4 \mu_X}}{2\mu_X} \right)^2 \simeq 127.8772.$$

Επομένως, ο Σταύρος μπορεί να φάει άφοβα μέχρι 127 αυγά.