

Οδηγίες

1. Διάρκεια εξέτασης: 120 ΛΕΠΤΑ
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
5. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
6. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
7. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
8. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
9. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Παπουτσοθήκη)** (2 μονάδες) Σε μια παπουτσοθήκη υπάρχουν 15 ζεύγη παπουτσιών, όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Επιλέγουμε στην τύχη, και χωρίς προτίμηση στις επιλογές, 3 αριστερά παπούτσια και 2 δεξιά παπούτσια. Έστω X το πλήθος των πλήρων ζευγαριών που θα βρεθούν μεταξύ των 5 παπουτσιών που θα επιλέξουμε. Παρατηρήστε πως η Τ.Μ. X μπορεί να λάβει τις τιμές $X = 0$ (αν κανένα δεξί παπούτσι δεν είναι ζεύγος με κάποιο από τα αριστερά), $X = 1$ (αν μόνο το ένα από τα δύο δεξιά παπούτσια είναι ζεύγος με κάποιο από τα τρία αριστερά), ή $X = 2$ (αν και τα δύο δεξιά παπούτσια είναι ζεύγη με δύο από τα τρία αριστερά παπούτσια). Να υπολογίσετε τις αντίστοιχες πιθανότητες, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$.
2. **(Τράπουλα)** (1.5 μονάδα) Μια τράπουλα έχει 52 φύλλα, εκ των οποίων 4 άσσους και 4 ρηγάδες. Επιλέγουμε 5 φύλλα, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό. Έστω X το πλήθος από άσσους και Y το πλήθος από ρηγάδες μεταξύ των 5 επιλεγμένων φύλλων. Να δώσετε ένα τύπο για την πιθανότητα $P(X = x, Y = y)$.
3. **(Λάμπες)** Έχουμε στη διάθεσή μας δύο λάμπες, εκ των οποίων η μια ονομάζεται εκθετική και η άλλη ονομάζεται Erlang. Οι διάρκειες ζωής τους είναι Τ.Μ. X (για την εκθετική) και Y (για την Erlang) με τις ακόλουθες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 4ye^{-2y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

- (α') (1 μονάδα) Ποιες είναι οι μέσες τιμές των X, Y ;
- (β') (1 μονάδα) Ποιες είναι οι πιθανότητες $P(X > 4)$ και $P(Y > 4)$;
- (γ') (1 μονάδα) Επιλέγουμε μια από τις δύο λάμπες, με πιθανότητα 0.5 την κάθε μία. Οι λάμπες είναι πανομοιότυπες στην εμφάνιση, και επομένως δεν μπορούμε να ξέρουμε ποια επιλέξαμε. Έστω Z η διάρκεια ζωής της τυχαία επιλεγμένης λάμπας. Ποια είναι η κατανομή της Z ;

(δ') (1 μονάδα) Έστω E το ενδεχόμενο να επιλέξαμε την λάμπα Erlang. Με δεδομένο ότι η διάρκεια ζωής της ήταν τελικά μεγαλύτερη από 4, ποια η a posteriori πιθανότητα του ενδεχόμενου E ;

4. (Τσικνοπέμπτη) (2 μονάδες) Ένα σουβλατζίδικο έχει 100 τραπέζια 4 θέσεων. Σε κάθε ένα από αυτά, $i, i = 1, 2, \dots$, κάθεται ένα τυχαίο πλήθος από άτομα X_i για το οποίο ισχύει ότι

$$P(X_i = 2) = \frac{1}{2}, \quad P(X_i = 3) = P(X_i = 4) = \frac{1}{4}.$$

(α') (0.5 μονάδα) Να υπολογίσετε τα $E(X_i)$ και $E(X_i^2)$.

(β') (1 μονάδα) Ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα σε μια μέρα να έρθουν άνω των 280 ατόμων;

(γ') (0.5 μονάδα) Αν ο εστίατορας κάθετε απειλητικά στην είσοδο και δεν αφήνει ομάδες των δύο ατόμων να καθίσουν, αλλά και πάλι γεμίσουν τα τραπέζια, κατά μέσο όρο πόσοι περισσότεροι θα καθίσουν;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$\begin{aligned}
 A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B', \\
 P(A) &\geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\Omega) = 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots, \\
 P(A') &= 1 - P(A), \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A) \leq 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B), \\
 P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad P(A \cup B) \leq P(A) + P(B), \quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap B' \cap C), \\
 P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \quad P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Διατάξεις } k \text{ αντικ. από } N: \frac{N!}{(N-k)!}, \quad \text{Συνδυασμοί } k \text{ αντικ. από } N: \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}, \\
 \text{Επαναληπτικές διατάξεις μήκους } k \text{ από } N \text{ αντικ.: } N^k, \quad \text{Επαναληπτικοί συνδυασμοί } k \text{ αντικ. από } N: \binom{N+k-1}{k} = \binom{N+k-1}{N-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 A_1) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}), \\
 P() &= P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'), \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')}, \\
 P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_N)P(B_N) \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}), \\
 P(B_1|A) &= \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}). \\
 A, B \text{ ανεξάρτητα} &\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B).
 \end{aligned}$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\}) \quad \forall x \in S_X, \quad F_X(x) = P(X \leq x), \quad \lim_{t \rightarrow x^-} F(t) = P(X < x), \quad E(X) = \sum_{x \in S_X} x p_X(x),$$

$$\begin{aligned}
 E(g(X)) &= \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x), \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)), \\
 \sigma^2 &= \text{VAR}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \text{VAR}(aX + b) = a^2 \text{VAR}(X).
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

$$X \sim \text{Bern}(p), \quad p_X(0) = 1-p, \quad p_X(1) = p, \quad E(X) = p, \quad \text{VAR}(X) = p(1-p),$$

$$X \sim \text{Διων}(N, p), \quad p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad E(X) = Np, \quad \text{VAR}(X) = Np(1-p),$$

$$X \sim \text{Γεωμ}(p), \quad p_X(k) = (1-p)^{k-1} p, \quad E(X) = 1/p, \quad \text{VAR}(X) = (1-p)/p^2, \quad P(X \geq m+n | X > n) = P(X \geq m), \quad m \geq 1, n \geq 0,$$

$$X \sim \text{Υπερ}(N, k, n), \quad p_X(m) = \frac{\binom{k}{m} \binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}}, \quad E(X) = \frac{nk}{N}, \quad \text{VAR}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad E(X) = \lambda, \quad \text{VAR}(X) = \lambda.$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in S_X, \quad \forall y \in S_Y, \quad p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{XY}(x, y),$$

$$E(g(X, Y)) = \sum_{x, y} g(x, y) p_{XY}(x, y), \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E\left(\sum_{k=1}^K g_k(X, Y)\right) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X, Y)),$$

$$\text{COV}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y), \quad \text{VAR}(X + Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y) + 2\text{COV}(X, Y),$$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \quad \forall A, B \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x, y,$$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \text{COV}(X, Y) = 0, \quad p_{X+Y}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k)p_Y(m-k), \quad m \in \mathbb{Z},$$

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + b, \quad \text{VAR}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{COV}(X_i, X_j).$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^a f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx, \quad \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_c^t f(x) dx, \\
\int_a^b f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx, \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx, \\
P(X \in B) &= \int_B f(t) dt, \quad P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x) dx, \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad F'(x) = f(x), \\
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx, \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)), \\
\sigma^2 &= \text{VAR}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \text{VAR}(aX + b) = a^2 \text{VAR}(X).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X \sim U[a, b], \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x \in [a, b], \\ 0, & \text{για } x \notin [a, b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \\
X \sim \text{Eκθ}(\theta), \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & \text{για } x \geq 0, \\ 0, & \text{για } x < 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0, \end{cases} \quad E(X) = \theta, \quad \text{VAR}(X) = \theta^2, \\
X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x \in \mathbb{R}, \quad E(X) = \mu, \quad \text{VAR}(X) = \sigma^2, \\
X \sim N(\mu, \sigma^2) &\Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1), \quad P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \\
Z \sim N(0, 1), \quad \phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx, \quad \Phi(x) = 1 - \Phi(-x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R &= \{(x, y) : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx, \\
R &= \{(x, y) : a \leq y \leq b, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy, \\
\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dA &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy, \\
P[(X, Y) \in R] &= \iint_R f_{XY}(x, y) dA, \quad P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f_{XY}(x, y) dA = \left\{ \int_a^b \left(\int_c^d f_{XY}(x, y) dy \right) dx, \right. \\
&\quad \left. \int_c^d \left(\int_a^b f_{XY}(x, y) dx \right) dy \right\}, \\
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx, \quad E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy, \\
E(aX + bY + c) &= aE(X) + bE(Y) + c, \quad E\left(\sum_{k=1}^K g_k(X, Y)\right) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X, Y)), \\
X, Y \text{ ανεξάρτητες} &\Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \quad \forall A, B \Leftrightarrow f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \forall x, y, \\
X, Y \text{ ανεξάρτητες} &\Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \text{COV}(X, Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t) dt, \\
E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) &= \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + b, \quad \text{VAR}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{COV}(X_i, X_j).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X \geq 0, c > 0 &\Rightarrow P(X \geq c) \leq \frac{E(X)}{c}, \quad c > 0 \Rightarrow P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{\text{VAR}(X)}{c^2}, \\
X_1, X_2, \dots \text{ ανεξ. με κοινή κατ.}, \quad E(X_i) &= \mu, \quad \bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, P(|\bar{X}_N - \mu| < \epsilon) \rightarrow 1, & \text{καθώς } N \rightarrow \infty, \\ P(\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{X}_N = \mu) = 1, \end{cases} \\
\text{VAR}(X_i) = \sigma^2, \quad \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu) &= \frac{(\sum_{i=1}^N X_i) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P(a \leq \bar{S}_N \leq b) \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a), & \text{καθώς } N \rightarrow \infty, \\ P(\bar{S}_N \leq a) \rightarrow \Phi(a), & \text{καθώς } N \rightarrow \infty, \\ P(\bar{S}_N \geq a) \rightarrow 1 - \Phi(a), & \text{καθώς } N \rightarrow \infty. \end{cases}
\end{aligned}$$

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Φεβρουαρίου Ακ. Έτους 2022-2023

1. **(Παπουτσοθήκη)** (2 μονάδες) Σε μια παπουτσοθήκη υπάρχουν 15 ζεύγη παπουτσιών, όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Επιλέγουμε στην τύχη, και χωρίς προτίμηση στις επιλογές, 3 αριστερά παπούτσια και 2 δεξιά παπούτσια. Έστω X το πλήθος των πλήρων ζευγαριών που θα βρεθούν μεταξύ των 5 παπουτσιών που θα επιλέξουμε. Παρατηρήστε πως η Τ.Μ. X μπορεί να λάβει τις τιμές $X = 0$ (αν κανένα δεξί παπούτσι δεν είναι ζεύγος με κάποιο από τα αριστερά), $X = 1$ (αν μόνο το ένα από τα δύο δεξιά παπούτσια είναι ζεύγος με κάποιο από τα τρία αριστερά), ή $X = 2$ (αν και τα δύο δεξιά παπούτσια είναι ζεύγη με δύο από τα τρία αριστερά παπούτσια). Να υπολογίσετε τις αντίστοιχες πιθανότητες, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$.

Λύση: Παρατηρήστε πως έχουμε $\binom{15}{3}$ τρόπους για να επιλέξουμε τα τρία αριστερά παπούτσια, και $\binom{15}{2}$ τρόπους για να επιλέξουμε τα δύο δεξιά παπούτσια. Επομένως, $|\Omega| = \binom{15}{3} \times \binom{15}{2}$.

- (α') Σχετικά με την $P(X = 0)$, υπάρχουν $\binom{15}{3}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα τρία αριστερά παπούτσια, και για κάθε έναν από αυτούς, υπάρχουν $\binom{12}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε δύο δεξιά παπούτσια που δεν αντιστοιχούν σε κανένα από τα τρία αριστερά που έχουν επιλεγεί. Επομένως,

$$P(X = 0) = \frac{\binom{15}{3} \binom{12}{2}}{\binom{15}{3} \binom{15}{2}} = \frac{12 \times 11}{15 \times 14} = \frac{22}{35}.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνουμε και αν χρησιμοποιήσουμε δεσμευμένες πιθανότητες.

- (β') Σχετικά με την $P(X = 1)$, έχουμε 15 επιλογές για το ζεύγος που θα επιλεγεί, 14 επιλογές για το επιπλέον δεξί παπούτσι, και $\binom{13}{2}$ επιλογές για τα δύο επιπλέον αριστερά παπούτσια. Επομένως,

$$P(X = 1) = \frac{15 \times 14 \times \binom{13}{2}}{\binom{15}{3} \times \binom{15}{2}} = \frac{12}{35}.$$

- (γ') Σχετικά με την $P(X = 2)$, έχουμε $\binom{15}{2}$ επιλογές για τα δύο ζεύγη, και 13 επιλογές για το τρίτο μονό αριστερό παπούτσι, επομένως

$$P(X = 2) = \frac{\binom{15}{2} \times 13}{\binom{15}{3} \binom{15}{2}} = \frac{1}{35}.$$

Παρατηρήστε πως το άθροισμα των τριών πιθανοτήτων είναι μονάδα, όπως αναμενόταν. Η ιδιότητα αυτή θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ώστε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε από τις τρεις πιθανότητες, αν είχαμε υπολογίσει τις άλλες δύο.

2. **(Τράπουλα)** (1.5 μονάδα) Μια τράπουλα έχει 52 φύλλα, εκ των οποίων 4 άσσους και 4 ρηγάδες. Επιλέγουμε 5 φύλλα, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό. Έστω X το πλήθος από άσσους και Y το πλήθος από ρηγάδες μεταξύ των 5 επιλεγμένων φύλλων. Να δώσετε ένα τύπο για την πιθανότητα $P(X = x, Y = y)$.

Λύση: Υπάρχουν $\binom{52}{5}$ διαφορετικοί συνδυασμοί 5 φύλλων. Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(X = x, Y = y)$, όπου $x, y = 0, 1, 2, 3, 4$ με $x + y \leq 5$, παρατηρούμε πως έχουμε $\binom{4}{x}$ τρόπους για να πάρουμε x άσσους από τους τέσσερις διαθέσιμους, $\binom{4}{y}$ τρόπους για να πάρουμε y ρηγάδες από τους τέσσερις διαθέσιμους, και $\binom{44}{5-x-y}$ τρόπους για να συμπληρώσουμε τα υπόλοιπα φύλλα. Επομένως,

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{\binom{4}{x} \binom{4}{y} \binom{44}{5-x-y}}{\binom{52}{5}}, & x, y = 0, 1, 2, 3, 4, x + y \leq 5, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

3. **(Λάμπες)** Έχουμε στη διάθεσή μας δύο λάμπες, εκ των οποίων η μια ονομάζεται εκθετική και η άλλη ονομάζεται Erlang. Οι διάρκειες ζωής τους είναι Τ.Μ. X (για την εκθετική) και Y (για την Erlang) με τις ακόλουθες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 4ye^{-2y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

- (α') (1 μονάδα) Ποιες είναι οι μέσες τιμές των X, Y ;
- (β') (1 μονάδα) Ποιες είναι οι πιθανότητες $P(X > 4)$ και $P(Y > 4)$;
- (γ') (1 μονάδα) Επιλέγουμε μια από τις δύο λάμπες, με πιθανότητα 0.5 την κάθε μία. Οι λάμπες είναι πανομοιότυπες στην εμφάνιση, και επομένως δεν μπορούμε να ξέρουμε ποια επιλέξαμε. Έστω Z η διάρκεια ζωής της τυχαία επιλεγμένης λάμπας. Ποια είναι η κατανομή της Z ;
- (δ') (1 μονάδα) Έστω E το ενδεχόμενο να επιλέξαμε την λάμπα Erlang. Με δεδομένο ότι η διάρκεια ζωής της ήταν τελικά μεγαλύτερη από 4, ποια η a posteriori πιθανότητα του ενδεχόμενου E ;

Λύση:

- (α') Κατά τα γνωστά από τη θεωρία:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} 2xe^{-2x} dx = \int_0^{\infty} x(-e^{-2x})' dx \\ &= [-xe^{-2x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} (-he^{-2h}) + \frac{1}{2} [e^{-2x}]_0^{\infty} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^{\infty} 4y^2 e^{-2y} dy = \int_0^{\infty} y^2 (-2e^{-2y})' dy \\ &= [-2y^2 e^{-2y}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 4ye^{-2y} dy = \lim_{h \rightarrow \infty} [2h^2 e^{-2h}] + 1 = 1. \end{aligned}$$

Τα άνω όρια προκύπτει πως είναι 0 με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital. Το τελευταίο ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στον υπολογισμό της $E(Y)$ εμφανίζεται και στο πρώτο σκέλος.

- (β') Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= \int_4^{\infty} f_X(x) dx = \int_4^{\infty} 2e^{-2x} dx = \int_4^{\infty} (-e^{-2x})' dx = e^{-8}, \\ P(Y > 4) &= \int_4^{\infty} f_Y(y) dy = \int_4^{\infty} 4ye^{-2y} dy = - \int_4^{\infty} 2y(e^{-2y})' dy, \\ &= [2ye^{-2y}]_4^{\infty} + \int_4^{\infty} 2e^{-2y} dy = 8e^{-8} - \lim_{h \rightarrow \infty} 2he^{-2h} + e^{-8} = 9e^{-8}. \end{aligned}$$

- (γ') Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της ολικής πιθανότητας:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = \frac{1}{2} P(Z \leq z | Z = X) + \frac{1}{2} P(Z \leq z | Z = Y) = \frac{1}{2} P(X \leq z) + \frac{1}{2} P(Y \leq z) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^z 2e^{-2x} dx + \frac{1}{2} \int_0^z 4ye^{-2y} dy = \frac{1}{2} \int_0^z (-e^{-2x})' dx + \frac{1}{2} \left[\int_0^z 2y(-e^{-2y})' dy \right] \\ &= \frac{1}{2} [1 - e^{-2z}] + \left[[ye^{-2y}]_0^z + \int_0^z \left(\frac{-e^{-2y}}{2} \right)' dy \right] \\ &= \frac{1}{2} [1 - e^{-2z}] + \left[-ze^{-2z} + \frac{1}{2} [1 - e^{-2z}] \right] \\ &= \frac{1}{2} [1 - e^{-2z}] - ze^{-2z} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2z} = 1 - e^{-2z} - ze^{-2z}. \end{aligned}$$

- (δ') Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned} P(E | Z > 4) &= \frac{P(E \cap Z > 4)}{P(Z > 4)} = \frac{P(Z > 4 | E) P(E)}{P(Z > 4 | E) P(E) + P(Z > 4 | E') P(E')} \\ &= \frac{\frac{1}{2} P(Y > 4)}{\frac{1}{2} P(Y > 4) + \frac{1}{2} P(X > 4)} = \frac{9e^{-8}}{9e^{-8} + e^{-8}} = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

4. (Τσικνοπέμπτη) (2 μονάδες) Ένα σουβλατζίδικο έχει 100 τραπέζια 4 θέσεων. Σε κάθε ένα από αυτά, $i, i = 1, 2, \dots$, κάθεται ένα τυχαίο πλήθος από άτομα X_i για το οποίο ισχύει ότι

$$P(X_i = 2) = \frac{1}{2}, \quad P(X_i = 3) = P(X_i = 4) = \frac{1}{4}.$$

(α') (0.5 μονάδα) Να υπολογίσετε τα $E(X_i)$ και $E(X_i^2)$.

(β') (1 μονάδα) Ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα σε μια μέρα να έρθουν άνω των 280 ατόμων;

(γ') (0.5 μονάδα) Αν ο εστιάτορας κάθετε απειλητικά στην είσοδο και δεν αφήνει ομάδες των δύο ατόμων να καθίσουν, αλλά και πάλι γεμίσουν τα τραπέζια, κατά μέσο όρο πόσοι περισσότεροι θα καθίσουν;

Λύση:

(α') Έστω X το πλήθος σε κάποιο τραπέζι. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned}E(X) &= 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{4}, \\E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4} = \frac{33}{4}, \\VAR(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{33}{4} - \frac{121}{16} = \frac{132 - 121}{16} = \frac{11}{16}.\end{aligned}$$

(β') Κατά τα γνωστά από Κεντρικό Οριακό Θεώρημα,

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 280\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 275}{10\sqrt{\frac{11}{16}}} > \frac{5}{10\sqrt{\frac{11}{16}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{10\sqrt{\frac{11}{16}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{11}}\right).$$

(γ') Σε αυτή την περίπτωση, η μέση τιμή των ατόμων σε κάθε τραπέζι είναι

$$E(Y) = \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times 4 = \frac{7}{2},$$

δηλαδή $\frac{7}{2} - \frac{11}{4} = \frac{3}{4}$ παραπάνω άτομα ανά τραπέζι. Στο σύνολο, κατά μέσο όρο, αρχικά είχαμε $100 \times \frac{11}{4} = 275$ άτομα, και πλέον έχουμε $100 \times \frac{7}{2} = 350$ άτομα, δηλαδή 75 άτομα επιπλέον.

Οδηγίες

1. Διάρκεια εξέτασης: 120 ΛΕΠΤΑ
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
5. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
6. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
7. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
8. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
9. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Φωτιές)** Σε ένα δάσος θα ξεσπάσει κάθε καλοκαίρι έστω και μία πυρκαγιά με πιθανότητα 0.3, αν την προηγούμενη άνοιξη δεν έχει βρέξει σε αυτό, με πιθανότητα 0.2 αν την προηγούμενη άνοιξη έχει βρέξει σε αυτό 1 φορά, και με πιθανότητα 0.1 αν την προηγούμενη άνοιξη έχει βρέξει σε αυτό 2 φορές. Κάθε άνοιξη σε αυτό το δάσος βρέχει 0, 1, ή 2 φορές με πιθανότητες, αντίστοιχα, 0.3, 0.3, και 0.4.
(α') (1 μονάδα) Με δεδομένο ότι ξέσπασε έστω και μια πυρκαγιά στο δάσος σε ένα καλοκαίρι, ποια η πιθανότητα να είχε βρέξει σε αυτό το δάσος την προηγούμενη άνοιξη 2 φορές;
(β') (1 μονάδα) Δίνεται ότι τα ενδεχόμενα να ξεσπάσει έστω και μια πυρκαγιά σε διαφορετικά έτη είναι ανεξάρτητα. Ποια είναι η μάζα πιθανότητας της Τ.Μ. X που εκφράζει το πλήθος των ετών εντός μιας δεκαετίας κατά τα οποία θα ξεσπάσει έστω μια πυρκαγιά;
2. **(Πλημμύρες)** Το ύψος της στάθμης του Πηνειού κατά τη διάρκεια μίας πλημμύρας είναι Τ.Μ. X με πυκνότητα πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} (10 - x)/50, & x \in [0, 10], \\ 0, & x \notin [0, 10]. \end{cases}$$

Στον Πηνειό βρίσκονται 4 γέφυρες, οι A, B, C, D , οι οποίες θα γίνουν απροσπέλαστες αν το ύψος της στάθμης υπερβεί τα 6, 7, 8, και 9 μέτρα αντίστοιχα.

- (α') (1 μονάδα) Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της Τ.Μ. X ;
- (β') (1 μονάδα) Έστω Y η Τ.Μ. που εκφράζει το πλήθος από τις άνω γέφυρες που θα γίνουν απροσπέλαστες κατά τη διάρκεια μίας πλημμύρας. Ποια είναι η μάζα πιθανότητας της Y ;
3. **(Πανδημίες)** Έστω X το πλήθος των εμβολίων για τη νόσο COVID που έχει κάνει ένα άτομο τυχαία επιλεγμένο από μια ομάδα ατόμων και έστω Y το πλήθος από φορές που έχει νοσήσει το άτομο αυτό. Δίνεται ότι η από κοινού μάζα πιθανότητας των X και Y είναι η ακόλουθη:

x	0	1	2	3
y				
1	1/16	1/16	1/16	1/8
2	1/16	1/8	1/8	1/16
3	1/8	1/16	1/16	1/16

(α') (0.5 μονάδα) Είναι οι T.M. X και Y ανεξάρτητες;

(β') (1 μονάδα) Υπολογίστε την συνδιακύμανση $COV(X, Y)$.

(γ') (0.5 μονάδα) Με δεδομένο ότι ένα άτομο έχει νοσήσει 2 ή 3 φορές, ποια η πιθανότητα να έχει κάνει το πολύ δύο εμβόλια;

(δ') (1 μονάδα) Σε ένα δείγμα 100 ατόμων που περιγράφονται από την άνω από κοινού μάζα πιθανότητας, και για τα οποία τα ζεύγη (X_i, Y_i) και (X_j, Y_j) είναι ανεξάρτητα για $i \neq j$, ποια είναι η ακριβής μάζα του πλήθους Z των ατόμων που έχουν νοσήσει ακριβώς μια φορά και έχουν εμβολιαστεί ακριβώς δύο φορές;

4. **(Σεισμοί)** Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα, κάνοντας όπου χρειάζεται αιτιολογημένες προσεγγίσεις.

(α') (1 μονάδα) Σε έναν οικισμό, A , με 10^4 πέτρινα σπίτια, λόγω ενός σεισμού κάθε σπίτι θα καταρρεύσει με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Ποια είναι η πιθανότητα να καταρρεύσουν το πολύ 2600 σπίτια;

(β') (1 μονάδα) Σε ένα άλλο οικισμό, B , με επίσης 10^4 σπίτια αλλά από τούβλα και τσιμέντο, λόγω ενός σεισμού κάθε σπίτι θα καταρρεύσει με πιθανότητα $\frac{1}{4000}$ ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Ποια είναι η πιθανότητα να καταρρεύσουν το πολύ 3 σπίτια;

(γ') (1 μονάδα) Σε ένα τρίτο οικισμό, C , υπάρχουν επίσης 10^4 σπίτια, αλλά κάθε ένα είναι χτισμένο από πέτρα με πιθανότητα 0.5 ή από τούβλα και τσιμέντο με πιθανότητα 0.5, ανεξάρτητα από τα άλλα. Οι πιθανότητες να καταρρεύσουν λόγω σεισμού τα δύο είδη σπιτιών δίνονται στα προηγούμενα σκέλη. Ποια είναι η πιθανότητα να καταρρεύσουν το πολύ 1300 σπίτια;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$

$$P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\Omega) = 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots,$$

$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A) \leq 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B),$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad P(A \cup B) \leq P(A) + P(B), \quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap B' \cap C),$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \quad P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N : $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N : $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$,
 Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από N αντικ.: N^k , Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N : $\binom{N+k-1}{k} = \binom{N+k-1}{N-1}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 A_1) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}),$$

$$P() = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'), \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')},$$

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_N)P(B_N) \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}),$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}).$$

$$A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B).$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\}) \forall x \in S_X, \quad F_X(x) = P(X \leq x), \quad \lim_{t \rightarrow x^-} F(t) = P(X < x), \quad E(X) = \sum_{x \in S_X} x p_X(x),$$

$$E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x), \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \text{VAR}(aX + b) = a^2 \text{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

$$X \sim \text{Bern}(p), \quad p_X(0) = 1-p, \quad p_X(1) = p, \quad E(X) = p, \quad \text{VAR}(X) = p(1-p),$$

$$X \sim \text{Διων}(N, p), \quad p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad E(X) = Np, \quad \text{VAR}(X) = Np(1-p),$$

$$X \sim \text{Γεωμ}(p), \quad p_X(k) = (1-p)^{k-1} p, \quad E(X) = 1/p, \quad \text{VAR}(X) = (1-p)/p^2, \quad P(X \geq m+n | X > n) = P(X \geq m), \quad m \geq 1, n \geq 0,$$

$$X \sim \text{Υπερ}(N, k, n), \quad p_X(m) = \frac{\binom{k}{m} \binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}}, \quad E(X) = \frac{nk}{N}, \quad \text{VAR}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad E(X) = \lambda, \quad \text{VAR}(X) = \lambda.$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in S_X, \forall y \in S_Y, \quad p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{XY}(x, y),$$

$$E(g(X, Y)) = \sum_{x, y} g(x, y) p_{XY}(x, y), \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E\left(\sum_{k=1}^K g_k(X, Y)\right) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X, Y)),$$

$$\text{COV}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y), \quad \text{VAR}(X + Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y) + 2\text{COV}(X, Y),$$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \quad \forall A, B \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x, y,$$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \text{COV}(X, Y) = 0, \quad p_{X+Y}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k)p_Y(m-k), \quad m \in \mathbb{Z},$$

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + b, \quad \text{VAR}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{COV}(X_i, X_j).$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^a f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx, \quad \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_c^t f(x) dx, \\
\int_a^b f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx, \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx, \\
P(X \in B) &= \int_B f(t) dt, \quad P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x) dx, \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad F'(x) = f(x), \\
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx, \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)), \\
\sigma^2 &= \text{VAR}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \text{VAR}(aX + b) = a^2 \text{VAR}(X).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X \sim U[a, b], \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x \in [a, b], \\ 0, & \text{για } x \notin [a, b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \\
X \sim \text{Eκθ}(\theta), \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & \text{για } x \geq 0, \\ 0, & \text{για } x < 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0, \end{cases} \quad E(X) = \theta, \quad \text{VAR}(X) = \theta^2, \\
X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x \in \mathbb{R}, \quad E(X) = \mu, \quad \text{VAR}(X) = \sigma^2, \\
X \sim N(\mu, \sigma^2) &\Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1), \quad P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \\
Z \sim N(0, 1), \quad \phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx, \quad \Phi(x) = 1 - \Phi(-x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R &= \{(x, y) : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx, \\
R &= \{(x, y) : a \leq y \leq b, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy, \\
\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dA &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy, \\
P[(X, Y) \in R] &= \iint_R f_{XY}(x, y) dA, \quad P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f_{XY}(x, y) dA = \left\{ \int_a^b \left(\int_c^d f_{XY}(x, y) dy \right) dx, \right. \\
&\quad \left. \int_c^d \left(\int_a^b f_{XY}(x, y) dx \right) dy \right\}, \\
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx, \quad E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy, \\
E(aX + bY + c) &= aE(X) + bE(Y) + c, \quad E\left(\sum_{k=1}^K g_k(X, Y)\right) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X, Y)), \\
X, Y \text{ ανεξάρτητες} &\Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \quad \forall A, B \Leftrightarrow f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \forall x, y, \\
X, Y \text{ ανεξάρτητες} &\Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \text{COV}(X, Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t) dt, \\
E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) &= \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + b, \quad \text{VAR}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{COV}(X_i, X_j).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X \geq 0, c > 0 &\Rightarrow P(X \geq c) \leq \frac{E(X)}{c}, \quad c > 0 \Rightarrow P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{\text{VAR}(X)}{c^2}, \\
X_1, X_2, \dots \text{ ανεξ. με κοινή κατ.}, \quad E(X_i) &= \mu, \quad \bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, P(|\bar{X}_N - \mu| < \epsilon) \rightarrow 1, & \text{καθώς } N \rightarrow \infty, \\ P(\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{X}_N = \mu) = 1, \end{cases} \\
\text{VAR}(X_i) = \sigma^2, \quad \bar{S}_N &= \frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu) = \frac{\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P(a \leq \bar{S}_N \leq b) \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a), & \text{καθώς } N \rightarrow \infty, \\ P(\bar{S}_N \leq a) \rightarrow \Phi(a), & \text{καθώς } N \rightarrow \infty, \\ P(\bar{S}_N \geq a) \rightarrow 1 - \Phi(a), & \text{καθώς } N \rightarrow \infty. \end{cases}
\end{aligned}$$

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Σεπτεμβρίου Ακ. Έτους 2022-2023

1. **(Φωτιές)** Σε ένα δάσος θα ξεσπάσει κάθε καλοκαίρι έστω και μία πυρκαγιά με πιθανότητα 0.3, αν την προηγούμενη άνοιξη δεν έχει βρέξει σε αυτό, με πιθανότητα 0.2 αν την προηγούμενη άνοιξη έχει βρέξει σε αυτό 1 φορά, και με πιθανότητα 0.1 αν την προηγούμενη άνοιξη έχει βρέξει σε αυτό 2 φορές. Κάθε άνοιξη σε αυτό το δάσος βρέχει 0, 1, ή 2 φορές με πιθανότητες, αντίστοιχα, 0.3, 0.3, και 0.4.

- (α') (1 μονάδα) Με δεδομένο ότι ξέσπασε έστω και μια πυρκαγιά στο δάσος σε ένα καλοκαίρι, ποια η πιθανότητα να είχε βρέξει σε αυτό το δάσος την προηγούμενη άνοιξη 2 φορές;
- (β') (1 μονάδα) Δίνεται ότι τα ενδεχόμενα να ξεσπάσει έστω και μια πυρκαγιά σε διαφορετικά έτη είναι ανεξάρτητα. Ποια είναι η μάζα πιθανότητας της Τ.Μ. X που εκφράζει το πλήθος των ετών εντός μιας δεκαετίας κατά τα οποία θα ξεσπάσει έστω μια πυρκαγιά;

Λύση:

- (α') Έστω B το ενδεχόμενο να ξεσπάσει πυρκαγιά και R_0, R_1, R_2 τα ενδεχόμενα να έχει βρέξει 0, 1 ή 2 φορές την προηγούμενη άνοιξη. Χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του Bayes, θα έχουμε

$$P(R_2|B) = \frac{P(B|R_2)P(R_2)}{P(B|R_0)P(R_0) + P(B|R_1)P(R_1) + P(B|R_2)P(R_2)}$$

$$= \frac{0.1 \times 0.4}{0.3 \times 0.3 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.4} = \frac{4}{19}.$$

- (β') Η πιθανότητα να ξεσπάσει έστω και μια πυρκαγιά σε ένα καλοκαίρι είναι

$$P(B) = P(B|R_0)P(R_0) + P(B|R_1)P(R_1) + P(B|R_2)P(R_2) = 0.19.$$

Επειδή τα ενδεχόμενα να ξεσπάσει πυρκαγιά είναι ανεξάρτητα, το πλήθος των ετών είναι διωνυμικά κατανομημένο, με πλήθος πειραμάτων $N = 10$ και πιθανότητα επιτυχίας $p = P(B) = 0.19$.

2. **(Πλημμύρες)** Το ύψος της στάθμης του Πηνειού κατά τη διάρκεια μίας πλημμύρας είναι Τ.Μ. X με πυκνότητα πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, & x \in [0, 10], \\ 0, & x \notin [0, 10]. \end{cases}$$

Στον Πηνειό βρίσκονται 4 γέφυρες, οι A, B, C, D , οι οποίες θα γίνουν απροσπέλαστες αν το ύψος της στάθμης υπερβεί τα 6, 7, 8, και 9 μέτρα αντίστοιχα.

- (α') (1 μονάδα) Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της Τ.Μ. X ;
- (β') (1 μονάδα) Έστω Y η Τ.Μ. που εκφράζει το πλήθος από γέφυρες που θα γίνουν απροσπέλαστες κατά τη διάρκεια μίας πλημμύρας. Ποια είναι η μάζα πιθανότητας της Y ?

Λύση:

- (α') Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$E(X) = \int_0^{10} \frac{10-x}{50} x dx = \int_0^{10} \left(\frac{10x}{50} - \frac{x^2}{50} \right) dx = \int_0^{10} \left(\frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{150} \right)' dx = \frac{100}{10} - \frac{1000}{150} = \frac{10}{3}.$$

- (β') Το πλήθος των γεφυρών που θα γίνουν απροσπέλαστες είναι από 0 έως και 4. Οι πιθανότητες να συμβούν τα

αντίστοιχα ενδεχόμενα είναι

$$\begin{aligned}P(Y = 0) &= \int_0^6 \frac{10-x}{50} dx = \left[\frac{x}{5} - \frac{x^2}{100} \right]_0^6 = \frac{84}{100}, \\P(Y = 1) &= \int_6^7 \frac{10-x}{50} dx = \left[\frac{x}{5} - \frac{x^2}{100} \right]_6^7 = \frac{7}{100}, \\P(Y = 2) &= \int_7^8 \frac{10-x}{50} dx = \left[\frac{x}{5} - \frac{x^2}{100} \right]_7^8 = \frac{5}{100}, \\P(Y = 3) &= \int_8^9 \frac{10-x}{50} dx = \left[\frac{x}{5} - \frac{x^2}{100} \right]_8^9 = \frac{3}{100}, \\P(Y = 4) &= \int_9^{10} \frac{10-x}{50} dx = \left[\frac{x}{5} - \frac{x^2}{100} \right]_9^{10} = \frac{1}{100}.\end{aligned}$$

3. **(Πανδημίες)** Έστω X το πλήθος των εμβολίων για τη νόσο COVID που έχει κάνει ένα άτομο τυχαία επιλεγμένα από μια ομάδα ατόμων και έστω Y το πλήθος από φορές που έχει νοσήσει. Δίνεται ότι η από κοινού μάζα πιθανότητας των X και Y είναι η ακόλουθη:

x	0	1	2	3
y				
1	1/16	1/16	1/16	1/8
2	1/16	1/8	1/8	1/16
3	1/8	1/16	1/16	1/16

- (α') (0.5 μονάδα) Είναι οι T.M. X και Y ανεξάρτητες;
 (β') (1 μονάδα) Υπολογίστε την συνδιακύμανση $\text{COV}(X, Y)$.
 (γ') (0.5 μονάδα) Με δεδομένο ότι ένα άτομο έχει νοσήσει 2 ή 3 φορές, ποια η πιθανότητα να έχει κάνει το πολύ δύο εμβόλια;
 (δ') (1 μονάδα) Σε ένα δείγμα 100 ατόμων που περιγράφονται από την άνω από κοινού μάζα πιθανότητας, και για τα οποία τα ζεύγη (X_i, Y_i) και (X_j, Y_j) είναι ανεξάρτητα για $i \neq j$, ποια είναι η ακριβής μάζα του πλήθους Z των ατόμων που έχουν νοσήσει ακριβώς μια φορά και έχουν εμβολιαστεί ακριβώς δύο φορές;

Λύση: Παρατηρούμε, καταρχάς, πως

$$\begin{aligned}P(X = 0) &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, & P(X = 1) &= \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}, \\P(X = 2) &= \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}, & P(X = 3) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}, \\P(Y = 1) &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16}, & P(Y = 2) &= \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}, \\P(Y = 3) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16},\end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned}E(X) &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}, \\E(Y) &= 1 \times \frac{5}{16} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{5}{16} = 2.\end{aligned}$$

- (α') Για να είναι οι X, Y ανεξάρτητες, θα πρέπει για κάθε συνδυασμό (x, y) όπου $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ και $y \in \{1, 2, 3\}$, να ισχύει

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Όμως αυτό δεν ισχύει, για διάφορους συνδυασμούς των x, y . Για παράδειγμα, $P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{16}$, ενώ $P(X = 0)P(Y = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{5}{16} = \frac{5}{64}$.

(β') Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=0,1,2,3, y=1,2,3} xyP(X=x, Y=y) \\ &= 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{1}{16} \\ &\quad + 6 \times \frac{1}{16} + 9 \times \frac{1}{16} = \frac{45}{16}, \\ \text{COV}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{3}{16}. \end{aligned}$$

(γ') Έστω A το ενδεχόμενο το άτομο να νοσήσει 2 ή 3 φορές, και B το ενδεχόμενο να έχει κάνει το πολύ δύο εμβόλια. Κατά τα γνωστά για τη δεσμευμένη πιθανότητα,

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(X=0, 1, 2, Y=2, 3)}{P(Y=2) + P(Y=3)} = \frac{3 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{1}{8}}{\frac{3}{8} + \frac{5}{16}} = \frac{9}{11}.$$

(δ') Ένα άτομο θα νοσήσει ακριβώς μια φορά και θα εμβολιαστεί ακριβώς δύο φορές με πιθανότητα $P(X=2, Y=1) = \frac{1}{16}$. Επειδή τα διαφορετικά ζεύγη των (X_i, Y_i) είναι ανεξάρτητα, προκύπτει πως η Z ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N=100$ και $p = \frac{1}{16}$.

4. **(Σεισμοί)** Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα, κάνοντας όπου χρειάζεται αιτιολογημένες προσεγγίσεις.

- (α') (1 μονάδα) Σε έναν οικισμό, A , με 10^4 πέτρινα σπίτια, λόγω ενός σεισμού κάθε σπίτι θα καταρρεύσει με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Ποια είναι η πιθανότητα να καταρρεύσουν το πολύ 2600 σπίτια;
- (β') (1 μονάδα) Σε ένα άλλο οικισμό, B , με επίσης 10^4 σπίτια αλλά από τούβλα και τσιμέντο, λόγω ενός σεισμού κάθε σπίτι θα καταρρεύσει με πιθανότητα $\frac{1}{4000}$ ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Ποια είναι η πιθανότητα να καταρρεύσουν το πολύ 3 σπίτια;
- (γ') (1 μονάδα) Σε ένα τρίτο οικισμό, C , με επίσης 10^4 σπίτια, αλλά κάθε ένα είναι χτισμένο από πέτρα με πιθανότητα 0.5 ή από τούβλα και τσιμέντο με πιθανότητα 0.5, ανεξάρτητα από τα άλλα. Οι πιθανότητες να γκρεμιστούν λόγω σεισμού τα δύο είδη σπιτιών δίνονται στα προηγούμενα σκέλη. Ποια είναι η πιθανότητα να γκρεμιστούν το πολύ 1300 σπίτια;

Λύση:

(α') Έστω $X_i, i=1, \dots, 10000$, T.M. Bernoulli που ισούται με 1 αν γκρεμιστεί το αντίστοιχο σπίτι, και 0 αλλιώς. Έχουμε $\mu = E(X_i) = \frac{1}{4}$ και $\sigma^2 = \text{VAR}(X_i) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$. Χρησιμοποιώντας το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα,

$$P\left(\sum_{i=1}^{10^4} X_i < 2600\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{10^4} X_i - 10^4\mu}{\sqrt{10^4\sigma^2}} < \frac{2600 - 10^4\mu}{\sqrt{10^4\sigma^2}}\right) \simeq \Phi\left(\frac{100}{100\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right).$$

(β') Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε $N = 10^4$ ανεξάρτητα πειράματα καθένα με επιτυχία (δηλαδή να γκρεμιστεί το σπίτι) $p = \frac{1}{4000}$, επομένως $Np = 2.5$, που είναι κοντά στη μονάδα, επομένως το πλήθος των σπιτιών που θα γκρεμιστούν ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = Np = 2.5$, και η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{3!}\lambda^3\right) \simeq 0.2138.$$

(γ') Έστω τυχαία επιλεγμένο σπίτι. Έστω A το ενδεχόμενο να γκρεμιστεί, και έστω B το ενδεχόμενο να είναι από πέτρα. Θα έχουμε, από τον κανόνα της ολικής πιθανότητας,

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B') = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4000} \times \frac{1}{2} \simeq \frac{1}{8}.$$

Παρόμοια με το πρώτο σκέλος, έστω $X_i, i=1, \dots, 10000$, T.M. Bernoulli που ισούται με 1 αν γκρεμιστεί το αντίστοιχο σπίτι, και 0 αλλιώς. Έχουμε, σε αυτό το σκέλος $\mu = E(X_i) = \frac{1}{8}$ και $\sigma^2 = \text{VAR}(X_i) = \frac{1}{8} \times \frac{7}{8}$. Χρησιμοποιώντας το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα,

$$P\left(\sum_{i=1}^{10^4} X_i < 1300\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{10^4} X_i - 10^4\mu}{\sqrt{10^4\sigma^2}} < \frac{1300 - 10^4\mu}{\sqrt{10^4\sigma^2}}\right) \simeq \Phi\left(\frac{50}{100\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\right).$$