ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2021
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες

1. Διάρκεια εξέτασης: 100 ΛΕΠΤΑ
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
5. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
6. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
7. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
8. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
9. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Μεταλλάξεις)** Σε ένα πληθυσμό ατόμων που είναι όλοι θετικοί στον κορωνοϊό, 40% έχουν την μετάλλαξη A του κορωνοϊού, 30% έχουν τη μετάλλαξη B, 20% έχουν τη μετάλλαξη C, και 10% έχουν τη μετάλλαξη D. Δεν μπορεί κάποιος να έχει πάνω από μια μετάλλαξη. Είναι επίσης γνωστό ότι όσοι έχουν τη μετάλλαξη A αναπτύσσουν μακροχρόνιες καρδιοπάθειες με ποσοστό 10%, ενώ τα αντίστοιχα ποσοστά για τις μεταλλάξεις B, C, και D είναι 15%, 20%, και 25%.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο άτομο από τον άνω πληθυσμό να αναπτύξει μακροχρόνιες καρδιοπάθειες;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Με δεδομένο ότι ένα άτομο, επιλεγμένο τυχαία από τον άνω πληθυσμό, ανέπτυξε μακροχρόνια καρδιοπάθεια, ποια είναι η πιθανότητα να έχει κολλήσει τη μετάλλαξη D;

2. **(Εξεταστική)** Δύο φίλοι, ο A και ο B, συμμετέχουν στην εξεταστική του Τμήματος Πληροφορικής, η οποία αποτελείται από τις εξετάσεις 30 μαθημάτων. Ο A θα δώσει 5 μαθήματα και ο B θα δώσει 10 μαθήματα. Κάθε φίλος θα επιλέξει να δώσει μαθήματα χωρίς προτίμηση σε συγκεκριμένο συνδυασμό μαθημάτων, και ανεξάρτητα από τον άλλο. Έστω X το πλήθος των μαθημάτων που θα επιλεγούν και από τον ένα και από τον άλλο φίλο, δηλαδή θα τα δώσουν και οι δύο.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την μάζα πιθανότητας της Τ.Μ. X.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την μέση τιμή της X, $E(X)$.

3. **(Τένις)** Οι αντίπαλοι παίκτες A και B παίζουν έναν αγώνα τένις, που διεξάγεται σε διαδοχικά σετ, που έχουν πάντα ένα νικητή (δεν προβλέπεται ισοπαλία). Ο παίκτης A κερδίζει το κάθε σετ με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Αν ο αγώνας λήξει μόλις ένας παίκτης κερδίσει συνολικά (και όχι απαραίτητα συνεχόμενα) 3 σετ, τότε ποια είναι η πιθανότητα να τελειώσει ο αγώνας με αποτέλεσμα $3-2$ στα σετ με νικητή τον παίκτη A;

(β′) *(1 μονάδα)* Πιο γενικά, αν ο αγώνας λήξει μόλις ένας παίκτης κερδίσει συνολικά (και όχι απαραίτητα συνεχόμενα) N σετ, τότε ποια είναι η πιθανότητα να τελειώσει ο αγώνας με αποτέλεσμα $N-k$ στα σετ με νικητή τον παίκτη A; Εδώ οι N, k είναι φυσικοί αριθμοί με $N > k$ που είναι άγνωστοι, επομένως η απάντηση πρέπει να δοθεί συναρτήσει αυτών.

Παρατηρήστε ότι και στα δύο σκέλη, το τελευταίο σετ πρέπει να το έχει κερδίσει ο παίκτης A, βάσει των άνω κανόνων.

4. **(Υπολογισμός Παραμέτρων)** Δίνεται συνεχής Τ.Μ. X με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} \frac{Ax}{x^2+1}, & 0 \leq x \leq B, \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases}$$

όπου οι A, B είναι άγνωστοι πραγματικοί θετικοί αριθμοί. Δίνεται επίσης ότι $P(X \leq 1) = \frac{1}{2}$.

(α′) *(0.5 μονάδα)* Αποδείξτε ότι δεν γίνεται να έχουμε $B \leq 1$.

(β′) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τις τιμές των A, B.

(γ′) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την μέση τιμή $E(X)$.

5. **(Κρουαζιερόπλοιο)** Έστω κρουαζιερόπλοιο με συνολικά $N = 10^4$ επιβάτες, στο οποίο έχει ξεσπάσει επιδημία κορωνοϊού.

(α′) *(1.5 μονάδα)* Σήμερα, καθένας από τους επιβάτες έχει κορωνοϊό ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους με πιθανότητα $p = 0.6$. Πόσες θέσεις νοσηλείας πρέπει να έχει ελεύθερες ένα νοσοκομείο ώστε με πιθανότητα 0.99 να μπορέσουν να νοσηλευτούν όλοι οι επιβάτες που έχουν τον κορωνοϊό;

(β′) *(0.5 μονάδα)* Αύριο, καθένας από τους επιβάτες θα έχει κορωνοϊό με πιθανότητα $p' = 0.6005$, επίσης ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Επίσης, όσοι έχουν σήμερα κορωνοϊό, θα έχουν και αύριο. Ποια είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας των *επιπλέον* ατόμων X που θα έχουν μολυνθεί από σήμερα μέχρι αύριο;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),\quad (A\cup B)'=A'\cap B',\quad (A\cap B)'=A'\cup B',$$
$$P(A)\geq 0\,\forall A\in\mathcal{F},\quad P(\Omega)=1,\quad A_i\cap A_j=\emptyset\Rightarrow P({}_1\cup{}_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots,$$
$$P(A')=1-P(A),\quad P(\emptyset)=0,\quad P(A)\leq 1,\quad A\subseteq B\Rightarrow P(A)\leq P(B),\quad P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B),$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B),\ P(A\cup B)\leq P(A)+P(B),\ P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(A'\cap B)+P(A'\cap B'\cap C),$$
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C),\ P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k}=\frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k, Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N+k-1}{k}=\binom{N+k-1}{-1}$.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}),$$
$$P()=P(A|B)P(B)+P(A|B')P(B'),\quad P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B')P(B')},$$
$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_N)P(B_N)\quad (\{B_i\}\text{ διαμέριση}),$$
$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_N)P(B_N)}\quad (\{B_i\}\text{ διαμέριση}).$$
$$A,B\text{ ανεξάρτητα}\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(B)=P(B|A)\Leftrightarrow P(A)=P(A|B).$$

$$p_X(x)=P(X=x)=P(\{\omega:X(\omega)=x\})\,\forall x\in S_X,\quad F_X(x)=P(X\leq x),\quad \lim_{t\to x^-}F(t)=P(X<x),\quad E(X)=\sum_{x\in S_X}xp_X(x),$$
$$E(g(X))=\sum_{x\in S_X}g(x)p_X(x),\quad E(aX+b)=aE(X)+b,\quad E(\sum_{i=1}^n a_ig_i(X))=\sum_{i=1}^n a_iE(g_i(X)),$$
$$\sigma^2=\mathrm{VAR}(X)=E\big[(X-\mu)^2\big]=E(X^2)-(E(X))^2,\quad \mathrm{VAR}(aX+b)=a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^\infty x^k=\frac{1}{1-x},\quad \sum_{k=0}^\infty kx^k=\frac{x}{(1-x)^2},\quad \sum_{k=0}^\infty {}^2x^k=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3},\ e^x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!},\quad (a+b)^n=\sum_{i=0}^n\binom{n}{i}a^ib^{n-i}.$$
$$X\sim\text{Bern}(p),\quad p_X(0)=1-p,\ p_X(1)=p,\ E(X)=p,\ \mathrm{VAR}(X)=p(1-p),$$
$$X\sim\text{Διων}(N,p),\ p_X(k)=\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k},\ E(X)=Np,\ \mathrm{VAR}(X)=Np(1-p),$$
$$X\sim\text{Γεωμ}(p),\ p_X(k)=(1-p)^{k-1}p,\ E(X)=1/p,\ \mathrm{VAR}(X)=(1-p)/p^2,\ P(X\geq m+n|X>n)=P(X\geq m),\ m\geq 1,n\geq 0,$$
$$X\sim\text{Υπερ}(N,k,n),\ p_X(m)=\frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}},\ E(X)=\frac{nk}{N},\ \mathrm{VAR}(X)=\frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$
$$X\sim\text{Poisson}(\lambda),\ p_X(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ E(X)=\lambda,\ \mathrm{VAR}(X)=\lambda.$$

$$p_{XY}(x,y)=P(X=x,Y=y)\quad\forall x\in S_X,\,\forall y\in S_Y,\quad p_X(x)=\sum_{y\in S_Y}p_{XY}(x,y),\quad p_Y(y)=\sum_{x\in S_X}p_{XY}(x,y),$$
$$E(g(X,Y))=\sum_{x,y}g(x,y)p_{XY}(x,y),\quad E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c,\quad E(\sum_{k=1}^K g_k(X,Y))=\sum_{k=1}^K E(g_k(X,Y)),$$
$$\mathrm{COV}(X,Y)=E\big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\big]=E(XY)-E(X)E(Y),\ \mathrm{VAR}(X+Y)=\mathrm{VAR}(X)+\mathrm{VAR}(Y)+2\mathrm{COV}(X,Y),$$
$$X,Y\text{ ανεξάρτητες}\Leftrightarrow P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B)\,\forall A,B\Leftrightarrow p_{XY}(x,y)=p_X(x)p_Y(y)\,\forall x,y,$$
$$X,Y\text{ ανεξάρτητες}\Rightarrow E(g(X)h(Y))=E(g(X))E(h(Y)),\quad \mathrm{COV}(X,Y)=0,\quad p_{X+Y}(m)=\sum_{k=-\infty}^\infty p_X(k)p_Y(m-k),\ m\in\mathbb{Z},$$
$$E(\sum_{i=1}^n a_iX_i+b)=\sum_{i=1}^n a_iE(X_i)+b,\quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n\mathrm{VAR}(X_i)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx, \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t} f(x)\,dx,$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_B f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_a^b f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b], \\ 0, & \text{για } x\notin[a,b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0, \\ 0, & \text{για } x<0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0, \end{cases} \quad E(X) = \theta, \quad \mathrm{VAR}(X) = \theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X) = \mu, \quad \mathrm{VAR}(X) = \sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y) : a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx,$$

$$R = \{(x,y) : a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy,$$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases} \int_a^b \Big(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\Big)\,dx, \\ \int_c^d \Big(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\Big)\,dy, \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X,Y)),$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c) \le \frac{E(X)}{c}, \qquad c>0 \Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c) \le \frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1, X_2, \ldots \text{ ανεξ. με κοινή κατ.}, \ E(X_i) = \mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N = \mu\big) = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i) = \sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu) = \frac{\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P\big(a\le\bar{S}_N\le b\big)\to\Phi(b)-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty. \end{cases}$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2020-2021
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Ιουνίου Ακ. Έτους 2020-2021

1. **(Μεταλλάξεις)** Σε ένα πληθυσμό ατόμων που είναι όλοι θετικοί στον κορωνοϊό, 40% έχουν την μετάλλαξη A του κορωνοϊού, 30% έχουν τη μετάλλαξη B, 20% έχουν τη μετάλλαξη C, και 10% έχουν τη μετάλλαξη D. Δεν μπορεί κάποιος να έχει πάνω από μια μετάλλαξη. Είναι επίσης γνωστό ότι όσοι έχουν τη μετάλλαξη A αναπτύσσουν μακροχρόνιες καρδιοπάθειες με ποσοστό 10%, ενώ τα αντίστοιχα ποσοστά για τις μεταλλάξεις B, C, και D είναι 15%, 20%, και 25%.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο άτομο από τον άνω πληθυσμό να αναπτύξει μακροχρόνιες καρδιοπάθειες;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Με δεδομένο ότι ένα άτομο, επιλεγμένο τυχαία από τον άνω πληθυσμό, ανέπτυξε μακροχρόνια καρδιοπάθεια, ποια είναι η πιθανότητα να έχει κολλήσει τη μετάλλαξη D;

   Λύση: Έστω ένα τυχαία επιλεγμένο άτομο από τον άνω πληθυσμό, και έστω A, B, C, D τα ενδεχόμενα το άτομο αυτό να έχει κολλήσει τη μετάλλαξη A, B, C, D, αντίστοιχα. Έστω επίσης M το ενδεχόμενο να αναπτύξει το άτομο μακροχρόνιες καρδιοπάθειες. Μας έχουν δοθεί τα ακόλουθα δεδομένα:

$$P(A) = 0.4, \quad P(B) = 0.3, \quad P(C) = 0.2, \quad P(D) = 0.1,$$
$$P(M|A) = 0.1, \quad P(M|B) = 0.15, \quad P(M|C) = 0.2, \quad P(M|D) = 0.25.$$

   (α΄) Βάσει των άνω δεδομένων, και με χρήση του Κανόνα της Ολικής Πιθανότητας,

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B) + P(M|C)P(C) + P(M|D)P(D) \\ &= 0.1 \times 0.4 + 0.15 \times 0.3 + 0.2 \times 0.2 + 0.25 \times 0.1 = 0.15. \end{aligned}$$

   (β΄) Εφαρμόζοντας τον Κανόνα του Bayes,

$$P(D|M) = \frac{P(MD)}{P(M)} = \frac{P(M|D)P(D)}{P(M)} = \frac{0.25 \times 0.1}{0.15} = \frac{1}{6}.$$

2. **(Εξεταστική)** Δύο φίλοι, ο A και ο B, συμμετέχουν στην εξεταστική του Τμήματος Πληροφορικής, η οποία αποτελείται από τις εξετάσεις 30 μαθημάτων. Ο A θα δώσει 5 μαθήματα και ο B θα δώσει 10 μαθήματα. Κάθε φίλος θα επιλέξει να δώσει μαθήματα χωρίς προτίμηση σε συγκεκριμένο συνδυασμό μαθημάτων, και ανεξάρτητα από τον άλλο. Έστω X το πλήθος των μαθημάτων που θα επιλεγούν και από τον ένα και από τον άλλο φίλο, δηλαδή θα τα δώσουν και οι δύο.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την μάζα πιθανότητας της Τ.Μ. X.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την μέση τιμή της X, $E(X)$.

   Λύση:

   (α΄) Παρατηρούμε καταρχάς πως η X μπορεί να λάβει τις τιμές $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Ας επικεντρωθούμε στον παίκτη A. Ο παίκτης A θα επιλέξει έναν από τους $\binom{30}{5}$ συνδυασμούς μαθημάτων χωρίς κάποια προτίμηση. Έστω x μια από τις άνω τιμές που μπορεί να λάβει η Τ.Μ. X. Θα έχουμε $X = x$ αν ο φοιτητής A επιλέξει x από τα 10 μαθήματα που θα επιλέξει και ο φοιτητής B, κάτι που μπορεί να γίνει με $\binom{10}{x}$ συνδυασμούς, και επίσης επιλέξει $5 - x$ μαθήματα από τα 20 μαθήματα που δεν θα επιλέξει ο φοιτητής B, κάτι που μπορεί να γίνει με $\binom{20}{5-x}$ συνδυασμούς. Επομένως,

$$p_X(x) = P(X = x) = \frac{\binom{10}{x}\binom{20}{5-x}}{\binom{30}{5}}.$$

   (β΄) Έστω X_i, $i = 1, \ldots, 30$ Τ.Μ. Bernoulli οι οποίες είναι 1 αν το μάθημα i επιλεγεί και από τους δύο φοιτητές, και μηδέν αλλού. Επομένως, $E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{10}{30} \times \frac{5}{30}$. Έχουμε

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = 30 \times \frac{10}{30} \times \frac{5}{30} = \frac{5}{3}.$$

3. **(Τένις)** Οι παίκτες A και B παίζουν έναν αγώνα τένις, που διεξάγεται σε διαδοχικά σετ, που έχουν πάντα ένα νικητή (δεν προβλέπεται ισοπαλία). Ο παίκτης A κερδίζει το κάθε σετ με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Αν ο αγώνας λήξει μόλις ένας παίκτης κερδίσει συνολικά (και όχι απαραίτητα συνεχόμενα) 3 σετ, τότε ποια είναι η πιθανότητα να τελειώσει ο αγώνας με αποτέλεσμα $3-2$ στα σετ με νικητή τον παίκτη A;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Πιο γενικά, αν ο αγώνας λήξει μόλις ένας παίκτης κερδίσει συνολικά (και όχι απαραίτητα συνεχόμενα) N σετ, τότε ποια είναι η πιθανότητα να τελειώσει ο αγώνας με αποτέλεσμα $N-k$ στα σετ με νικητή τον παίκτη A; Εδώ οι N, k είναι φυσικοί αριθμοί με $N > k$ που είναι άγνωστοι, επομένως η απάντηση πρέπει να δοθεί συναρτήσει αυτών.

   Παρατηρήστε ότι και στα δύο σκέλη, το τελευταίο σετ πρέπει να το έχει κερδίσει ο παίκτης A, βάσει των άνω κανόνων.

   Λύση:

   (α΄) Παρατηρήστε ότι υπάρχουν 6 τρόποι για να εξελιχθεί το παιχνίδι ώστε το τελικό σκορ να είναι $3-2$:

   $$BBAAA, \quad BABAA, \quad BAABA, \quad ABBAA, \quad ABABA, \quad AABBA.$$

   Για παράδειγμα, στην πρώτη περίπτωση, ο παίκτης B κερδίζει τα πρώτα 2 σετ και χάνει τα άλλα 3. Κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις έχει πιθανότητα $(1-p)^2p^3$, επομένως εν τέλει η ζητούμενη πιθανότητα είναι $6p^3(1-p)^2$.

   (β΄) Σε αυτή τη γενικότερη περίπτωση, παρατηρούμε ότι το τελικό σκορ θα είναι $N-k$ αν και μόνο αν ο παίκτης A κερδίσει ακριβώς $N-1$ από τα πρώτα $N+k-1$ σετ, κάτι που γίνεται με πιθανότητα $\binom{N+k-1}{N-1}p^{N-1}(1-p)^k$, και κατόπιν κερδίσει το σετ $N+k$, κάτι που γίνεται με πιθανότητα p. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

   $$\binom{N+k-1}{N-1}p^N(1-p)^k.$$

4. **(Υπολογισμός Παραμέτρων)** Δίνεται συνεχής Τ.Μ. X με πυκνότητα

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{Ax}{x^2+1}, & 0 \le x \le B, \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases}$$

   όπου οι A, B είναι άγνωστοι πραγματικοί θετικοί αριθμοί. Δίνεται επίσης ότι $P(X \le 1) = \frac{1}{2}$.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Αποδείξτε ότι δεν γίνεται να έχουμε $B \le 1$;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τις τιμές των A, B.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την μέση τιμή $E(X)$.

   Λύση:

   (α΄) Σε αυτή την περίπτωση, θα είχαμε αναγκαστικά $P(X \le \frac{1}{2}) = 1$, επομένως η περίπτωση πρέπει να αποκλειστεί.

   (β΄) Παρατηρούμε πως

   $$P(X \le 1) = \int_0^1 \frac{Ax}{x^2+1}\,dx = \frac{A}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{A}{2}\left[\log(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{A}{2}\log 2,$$

   επομένως $A = (\log 2)^{-1}$. Για να υπολογίσουμε την τιμή της παραμέτρου B παρατηρούμε πως

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^B \frac{Ax\,dx}{x^2+1} = \left[\frac{A}{2}\log(x^2+1)\right]_0^B = \frac{A}{2}\log(B^2+1),$$

   και ακολούθως έχουμε

   $$\frac{A}{2}\log(B^2+1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log(B^2+1) = \log 2 \Leftrightarrow \sqrt{B^2+1} = 2 \Leftrightarrow B = \sqrt{3}.$$

   (γ΄) Έχουμε

   $$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^B \frac{Ax^2}{x^2+1}\,dx = \int_0^B \frac{A(x^2+1-1)}{x^2+1}\,dx = \int_0^B A dx - A\int_0^B \frac{dx}{x^2+1} \\ &= AB - A\left[\arctan x\right]_0^B = AB - A\arctan B = \frac{\sqrt{3}-\arctan\sqrt{3}}{\log 2} = \frac{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}}{\log 2}. \end{aligned}$$

5. **(Κρουαζιερόπλοιο)** Έστω κρουαζιερόπλοιο με συνολικά $N = 10^4$ επιβάτες, στο οποίο έχει ξεσπάσει επιδημία κορωνοϊού.

   (α΄) *(1.5 μονάδα)* Σήμερα, καθένας από τους επιβάτες έχει κορωνοϊό ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους με πιθανότητα $p = 0.6$. Πόσες θέσεις νοσηλείας πρέπει να έχει ελεύθερες ένα νοσοκομείο ώστε με πιθανότητα 0.99 να μπορέσουν να νοσηλευτούν όλοι οι επιβάτες που έχουν τον κορωνοϊό;

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Αύριο, καθένας από τους επιβάτες θα έχει κορωνοϊό με πιθανότητα $p' = 0.6005$, επίσης ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Επίσης, όσοι έχουν σήμερα κορωνοϊό, θα έχουν και αύριο. Ποια είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας των *επιπλέον* ατόμων X που θα έχουν μολυνθεί από σήμερα μέχρι αύριο;

   Λύση:

   (α΄) Έστω K οι απαιτούμενες θέσεις νοσηλείας. Έστω, επίσης, X_i, $i = 1, \ldots, N$ T.M. Bernoulli οι οποίες είναι 1 όταν ο επιβάτης i έχει τον κορωνοϊό και 0 αλλιώς. Έχουμε $E(X_i) = p$ και $\text{VAR}(X_i) = p(1-p)$. Απαιτείται

$$P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i < K\right) > 0.99 \Leftrightarrow P\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - pN}{\sqrt{Np(1-p)}} < \frac{K - pN}{\sqrt{Np(1-p)}}\right) > 0.99 \Leftrightarrow P(Z < A) > 0.99.$$

   Στην άνω, $A = \frac{K-Np}{\sqrt{Np(1-p)}}$, και η $Z \sim N(0,1)$. Η τελευταία ισοδυναμία ισχύει προσεγγιστικά και προέκυψε με χρήση του Κ.Ο.Θ. Επομένως,

$$\begin{aligned} P(Z < A) > 0.99 &\Leftrightarrow \Phi(A) > 0.99 \Leftrightarrow A > \Phi^{-1}(0.99) \Leftrightarrow K - Np > \sqrt{Np(1-p)}\Phi^{-1}(0.99) \\ &\Leftrightarrow K > Np + \sqrt{Np(1-p)}\Phi^{-1}(0.99) \Leftrightarrow K > 6000 + 10\sqrt{24}\Phi^{-1}(0.99) \Leftrightarrow K > 6113.96..., \end{aligned}$$

   και επειδή πρέπει το K να είναι ακέραιο, προκύπτει πως απαιτούνται 6114 θέσεις νοσηλείας.

   (β΄) Έστω το άτομο i. Έστω A το ενδεχόμενο το άτομο αυτό να έχει σήμερα τον κορωνοϊό, και έστω B το ενδεχόμενο να έχει αύριο τον κορωνοϊό. Παρατηρήστε πως $A \subseteq B$ και πως η πιθανότητα να απέκτησε το συγκεκριμένο άτομο τον κορωνοϊό είναι

$$P(A'B) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A) = 0.005.$$

   Ο κάθε επιβάτης θα μολυνθεί, επομένως, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, με πιθανότητα 0.005. Άρα το πλήθος των πελατών που θα μολυνθούν ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 10^4$ και $p = 0.0005$. Επειδή το γινόμενο $Np = 5$ είναι της τάξης της μονάδας, κατά προσέγγιση η κατανομή είναι η Poisson με παράμετρο $\lambda = 5$.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2021
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: . . . .

Οδηγίες

1. Διάρκεια εξέτασης: 100 ΛΕΠΤΑ
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
5. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
6. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
7. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
8. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
9. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Εμβολιασμός)** Σε ένα πληθυσμό ατόμων, το 80% είναι εμβολιασμένα. Από όσα έχουν εμβολιαστεί, θα νοσήσει βαριά το 0.1%. Αντίθετα, από όσα δεν έχουν εμβολιαστεί, θα νοσήσει βαριά το 10%.
   (α΄) *(1 μονάδα)* Σε περίπτωση που κάποιο άτομο νοσήσει βαριά, ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει εμβολιαστεί;
   (β΄) *(1 μονάδα)* Όποιο άτομο νοσεί βαριά αυτόματα πηγαίνει σε μια μονάδα εντατικής θεραπείας (ΜΕΘ), για την εισαγωγή στην οποία δεν λαμβάνεται υπόψιν αν το άτομο είναι εμβολιασμένο ή όχι. Αν μια μονάδα εντατικής θεραπείας έχει 52 θέσεις, ποια είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του πλήθους των ασθενών σε αυτή που έχει εμβολιαστεί;
   (γ΄) *(0.5 μονάδα)* Μπορείτε να δώσετε μια προσέγγιση της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας του προηγούμενου σκέλους;
2. **(Δειγματοληπτικός έλεγχος)** Σε ένα πληθυσμό 100 ατόμων, υπάρχουν 22 που νοσούν με κορωνοϊό. Επιλέγονται ακριβώς 7 άτομα προκειμένου να υποβληθούν σε εξέταση.
   (α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα να νοσούν το πολύ δύο από όσα άτομα επιλεγούν για εξέταση;
   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Κατά μέσο όρο, πόσα από τα άτομα που θα επιλεγούν για την εξέταση θα νοσούν με κορωνοϊό; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
3. **(Διαγνωστικός έλεγχος)** Ένα τεστ κορωνοϊού μπορεί να βγει θετικό ή αρνητικό. Η πιθανότητα να βγει θετικό ενώ ο εξεταζόμενος δεν έχει τον κορωνοϊό είναι 0.1, ενώ η πιθανότητα να βγει αρνητικό ενώ ο εξεταζόμενος έχει τον κορωνοϊό είναι 0.05. Το 90% όσων υποβάλλονται στο τεστ δεν έχουν κορωνοϊό.

(α΄) *(1 μονάδα)* Δίνεται επιπλέον, ότι τα αποτελέσματα διαδοχικών τεστ σε ένα άτομο είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, εφόσον αυτό το άτομο έχει τον κορωνοϊό. Αν ένα άτομο υποβληθεί σε δύο διαδοχικά τεστ και βγουν και τα δύο θετικά, ποια η πιθανότητα να έχει όντως τον κορωνοϊό;

(β΄) *(1 μονάδα)* Έστω ότι, σε αντίθεση με το προηγούμενο σκέλος, τα αποτελέσματα διαδοχικών τεστ στο ίδιο άτομο είναι πάντα τα ίδια και, επομένως, τυχόν σφάλματα είναι συστηματικά. Αν ένας εξεταζόμενος υποβληθεί σε 2 τεστ και βγουν και τα δύο θετικά, ποια η πιθανότητα να έχει όντως τον κορωνοϊό;

4. **(Χρόνοι εμβολιασμού)** *(2 μονάδες)* Ένα ανεμβολίαστο άτομο θα εμβολιαστεί με ένα μονοδοσικό εμβόλιο μετά από χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ του $a = 0$ και του $b = 2$. Το ίδιο άτομο θα κολλήσει τον κορωνοϊό μετά από επίσης τυχαίο χρόνο Y, που όμως έχει πυκνότητα

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχόμενου το άτομο να κολλήσει τον κορωνοϊό αφού έχει εμβολιαστεί, πριν όμως περάσει χρόνος ίσος με 2 μετά τη χρονική στιγμή που θα γίνει ο εμβολιασμός.

5. **(Θέσεις ΜΕΘ)** Έστω πόλη με πληθυσμό $N = 10^6$ ατόμων και με 1050 θέσεις ΜΕΘ. Αν κάποιο άτομο είναι εμβολιασμένο, η πιθανότητα να χρειαστεί νοσηλεία σε ΜΕΘ είναι 10^{-4}, ενώ αν δεν είναι εμβολιασμένο η πιθανότητα είναι 10^{-3}.

(α΄) *(1 μονάδα)* Έστω πως στην πόλη δεν είναι κανένα άτομο εμβολιασμένο. Ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστούν νοσηλεία σε ΜΕΘ περισσότερα άτομα από τις διαθέσιμες θέσεις;

(β΄) *(1 μονάδα)* Έστω, εναλλακτικά, πως το κάθε άτομο στην πόλη είναι εμβολιασμένο με πιθανότητα 0.5, ανεξάρτητα από όλα τα άλλα. Πόσες θέσεις χρειάζονται τώρα ώστε η πιθανότητα να καταληφθούν όλες οι θέσεις ΜΕΘ να μην υπερβαίνει το 0.1%;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$
$$P(A) \geq 0 \, \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\Omega) = 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(_1 \cup _2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$
$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A) \leq 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B),$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \; P(A \cup B) \leq P(A) + P(B), \; P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap B' \cap C),$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \; P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k, Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N+k-1}{k} = \binom{N+k-1}{-1}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_2 A_1) \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}),$$
$$P() = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'), \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')},$$
$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N) \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}),$$
$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}).$$
$$A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B).$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\}) \, \forall x \in S_X, \quad F_X(x) = P(X \leq x), \quad \lim_{t \to x^-} F(t) = P(X < x), \quad E(X) = \sum_{x \in S_X} x p_X(x),$$
$$E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x), \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)),$$
$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X - \mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX + b) = a^2 \mathrm{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} {}^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \; e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$
$$X \sim \mathrm{Bern}(p), \quad p_X(0) = 1 - p, \; p_X(1) = p, \; E(X) = p, \; \mathrm{VAR}(X) = p(1-p),$$
$$X \sim \text{Διων}(N, p), \; p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \; E(X) = Np, \; \mathrm{VAR}(X) = Np(1-p),$$
$$X \sim \text{Γεωμ}(p), \; p_X(k) = (1-p)^{k-1} p, \; E(X) = 1/p, \; \mathrm{VAR}(X) = (1-p)/p^2, \; P(X \geq m + n | X > n) = P(X \geq m), \; m \geq 1, n \geq 0,$$
$$X \sim \text{Υπερ}(N, k, n), \; p_X(m) = \frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}}, \; E(X) = \frac{nk}{N}, \; \mathrm{VAR}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$
$$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda), \; p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \; E(X) = \lambda, \; \mathrm{VAR}(X) = \lambda.$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in S_X, \, \forall y \in S_Y, \quad p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{XY}(x, y),$$
$$E(g(X, Y)) = \sum_{x, y} g(x, y) p_{XY}(x, y), \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E(\sum_{k=1}^K g_k(X, Y)) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X, Y)),$$
$$\mathrm{COV}(X, Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E(XY) - E(X)E(Y), \; \mathrm{VAR}(X + Y) = \mathrm{VAR}(X) + \mathrm{VAR}(Y) + 2\mathrm{COV}(X, Y),$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B) \, \forall A, B \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \, \forall x, y,$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X, Y) = 0, \quad p_{X+Y}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k) p_Y(m - k), \; m \in \mathbb{Z},$$
$$E(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{COV}(X_i, X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx, \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t} f(x)\,dx,$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_{B} f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_{a}^{b} f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b],\\ 0, & \text{για } x\notin[a,b],\end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b,\end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0,\\ 0, & \text{για } x<0,\end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0,\\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0,\end{cases} \quad E(X) = \theta, \quad \mathrm{VAR}(X) = \theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X) = \mu, \quad \mathrm{VAR}(X) = \sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y) : a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le \phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx,$$

$$R = \{(x,y) : a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le \phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy,$$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases} \int_a^b \Big(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\Big)\,dx,\\ \int_c^d \Big(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\Big)\,dy,\end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X,Y)),$$

$$X,Y \text{ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X,Y \text{ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c) \le \frac{E(X)}{c}, \qquad c>0 \Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c) \le \frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1, X_2, \ldots \text{ ανεξ. με κοινή κατ.}, \ E(X_i) = \mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, \quad \text{καθώς } N\to\infty,\\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N = \mu\big) = 1,\end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i) = \sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu) = \frac{\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P\big(a\le \bar{S}_N\le b\big)\to\Phi(b)-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty,\\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty,\\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty.\end{cases}$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2020-2021
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Σεπτεμβρίου Ακ. Έτους 2020-2021

1. **(Εμβολιασμός)** Σε ένα πληθυσμό ατόμων, το 80% είναι εμβολιασμένα. Από όσα έχουν εμβολιαστεί, θα νοσήσει βαριά το 0.1%. Αντίθετα, από όσα δεν έχουν εμβολιαστεί, θα νοσήσει βαριά το 10%.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Σε περίπτωση που κάποιο άτομο νοσήσει βαριά, ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει εμβολιαστεί;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Όποιο άτομο νοσεί βαριά αυτόματα πηγαίνει σε μια μονάδα εντατικής θεραπείας (ΜΕΘ), για την εισαγωγή στην οποία δεν λαμβάνεται υπόψιν αν το άτομο είναι εμβολιασμένο ή όχι. Αν μια μονάδα εντατικής θεραπείας έχει 52 θέσεις, ποια είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του πλήθους των ασθενών σε αυτή που έχει εμβολιαστεί;

   (γ΄) *(0.5 μονάδα)* Μπορείτε να δώσετε μια προσέγγιση της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας του προηγούμενου σκέλους;

   Λύση:

   (α΄) Έστω κάποιο συγκεκριμένο άτομο και έστω E το ενδεχόμενο να έχει κάνει το εμβόλιο και B το ενδεχόμενο να νοσήσει βαριά. Μας έχει δοθεί ότι $P(E) = 0.8$, $P(B|E) = 0.001$ και $P(B|E') = 0.1$. Με εφαρμογή του Κανόνα του Bayes, έχουμε

   $$P(E'|B) = \frac{P(E'B)}{P(B)} = \frac{P(B|E')P(E')}{P(B|E)P(E) + P(B|E')P(E')} = \frac{0.1 \times 0.2}{0.001 \times 0.8 + 0.1 \times 0.2} = \frac{25}{26}.$$

   (β΄) Κάθε ένα άτομο στην εντατική έχει εμβολιαστεί ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα, με πιθανότητα $\frac{1}{26}$. Επομένως, το πλήθος των εμβολιασμένων ατόμων στην εντατική δίνεται από την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 52$ (το πλήθος των πειραμάτων) και $p = \frac{1}{26}$ (η πιθανότητα της επιτυχίας, να είναι δηλαδή κάποιος εμβολιασμένος).

   (γ΄) Επειδή το p είναι αρκετά μικρό, το N είναι αρκετά μεγάλο, και το $Np = 2$ είναι κοντά στη μονάδα, προκύπτει πως το πλήθος των εμβολιασμένων ατόμων μπορεί να προσεγγιστεί με την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = Np = 2$.

2. **(Δειγματοληπτικός έλεγχος)** Σε ένα πληθυσμό 100 ατόμων, υπάρχουν 22 που νοσούν με κορωνοϊό. Επιλέγονται ακριβώς 7 άτομα προκειμένου να υποβληθούν σε εξέταση.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα να νοσούν το πολύ δύο από όσα άτομα επιλεγούν για εξέταση;

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Κατά μέσο όρο, πόσα από τα άτομα που θα επιλεγούν για την εξέταση θα νοσούν με κορωνοϊό; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

   Λύση: Το πλήθος των ατόμων που θα επιλεγούν και θα έχουν κορωνοϊό ακολουθεί την υπεργεωμετρική κατανομή. Επομένως, προκύπτει:

   (α΄)

   $$P(X \leq 2) = \frac{\binom{22}{0}\binom{78}{7}}{\binom{100}{7}} + \frac{\binom{22}{1}\binom{78}{6}}{\binom{100}{7}} + \frac{\binom{22}{2}\binom{78}{5}}{\binom{100}{7}}.$$

   (β΄)

   $$E(X) = \frac{22 \times 7}{100} = \frac{154}{100}.$$

3. **(Διαγνωστικός έλεγχος)** Ένα τεστ κορωνοϊού μπορεί να βγει θετικό ή αρνητικό. Η πιθανότητα να βγει θετικό ενώ ο εξεταζόμενος δεν έχει τον κορωνοϊό είναι 0.1, ενώ η πιθανότητα να βγει αρνητικό ενώ ο εξεταζόμενος έχει τον κορωνοϊό είναι 0.05. Το 90% όσων υποβάλλονται στο τεστ δεν έχουν κορωνοϊό.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Δίνεται επιπλέον, ότι τα αποτελέσματα διαδοχικών τεστ σε ένα άτομο είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, εφόσον αυτό το άτομο έχει τον κορωνοϊό. Αν ένα άτομο υποβληθεί σε δύο διαδοχικά τεστ και βγουν και τα δύο θετικά, ποια η πιθανότητα να έχει όντως τον κορωνοϊό;

(β΄) *(1 μονάδα)* Έστω ότι, σε αντίθεση με το προηγούμενο σκέλος, τα αποτελέσματα διαδοχικών τεστ στο ίδιο άτομο είναι πάντα τα ίδια και, επομένως, τυχόν σφάλματα είναι συστηματικά. Αν ένας εξεταζόμενος υποβληθεί σε 2 τεστ και βγουν και τα δύο θετικά, ποια η πιθανότητα να έχει όντως τον κορωνοϊό;

Λύση: Έστω A_1 και A_2 τα ενδεχόμενα τα δύο τεστ να βγουν θετικά, και B το ενδεχόμενο ο εξεταζόμενος να έχει τον κορωνοϊό. Μας έχει δοθεί πως, για $i = 1, 2$,

$$P(A_i|B') = 0.1, \quad P(A_i'|B) = 0.05, \quad P(B) = 0.1.$$

(α΄) Σε αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιώντας, αρχικά, τον Κανόνα του Bayes και, κατόπιν, ανεξαρτησία σε ενδεχόμενα υπό δέσμευση, έχουμε

$$\begin{aligned} P(B|A_1A_2) &= \frac{P(BA_1A_2)}{P(A_1A_2)} = \frac{P(A_1A_2|B)P(B)}{P(A_1A_2|B)P(B) + P(A_1A_2|B')P(B')} \\ &= \frac{P(A_1|B)P(A_2|B)P(B)}{P(A_1|B)P(A_2|B)P(B) + P(A_1|B')P(A_2|B')P(B')} \\ &= \frac{0.95 \times 0.95 \times 0.1}{0.95 \times 0.95 \times 0.1 + 0.1 \times 0.1 \times 0.9} = 0.9093. \end{aligned}$$

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση,

$$\begin{aligned} P(B|A_1A_2) &= \frac{P(BA_1A_2)}{P(A_1A_2)} = \frac{P(A_1A_2|B)P(B)}{P(A_1A_2|B)P(B) + P(A_1A_2|B')P(B')} \\ &= \frac{P(A_1|B)P(B)}{P(A_1|B)P(B) + P(A_1|B')P(B')} \\ &= \frac{0.95 \times 0.1}{0.95 \times 0.1 + 0.1 \times 0.9} = 0.5135. \end{aligned}$$

4. **(Χρόνοι εμβολιασμού)** *(2 μονάδες)* Ένα ανεμβολίαστο άτομο θα εμβολιαστεί με ένα μονοδοσικό εμβόλιο μετά από χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ του $a = 0$ και του $b = 2$. Το ίδιο άτομο θα κολλήσει τον κορωνοϊό μετά από επίσης τυχαίο χρόνο Y, που όμως έχει πυκνότητα

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχόμενου το άτομο να κολλήσει τον κορωνοϊό αφού έχει εμβολιαστεί, πριν όμως περάσει χρόνος ίσος με 2 μετά τη χρονική στιγμή που θα γίνει ο εμβολιασμός.

Λύση:

$$P(X < Y < X + 2) = \int_0^2 \left(\int_x^{x+2} f_Y(y)\, dy \right) f_X(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_x^{x+2} ye^{-y}\, dy \right).$$

Σχετικά με το ολοκλήρωμα που πρέπει να υπολογίσουμε αρχικά, έχουμε

$$\int ye^{-y}\, dy = \int -y(e^{-y})'\, dy = -ye^{-y} + \int e^{-y}\, dy = -ye^{-y} - e^{-y} - C,$$

επομένως

$$\begin{aligned} P(X < Y < X + 2) &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left[(y+1)e^{-y} \right]_{x+2}^{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left[(x+1)e^{-x} - (x+3)e^{-(x+2)} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-x}[x + 1 - e^{-2}(x+3)]\, dx \\ &= \frac{1 - e^{-2}}{2} \int_0^2 xe^{-x}\, dx + \frac{1 - 3e^{-2}}{2} \int_0^2 e^{-x}\, dx \\ &= \frac{1 - e^{-2}}{2} \left[(x+1)e^{-x} \right]_2^0 + \frac{1 - 3e^{-2}}{2} \left[e^{-x} \right]_2^0 \\ &= \frac{1 - e^{-2}}{2} \left[1 - 3e^{-2} \right] + \frac{1 - 3e^{-2}}{2} \left[1 - e^{-2} \right] = 1 - 4e^{-2} + 3e^{-4}. \end{aligned}$$

5. **(Θέσεις ΜΕΘ)** Έστω πόλη με πληθυσμό $N = 10^6$ και με 1050 θέσεις ΜΕΘ. Αν κάποιο άτομο είναι εμβολιασμένο, η πιθανότητα να χρειαστεί νοσηλεία σε ΜΕΘ είναι 10^{-4}, ενώ αν δεν είναι εμβολιασμένο η πιθανότητα είναι 10^{-3}.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Έστω πως στην πόλη δεν είναι κανείς εμβολιασμένος. Ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστούν νοσηλεία σε ΜΕΘ περισσότερα άτομα από τις διαθέσιμες θέσεις;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Έστω, εναλλακτικά, πως το κάθε άτομο στην πόλη είναι εμβολιασμένο με πιθανότητα 0.5, ανεξάρτητα από όλα τα άλλα. Πόσες θέσεις χρειάζονται τώρα ώστε η πιθανότητα να καταληφθούν όλες οι θέσεις ΜΕΘ να μην υπερβαίνει το 0.1%;

   Λύση:

   (α΄) Με χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος έχουμε

$$\begin{aligned} P(X > 1050) &= P\left(\frac{X - 10^6 \times 0.001}{\sqrt{10^6} \times \sqrt{0.001 \times 0.999}} > \frac{1050 - 10^6 \times 0.001}{\sqrt{10^6} \times \sqrt{0.001 \times 0.999}}\right) \\ &\simeq 1 - \Phi\left(\frac{50}{1000 \times \sqrt{0.001 \times 0.999}}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.5819) = 0.0568. \end{aligned}$$

   (β΄) Με χρήση του Κανόνα της Ολικής Πιθανότητας, το κάθε άτομο θα χρειαστεί νοσηλεία με πιθανότητα

$$p = \frac{1}{2} \times 10^{-3} + \frac{1}{2} \times 10^{-4} = \frac{11}{2} \times 10^{-4}.$$

   Έστω, λοιπόν, πως το πλήθος από διαθέσιμες κλίνες είναι K. Έστω πως X είναι το πλήθος των κατοίκων που θα χρειαστούν νοσηλεία. Θα έχουμε, και πάλι με χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος,

$$\begin{aligned} P(X > K) = 10^{-3} &\Leftrightarrow P\left(\frac{X - 10^6 p}{\sqrt{10^6}\sqrt{p(1-p)}} > \frac{K - 10^6 p}{\sqrt{10^6}\sqrt{p(1-p)}}\right) = 10^{-3} \\ &\Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{K - 10^6 p}{\sqrt{10^6}\sqrt{p(1-p)}}\right) = 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{K - 10^6 p}{\sqrt{10^6}\sqrt{p(1-p)}} = \Phi^{-1}(0.999) \\ &\Leftrightarrow K = 10^6 p + 1000\sqrt{p(1-p)}\Phi^{-1}(0.999) = 622.45, \end{aligned}$$

   που πρέπει να στρογγυλοποιηθεί σε ακέραιο, επομένως θα χρειαστούν 623 θέσεις ΜΕΘ.