ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2019
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: . . . .

Οδηγίες

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
3. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
4. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
5. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
11. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Κανόνας του Bayes)** *(1 μονάδα)* Ένας καθηγητής βάζει σε μια τελική εξέταση Πιθανοτήτων ένα απλό θέμα προθέρμανσης με αντικείμενο τον Κανόνα του Bayes. Αν ένας φοιτητής έχει έρθει σε όλες τις διαλέξεις (κάτι που γίνεται με πιθανότητα 20%) θα μπορέσει να λύσει το θέμα με πιθανότητα 90%. Αν ένας φοιτητής έχει έρθει σε μερικές από τις διαλέξεις (κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα 50%) θα μπορέσει να λύσει το θέμα με πιθανότητα 50%. Τέλος, αν ο φοιτητής δεν έχει έρθει σε καμία διάλεξη (κάτι που συμβαίνει στο υπόλοιπο 30%), θα μπορέσει να λύσει το θέμα με πιθανότητα 10%. Με δεδομένο ότι ένας συγκεκριμένος φοιτητής τελικά έλυσε σωστά το θέμα, ποια είναι η πιθανότητα να είχε έρθει σε όλες τις διαλέξεις; Ποια είναι η πιθανότητα να είχε έρθει σε μερικές διαλέξεις; Ποια η πιθανότητα να μην είχε έρθει σε καμία διάλεξη;

2. **(Δράκοι και βαλλίστρες)** 10 βαλλίστρες βρίσκονται αντιμέτωπες με 2 δράκους. Κάθε βαλλίστρα μπορεί να εκτοξεύσει ένα μόνο βέλος, προς έναν από τους δύο δράκους, και θα τον πετύχει με πιθανότητα $p = 0.2$, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Ένα χτύπημα από ένα βέλος αρκεί για να σκοτώσει τον κάθε δράκο. Όλες οι βαλλίστρες θα βάλλουν ταυτόχρονα.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Έστω ότι 3 από τις βαλλίστρες θα στοχεύσουν τον 1 δράκο, και οι άλλες 7 θα στοχεύσουν τον άλλο. Έστω X το πλήθος των δράκων που επιβιώνουν. Βρείτε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας του X.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Αν έστω ένας δράκος επιβιώσει, θα καταστρέψει όλες τις βαλλίστρες. Αν στόχος σας είναι να σκοτωθούν και οι δύο δράκοι, και να επιζήσουν έτσι οι βαλλίστρες, και έχετε επιλογή να επιλέξετε πόσες βαλλίστρες θα στραφούν προς κάθε δράκο, πόσες θα επιλέξετε να επιτεθούν σε κάθε δράκο; Δώστε πλήρως αιτιολογημένη απάντηση.

3. **(Ευρωεκλογές)** Στις ευρωεκλογές του 2019 δόθηκαν από την εφορευτική επιτροπή στον Σταύρο 43 ψηφοδέλτια (συμπεριλαμβανομένου του λευκού), με τυχαία σειρά. Ο Σταύρος είχε αποφασίσει να ψηφίσει οποιοδήποτε από 3 κόμματα που ήταν του γούστου του, και συγκεκριμένα το πρώτο από τα 3 που θα συναντούσε καθώς ξεφύλλιζε ένα προς ένα τα ψηφοδέλτια. Έστω X ο αύξων αριθμός του ψηφοδελτίου που τελικά ψήφισε ο Σταύρος. Επομένως, η Τ.Μ. X είναι ακέραιος και λαμβάνει τις τιμές $X = 1, 2, 3, \ldots, 41$.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα $P(X = 1)$;

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα $P(X = 41)$;

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X.

4. **(Κώστας και Δώρα)** Όταν ο Κώστας και η Δώρα κάνουν check-in για να παραδώσουν τις αποσκευές τους πριν από την πτήση, και έχουν την επιλογή να περιμένουν σε μια από δύο ουρές, αντί να περιμένουν μαζί σε μια ουρά κάθονται σε μια ουρά ο καθένας, και όποιος φτάσει πρώτος να εξυπηρετηθεί, φωνάζει τον άλλο στην ουρά του, και αρχίζει η εξυπηρέτηση και των δύο ταυτόχρονα.

   Υποθέτουμε ότι ο Κώστας θα χρειαστεί χρόνο μέχρι να αδειάσει η δικιά του ουρά και να αρχίσει να εξυπηρετείται ίσο με X, και η Δώρα αντίστοιχα χρόνο ίσο με Y, όπου η X και η Y είναι εκθετικές Τ.Μ. με μέση τιμή 1, ανεξάρτητες μεταξύ τους.

   Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

   (α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η κατανομή και η μέση τιμή του χρόνου Z ο οποίος χρειάζεται για να ξεκινήσει η εξυπηρέτηση του πρώτου (και επομένως και του δεύτερου, βάσει του κανόνα που ακολουθούν);

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η κατανομή και η μέση τιμή του χρόνου W που γλιτώνει από την αναμονή του ο ένας από τους δύο; (Παρατήρηση: προφανώς ο άλλος δεν θα γλιτώσει καθόλου χρόνο, γιατί είχε επιλέξει την γρήγορη ουρά).

5. **(Περιφερειακές/Δημοτικές Εκλογές)** Στις περιφερειακές/δημοτικές εκλογές ο Σταύρος ψήφισε σε δύο διαφορετικά εκλογικά τμήματα. Στο πρώτο εκλογικό τμήμα ψήφισε για τις δημοτικές εκλογές, και στο δεύτερο εκλογικό τμήμα ψήφισε για τις περιφερειακές εκλογές. Στο πρώτο τμήμα, ο χρόνος αναμονής ήταν Τ.Μ. X και στο δεύτερο τμήμα ο χρόνος αναμονής ήταν Τ.Μ. Y. Δίνεται ότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες, και η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0, 1]$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο Σταύρος να χρειάστηκε συνολικό χρόνο $X + Y > 2$ στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Η Y είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0, 2]$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Η Y είναι εκθετικά κατανεμημένη με μέση τιμή 1.

6. **(Συγγραφέας)** Ένας συγγραφέας βιβλίων φαντασίας γράφει καθημερινά ένα πλήθος από σελίδες X όπου το X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με μάζα

   $$p_X(k) = \frac{1}{10}, \quad k = 1, 2, \ldots, 10.$$

   (α΄) *(0.5 μονάδες)* Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της X;

   (β΄) *(1.5 μονάδες)* Αν ο συγγραφέας έχει υποσχεθεί να γράψει 400 σελίδες μέσα σε 64 μέρες, ποια είναι η πιθανότητα να καταφέρει να πραγματοποιήσει την υπόσχεσή του;

   (γ΄) *(0.5 μονάδες)* Αν ο συγγραφέας έχει συμφωνήσει να αμειφθεί ένα ποσό A για κάθε σελίδα που θα γράψει, ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της αμοιβής του Y; Ποια κατανομή ακολουθεί αυτή, προσεγγιστικά;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$
$$P(A) \geq 0 \; \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\Omega) = 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(_1 \cup _2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$
$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A) \leq 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B),$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),\; P(A \cup B) \leq P(A) + P(B),\; P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap B' \cap C),$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C),\; P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k, Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{+k-1}{k} = \binom{+k-1}{-1}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}),$$
$$P() = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'), \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')},$$
$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N) \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}),$$
$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}).$$
$$A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B).$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\}) \; \forall x \in S_X, \quad F_X(x) = P(X \leq x), \quad \lim_{t \to x^-} F(t) = P(X < x), \quad E(X) = \sum_{x \in S_X} x p_X(x),$$
$$E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x), \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$
$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E\big[(X - \mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \text{VAR}(aX + b) = a^2 \text{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1 - x)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} {}^2 x^k = \frac{x(1 + x)}{(1 - x)^3},\; e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$
$$X \sim \text{Bern}(p), \quad p_X(0) = 1 - p,\; p_X(1) = p,\; E(X) = p,\; \text{VAR}(X) = p(1 - p),$$
$$X \sim \text{Διων}(N, p),\; p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k},\; E(X) = Np,\; \text{VAR}(X) = Np(1 - p),$$
$$X \sim \text{Γεωμ}(p),\; p_X(k) = (1 - p)^{k-1} p,\; E(X) = 1/p,\; \text{VAR}(X) = (1 - p)/p^2,\; P(X \geq m + n | X > n) = P(X \geq m),\; m \geq 1, n \geq 0,$$
$$X \sim \text{Υπερ}(N, k, n),\; p_X(m) = \frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}},\; E(X) = \frac{nk}{N},\; \text{VAR}(X) = \frac{nk(N - k)(N - n)}{N^2(N - 1)},$$
$$X \sim \text{Poisson}(\lambda),\; p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},\; E(X) = \lambda,\; \text{VAR}(X) = \lambda.$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in S_X,\; \forall y \in S_Y, \quad p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{XY}(x, y),$$
$$E(g(X, Y)) = \sum_{x,y} g(x, y) p_{XY}(x, y), \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X, Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X, Y)),$$
$$\text{COV}(X, Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E(XY) - E(X)E(Y),\; \text{VAR}(X + Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y) + 2\text{COV}(X, Y),$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \; \forall A, B \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \; \forall x, y,$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \text{COV}(X, Y) = 0, \quad p_{X+Y}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k) p_Y(m - k),\; m \in \mathbb{Z},$$
$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + b, \quad \text{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \text{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{COV}(X_i, X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx, \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t} f(x)\,dx,$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_B f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_a^b f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b], \\ 0, & \text{για } x\notin[a,b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0, \\ 0, & \text{για } x<0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0, \end{cases} \quad E(X)=\theta, \quad \mathrm{VAR}(X) = \theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X)=\mu, \quad \mathrm{VAR}(X)=\sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y): a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

$$R = \{(x,y): a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases} \int_a^b\Big(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\Big)\,dx, \\ \int_c^d\Big(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\Big)\,dy, \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X,Y)),$$

$$X,Y \,\text{ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X,Y \,\text{ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y)=0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c)\le\frac{E(X)}{c}, \qquad c>0\Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c)\le\frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1,X_2,\ldots \text{ ανεξ. με κοινή κατ.}, \ E(X_i)=\mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N = \mu\big) = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i) = \sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu) = \frac{\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big)-N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P\big(a\le\bar{S}_N\le b\big)\to\Phi(b)-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty. \end{cases}$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2017-2018
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΝΤΟΓΙΑΝΝΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Ιουνίου Ακ. Έτους 2018-2019

1. **(Κανόνας του Bayes)** *(1 μονάδα)* Ένας καθηγητής βάζει σε μια τελική εξέταση Πιθανοτήτων ένα απλό θέμα προθέρμανσης με αντικείμενο τον Κανόνα του Bayes. Αν ένας φοιτητής έχει έρθει σε όλες τις διαλέξεις (κάτι που γίνεται με πιθανότητα 20%) θα μπορέσει να λύσει το θέμα με πιθανότητα 90%. Αν ένας φοιτητής έχει έρθει σε μερικές από τις διαλέξεις (κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα 50%) θα μπορέσει να λύσει το θέμα με πιθανότητα 50%. Τέλος, αν ο φοιτητής δεν έχει έρθει σε καμία διάλεξη (κάτι που συμβαίνει στο υπόλοιπο 30%), θα μπορέσει να λύσει το θέμα με πιθανότητα 10%. Με δεδομένο ότι ένας συγκεκριμένος φοιτητής τελικά έλυσε σωστά το θέμα, ποια είναι η πιθανότητα να είχε έρθει σε όλες τις διαλέξεις; Ποια είναι η πιθανότητα να είχε έρθει σε μερικές διαλέξεις; Ποια η πιθανότητα να μην είχε έρθει σε καμία διάλεξη;

   Λύση: Έστω M το ενδεχόμενο ο φοιτητής να έχει έρθει σε μερικές διαλέξεις, O το ενδεχόμενο να έχει έρθει σε όλες, K να μην έχει έρθει σε καμία, και A να λύσει σωστά την άσκηση. Σύμφωνα με τον Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned} P(O|A) &= \frac{P(OA)}{P(A)} = \frac{P(A|O)P(O)}{P(A|O)P(O)+P(A|M)P(M)+P(A|K)P(K)} \\ &= \frac{90\%20\%}{90\%20\%+50\%50\%+10\%30\%} = \frac{18}{18+25+3} = \frac{9}{23}. \end{aligned}$$

   Επίσης,

$$\begin{aligned} P(M|A) &= \frac{P(A)}{P(A)} = \frac{P(A|)P()}{P(A|O)P(O)+P(A|M)P(M)+P(A|K)P(K)} \\ &= \frac{50\%50\%}{90\%20\%+50\%50\%+10\%30\%} = \frac{25}{18+25+3} = \frac{25}{46}, \end{aligned}$$

   και, τέλος,

$$P(K|A) = 1 - P(O|A) - P(M|A) = 1 - \frac{9}{23} - \frac{25}{46} = \frac{3}{46}.$$

2. **(Δράκοι και βαλλίστρες)** 10 βαλλίστρες βρίσκονται αντιμέτωπες με 2 δράκους. Κάθε βαλλίστρα μπορεί να εκτοξεύσει ένα μόνο βέλος, προς έναν από τους δύο δράκους, και θα τον πετύχει με πιθανότητα $p = 0.2$, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Ένα χτύπημα από ένα βέλος αρκεί για να σκοτώσει τον κάθε δράκο. Όλες οι βαλλίστρες θα βάλλουν ταυτόχρονα.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Έστω ότι 3 από τις βαλλίστρες θα στοχεύσουν τον 1 δράκο, και οι άλλες 7 θα στοχεύσουν τον άλλο. Έστω X το πλήθος των δράκων που επιβιώνουν. Βρείτε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας του X.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Αν έστω ένας δράκος επιβιώσει, θα καταστρέψει όλες τις βαλλίστρες. Αν στόχος σας είναι να σκοτωθούν και οι δύο δράκοι, και να επιζήσουν έτσι οι βαλλίστρες, και έχετε επιλογή να επιλέξετε πόσες βαλλίστρες θα στραφούν προς κάθε δράκο, πόσες θα επιλέξετε να επιτεθούν σε κάθε δράκο; Δώστε πλήρως αιτιολογημένη απάντηση.

   (α΄) Καταρχάς, ο πρώτος δράκος θα επιβιώσει με πιθανότητα $p_1 = 0.8^3$ και ο δεύτερο δράκος με πιθανότητα $p_2 = 0.8^7$. Επομένως,

$$\begin{aligned} P(X=0) &= (1-p_1)(1-p_2), \\ P(X=2) &= p_1p_2, \\ P(X=1) &= 1-P(X=0)-P(X=2) = p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1). \end{aligned}$$

   (β΄) Έστω ότι x βαλλίστρες θα χτυπήσουν τον πρώτο δράκο και $10-x$ βαλλίστρες τον δεύτερο. Η πιθανότητα να χτυπηθούν και οι δύο δράκοι είναι

$$f(x) = (1-p_1)(1-p_2) = (1-0.8^x)(1-0.8^{10-x}) = (1-e^{x\log 0.8})(1-e^{\log 0.8(10-x)}).$$

Παρατηρούμε πως

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{x\log 0.8}\log 0.8(1-e^{\log 0.8(10-x)}) + (1-e^{x\log 0.8})e^{\log 0.8(10-x)}\log 0.8 = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{x\log 0.8} - e^{10\log 0.8} = e^{\log 0.8(10-x)} - e^{10\log 0.8} \Leftrightarrow e^{x\log 0.8} = e^{\log 0.8(10-x)} \Leftrightarrow x = 10-x \Leftrightarrow x = 5.$$

Άρα, το βέλτιστο είναι να μοιράσουμε τις βαλλίστρες. Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι οι βαλλίστρες βάλλουν διαδοχικά. Αν έχουμε στοχεύσει τους δύο δράκους με 6 και 4 βαλλίστρες αντίστροφα, τότε η 6η βαλλίστρα που θα επιτεθεί στον πρώτο δράκο θα είναι λιγότερο χρήσιμη από την περίπτωση που στοχεύσει στον δεύτερο δράκο, γιατί ο δεύτερος δράκος έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να επιζήσει από τα 4 βέλη που έχει δεχτεί, σε σχέση με τον πρώτο δράκο που έχει ήδη δεχτεί 5 βέλη.

3. **(Ευρωεκλογές)** Στις ευρωεκλογές του 2019 δόθηκαν από την εφορευτική επιτροπή στον Σταύρο 43 ψηφοδέλτια (συμπεριλαμβανομένου του λευκού), με τυχαία σειρά. Ο Σταύρος είχε αποφασίσει να ψηφίσει οποιοδήποτε από 3 κόμματα που ήταν του γούστου του, και συγκεκριμένα το πρώτο από τα 3 που θα συναντούσε καθώς ξεφύλλιζε ένα προς ένα τα ψηφοδέλτια. Έστω X ο αύξων αριθμός του ψηφοδελτίου που τελικά ψήφισε ο Σταύρος. Επομένως, η Τ.Μ. X είναι ακέραιος και λαμβάνει τις τιμές $X = 1, 2, 3, \ldots, 41$.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα $P(X = 1)$;

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα $P(X = 41)$;

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X.

   (α΄) Υπάρχουν 43 συνολικά ψηφοδέλτια, εκ των οποίων 3 είναι αυτά που θα επιλέξει ο Σταύρος. Η πιθανότητα να είναι το πρώτο ένα εξ αυτών είναι $\frac{3}{43}$.

   (β΄) Αριθμούμε τα ψηφοδέλτια με τη σειρά που θα τα επιλέξει ο Σταύρος. Υπάρχουν συνολικά $\binom{43}{3}$ συνδυασμοί ψηφοδελτίων που αντιστοιχούν στα 3 ψηφοδέλτια που αρέσουν στο Σταύρο. Υπάρχει ακριβώς ένας συνδυασμός (τα ψηφοδέλτια 41, 42,και 43) με τον οποίο θα χρειαστεί αν σηκώσει ο Σταύρος 41 ψηφοδέλτια. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι
$$P(X = 41) = \frac{1}{\binom{43}{3}} = \frac{3\times 2}{43\times 42\times 41}.$$

   Εναλλακτικά, παρατηρούμε πως $X = 41$ όταν το πρώτο ψηφοδέλτιο δεν αρέσει στο Σταύρο (κάτι που γίνεται με πιθανότητα $\frac{40}{43}$), το δεύτερο ψηφοδέλτιο δεν αρέσει στο Σταύρο (κάτι που γίνεται με πιθανότητα $\frac{39}{42}$), κοκ, και τελικά
$$P(X = 41) = \frac{40}{43}\times\frac{39}{42}\times\frac{38}{41}\times\cdots\times\frac{1}{4} = \frac{2\times 3}{43\times 42\times 41}.$$

   (γ΄) Έστω $x = 1, 2, \ldots, 41$. Το $X = x$ εφόσον ο συνδυασμός των ψηφοδελτίων που μπορεί να επιλέξει ο Σταύρος περιλαμβάνουν το x και άλλα δύο από τα $43 - x$ επόμενα. Επομένως
$$P(X = x) = \frac{\binom{43-x}{2}}{\binom{43}{3}}.$$

4. **(Κώστας και Δώρα)** Όταν ο Κώστας και η Δώρα κάνουν check-in για να παραδώσουν τις αποσκευές τους πριν από την πτήση, και έχουν την επιλογή να περιμένουν σε μια από δύο ουρές, αντί να περιμένουν μαζί σε μια ουρά κάθονται σε μια ουρά ο καθένας, και όποιος φτάσει πρώτος να εξυπηρετηθεί, φωνάζει τον άλλο στην ουρά του, και αρχίζει η εξυπηρέτηση και των δύο ταυτόχρονα.

   Υποθέτουμε ότι ο Κώστας θα χρειαστεί χρόνο μέχρι να αδειάσει η δικιά του ουρά και να αρχίσει να εξυπηρετείται ίσο με X, και η Δώρα αντίστοιχα χρόνο ίσο με Y, όπου η X και η Y είναι εκθετικές Τ.Μ. με μέση τιμή 1, ανεξάρτητες μεταξύ τους.

   Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

   (α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η κατανομή και η μέση τιμή του χρόνου Z ο οποίος χρειάζεται για να ξεκινήσει η εξυπηρέτηση του πρώτου (και επομένως και του δεύτερου, βάσει του κανόνα που ακολουθούν);

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η κατανομή και η μέση τιμή του χρόνου W που γλιτώνει από την αναμονή του ο ένας από τους δύο; (Παρατήρηση: προφανώς ο άλλος δεν θα γλιτώσει καθόλου χρόνο, γιατί είχε επιλέξει την γρήγορη ουρά).

   Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως ο χρόνος που θα ξεκινήσει η εξυπηρέτηση και των δύο είναι $Z = \min\{X, Y\}$. Το ελάχιστο δύο εκθετικών Τ.Μ. είναι επίσης εκθετική Τ.Μ., σύμφωνα με τη θεωρία. Ειδικά στην περίπτωσή μας, έχουμε

$$P(\min\{X,Y\} \le x) = 1 - P(\min(X,Y) \ge x) = 1 - P(X \ge x, Y \ge x)$$
$$1 - P(X \ge x)P(Y \ge x) = 1 - e^{-x}e^{-x} = 1 - e^{-2x},$$

επομένως πράγματι το ελάχιστο $\min\{X, Y\}$ είναι εκθετική Τ.Μ. με μέση τιμή $\frac{1}{2}$. Επομένως, η εξυπηρέτηση θα αρχίσει κατά μέσο όρο μετά από χρόνο $E(\min\{X, Y\}) = \frac{1}{2}$.

(β΄) Σχετικά με το χρόνο που θα γλιτώσει ο ένας εκ των δύο, παρατηρούμε πως από τη στιγμή που αδειάζει η μία ουρά, η άλλη ουρά θα αδειάσει πάλι μετά από εκθετικό χρόνο με μέση τιμή 1, λόγω της ιδιότητας έλλειψης μνήμης.

5. **(Περιφερειακές/Δημοτικές Εκλογές)** Στις περιφερειακές/δημοτικές εκλογές ο Σταύρος ψήφισε σε δύο διαφορετικά εκλογικά τμήματα. Στο πρώτο εκλογικό τμήμα ψήφισε για τις δημοτικές εκλογές, και στο δεύτερο εκλογικό τμήμα ψήφισε για τις περιφερειακές εκλογές. Στο πρώτο τμήμα, ο χρόνος αναμονής ήταν Τ.Μ. X και στο δεύτερο τμήμα ο χρόνος αναμονής ήταν Τ.Μ. Y. Δίνεται ότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες, και η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0, 1]$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο Σταύρος να χρειάστηκε συνολικό χρόνο $X + Y > 2$ στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Η Y είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0, 2]$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Η Y είναι εκθετικά κατανεμημένη με μέση τιμή 1.

   Λύση:

   (α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία

$$P(X + Y \ge 2) = \iint_{(x,y)\ge 2} f_{XY}(x, y)\, dA = \int_0^1 \left(\int_{2-x}^2 \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{4}.$$

   (β΄) Παρόμοια,

$$\begin{aligned} P(X + Y \ge 2) &= \iint_{(x,y)\ge 2} f_{XY}(x, y)\, dA = \int_0^1 \left(\int_{2-x}^{\infty} e^{-y}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[e^{-y}\right]_{\infty}^{2-x} dx \\ &= \int_0^1 e^{x-2}\, dx = \left[e^{x-2}\right]_0^1 = e^{-1} - e^{-2}. \end{aligned}$$

6. **(Συγγραφέας)** Ένας συγγραφέας βιβλίων φαντασίας γράφει καθημερινά ένα πλήθος από σελίδες X όπου το X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με μάζα

$$p_X(k) = \frac{1}{10}, \quad k = 1, 2, \ldots, 10.$$

   (α΄) *(0.5 μονάδες)* Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της X;

   (β΄) *(1.5 μονάδες)* Αν ο συγγραφέας έχει υποσχεθεί να γράψει 400 σελίδες μέσα σε 64 μέρες, ποια είναι η πιθανότητα να καταφέρει να πραγματοποιήσει την υπόσχεσή του;

   (γ΄) *(0.5 μονάδες)* Αν ο συγγραφέας έχει συμφωνήσει να αμειφθεί ένα ποσό A για κάθε σελίδα που θα γράψει, ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της αμοιβής του Y; Ποια κατανομή ακολουθεί αυτή, προσεγγιστικά;

   Λύση:

   (α΄) Κατά τα γνωστά από την θεωρία,

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{10} + \ldots 10 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}(1 + 2 + \cdots + 10) = \frac{10 \times 11}{2 \times 10} = \frac{11}{2}, \\ E(X^2) &= 1^2 \frac{1}{10} + 2^2 \frac{1}{10} + \ldots 10^2 \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{10}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2\right) = \frac{1}{10} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = \frac{77}{2}, \\ \mathrm{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{77}{2} - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{154}{4} - \frac{121}{4} = \frac{33}{4}. \end{aligned}$$

(β΄) Το πλήθος των σελίδων που θα γράψει ο συγγραφέας είναι το άθροισμα ανεξάρτητων Τ.Μ. X_i, $i = 1, \ldots,$ όλων με την ίδια κατανομή, μέση τιμή $\mu = \frac{11}{2}$ και διασπορά $\sigma^2 = \frac{33}{4}$. Σύμφωνα, λοιπόν, με το Κ.Ο.Θ., θα έχουμε

$$P\left(\sum_{i=1}^{64} X_i > 400\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{64} X_i - 64\mu}{\sqrt{64\sigma^2}} > \frac{400 - 64\mu}{\sqrt{64\sigma^2}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{400 - 64\mu}{8\sigma}\right)$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{6}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{12}{\sqrt{33}}\right).$$

(γ΄) Έστω $Z = \sum_{i=1}^{64} X_i$ το πλήθος των σελίδων που έγραψε ο συγγραφέας. Σύμφωνα με το ΚΟΘ, το Z είναι κατά προσέγγιση κανονικά κατανεμημένο με μέση τιμή $E(Z) = N\mu$ και διασπορά $N\sigma^2$. Η αμοιβή που θα λάβει ο συγγραφέας είναι $Y = AZ$, και κατά τα γνωστά από τη θεωρία η Y είναι, προσεγγιστικά, επίσης κανονικά κατανεμημένη, με μέση τιμη $E(Y) = AE(Z) = N\mu A = 352A$ και διασπορά $\mathrm{VAR}(Y) = A^2\mathrm{VAR}(Z) = A^2N\sigma^2 = 528A^2$.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2019
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: . . . .

Οδηγίες

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
3. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
4. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
5. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
11. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Δασκάλα Πιάνου)** Στην αρχή του σχολικού έτους, μια δασκάλα πιάνου σχεδιάζει το πρόγραμμα των μαθημάτων που θα διδάσκει κάθε βδομάδα. Συνολικά, μπορεί να διδάξει σε 20 ώρες, που τις ονομάζουμε $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$, κατά τη διάρκεια της εβδομάδας, ένα διαφορετικό μαθητή την κάθε ώρα. Με την δασκάλα επικοινωνούν συνολικά 10 μαθητές, προκειμένου να κανονίσουν την ώρα του εβδομαδιαίου μαθήματός τους, καθένας εκ των οποίων επιλέγει, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, και χωρίς προτίμηση στην ώρα που επιλέγει, μία μόνο από τις 20 ώρες. Αν 2 ή περισσότεροι μαθητές επιλέξουν την ίδια ώρα, τότε η δασκάλα θα επιλέξει έναν από αυτούς, και ο άλλος δεν θα επιλέξει άλλη ώρα και δεν θα κάνει μάθημα με τη δασκάλα.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα p_1 να μείνει κενή από μαθητές η ώρα A_1;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή του πλήθους X των μαθητών που θα παραμείνουν;

   (γ΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα p_2 να επιλέξουν όλοι οι μαθητές διαφορετικές ώρες μεταξύ τους, και επομένως να μείνουν και οι 10;

   (δ΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα p_3 να μείνουν ακριβώς 9 μαθητές;

2. **(Βάσια)** Ο κυβερνήτης του υποβρυχίου «Χατζηπαναγής» έχει στο στόχαστρο ένα κομβόι από 2 εχθρικά μεταγωγικά, το A και το B. Έχει στη διάθεσή του 5 τορπίλες, τις οποίες, για λόγους ασφαλείας, πρέπει να εκτοξεύσει όλες, και σχεδόν ταυτόχρονα, και πριν προλάβει να διαπιστώσει αν κάποια από αυτές έχει βρει στόχο. Κάθε τορπίλη θα πετύχει και θα βυθίσει το μεταγωγικό στο οποίο θα τη στείλει ο καπετάνιος με πιθανότητα $p = \frac{1}{4}$. Ο καπετάνιος ξέρει ότι το μεταγωγικό A έχει αξία, για τον εχθρό, 4 εκατομμύρια ευρώ, ενώ το μεταγωγικό B έχει αξία 8 εκατομμύρια ευρώ.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Αν ο καπετάνιος στείλει 3 τορπίλες στο μεταγωγικό A και 2 τορπίλες στο μεταγωγικό B, πόση είναι η αναμενόμενη τιμή της ζημιάς που θα επιφέρει στον εχθρό;

(β΄) *(1 μονάδα)* Αν ο καπετάνιος θέλει να μεγιστοποιήσει τη ζημιά που θα επιφέρει στον εχθρό, πόσες τορπίλες πρέπει να στείλει στο μεταγωγικό A και πόσες στο B;

3. **(Πιτόγυρα και ρετσίνες)** Μια ταβέρνα σερβίρει μόνο πιτόγυρα (για 2 ευρώ) και μπουκάλια ρετσίνας (για 4 ευρώ). Κάθε πελάτης καταναλώνει X πιτόγυρα και Y μπουκάλια ρετσίνας, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες, όπου οι X και Y είναι τυχαίες μεταβλητές με από κοινού μάζα πιθανότητας $p_{XY}(x, y)$ που περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα:

x / y	1	2	3	4
0	1/8	1/24	1/24	1/24
1	1/24	1/8	1/24	1/24
2	1/24	1/24	1/8	1/24
3	1/24	1/24	1/24	1/8

(α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η μάζα πιθανότητας της Τ.Μ. Z που περιγράφει το ποσό που πληρώνει ο κάθε πελάτης;

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της Τ.Μ. Z;

(γ΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα η συνολική είσπραξη από τους πρώτους 10.000 πελάτες να ξεπερνά τις 111.000 ευρώ;

4. **(Άγνωστες παράμετροι)** Έστω Τ.Μ. X με την ακόλουθη πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} Ke^{-x}, & x \in [0, A], \\ 0, & x \notin [0, A]. \end{cases}$$

όπου οι K, A είναι άγνωστες πραγματικές θετικές παράμετροι.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε την τιμή του K συναρτήσει του A.

(β΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την τιμή της μέσης τιμής της X συναρτήσει των τιμών των K και A.

(γ΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F(y) = P(Y \leq y)$ της Τ.Μ. $Y = 2X + 1$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$

$$P(A) \geq 0 \, \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\Omega) = 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P({}_1 \cup {}_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$

$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A) \leq 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B),$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \; P(A \cup B) \leq P(A) + P(B), \; P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap B' \cap C),$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \; P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k, Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{+k-1}{k} = \binom{+k-1}{-1}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_2 A_1) \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}),$$

$$P() = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'), \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')},$$

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N) \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}),$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}).$$

$$A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B).$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\}) \, \forall x \in S_X, \quad F_X(x) = P(X \leq x), \quad \lim_{t \to x^-} F(t) = P(X < x), \quad E(X) = \sum_{x \in S_X} x p_X(x),$$

$$E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x), \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X - \mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX + b) = a^2 \mathrm{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} {}^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \; e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

$$X \sim \mathrm{Bern}(p), \quad p_X(0) = 1 - p, \; p_X(1) = p, \; E(X) = p, \; \mathrm{VAR}(X) = p(1-p),$$

$$X \sim \text{Διων}(N, p), \; p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \; E(X) = Np, \; \mathrm{VAR}(X) = Np(1-p),$$

$$X \sim \text{Γεωμ}(p), \; p_X(k) = (1-p)^{k-1} p, \; E(X) = 1/p, \; \mathrm{VAR}(X) = (1-p)/p^2, \; P(X \geq m + n | X > n) = P(X \geq m), \; m \geq 1, n \geq 0,$$

$$X \sim \text{Υπερ}(N, k, n), \; p_X(m) = \frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}}, \; E(X) = \frac{nk}{N}, \; \mathrm{VAR}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$

$$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda), \; p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \; E(X) = \lambda, \; \mathrm{VAR}(X) = \lambda.$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in S_X, \, \forall y \in S_Y, \quad p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{XY}(x, y),$$

$$E(g(X, Y)) = \sum_{x, y} g(x, y) p_{XY}(x, y), \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X, Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X, Y)),$$

$$\mathrm{COV}(X, Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E(XY) - E(X)E(Y), \; \mathrm{VAR}(X + Y) = \mathrm{VAR}(X) + \mathrm{VAR}(Y) + 2\mathrm{COV}(X, Y),$$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B) \, \forall A, B \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \, \forall x, y,$$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X, Y) = 0, \quad p_{X+Y}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k) p_Y(m - k), \; m \in \mathbb{Z},$$

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{COV}(X_i, X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx, \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t} f(x)\,dx,$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_{B} f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_{a}^{b} f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b], \\ 0, & \text{για } x\notin[a,b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0, \\ 0, & \text{για } x<0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0, \end{cases} \quad E(X) = \theta, \quad \mathrm{VAR}(X) = \theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X) = \mu, \quad \mathrm{VAR}(X) = \sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y) : a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx,$$

$$R = \{(x,y) : a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy,$$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases} \int_a^b \Big(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\Big)\,dx, \\ \int_c^d \Big(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\Big)\,dy, \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X,Y)),$$

$$X,Y \text{ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X,Y \text{ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c) \le \frac{E(X)}{c}, \qquad c>0 \Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c) \le \frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1, X_2, \ldots \text{ ανεξ. με κοινή κατ.}, \ E(X_i) = \mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N = \mu\big) = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i) = \sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu) = \frac{\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P\big(a\le\bar{S}_N\le b\big)\to\Phi(b)-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty. \end{cases}$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2018-2019
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΝΤΟΓΙΑΝΝΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Σεπτεμβρίου Ακ. Έτους 2018-2019

1. **(Δασκάλα Πιάνου)** Στην αρχή του σχολικού έτους, μια δασκάλα πιάνου σχεδιάζει το πρόγραμμα των μαθημάτων που θα διδάσκει κάθε βδομάδα. Συνολικά, μπορεί να διδάξει σε 20 ώρες, που τις ονομάζουμε $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$, κατά τη διάρκεια της εβδομάδας, ένα διαφορετικό μαθητή την κάθε ώρα. Με την δασκάλα επικοινωνούν συνολικά 10 μαθητές, προκειμένου να κανονίσουν την ώρα του εβδομαδιαίου μαθήματός τους, καθένας εκ των οποίων επιλέγει, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, και χωρίς προτίμηση στην ώρα που επιλέγει, μία μόνο από τις 20 ώρες. Αν 2 ή περισσότεροι μαθητές επιλέξουν την ίδια ώρα, τότε η δασκάλα θα επιλέξει έναν από αυτούς, και ο άλλος δεν θα επιλέξει άλλη ώρα και δεν θα κάνει μάθημα με τη δασκάλα.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα p_1 να μείνει κενή από μαθητές η ώρα A_1;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή του πλήθους X των μαθητών που θα παραμείνουν;

   (γ΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα p_2 να επιλέξουν όλοι οι μαθητές διαφορετικές ώρες μεταξύ τους, και επομένως να μείνουν και οι 10;

   (δ΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα p_3 να μείνουν ακριβώς 9 μαθητές;

   Λύση:

   (α΄) Για να μείνει κενή η ώρα A_1 θα πρέπει να μην επιλέγει από κανένα μαθητή. Κάθε φοιτητής δεν την επιλέγει με πιθανότητα $\frac{19}{20}$, ανεξάρτητα από τους άλλους, άρα τελικά η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

   $$p_1 = \left(\frac{19}{20}\right)^{10}.$$

   (β΄) Ορίζουμε τις βοηθητικές μεταβλητές X_i, $i = 1, \ldots, 20$, όπου $X_i = 1$ όταν χρησιμοποιηθεί η ώρα i, και $X_i = 0$ αν δεν χρησιμοποιηθεί η ώρα i. Έχουμε

   $$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{20} X_i\right) = \sum_{i=1}^{20} E(X_i) = 20\left(1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{10}\right) \simeq 8.0253.$$

   (γ΄) Θα μείνουν και οι 10 μαθητές, αν ο πρώτος επιλέξει οποιαδήποτε ώρα (αυτό γίνεται με πιθανότητα 1), ο δεύτερος επιλέξει οποιαδήποτε ελεύθερη ώρα (αυτό γίνεται με πιθανότητα $\frac{19}{20}$), κοκ, άρα τελικά η ζητούμενη πιθανότητα είναι

   $$p_2 = \frac{19}{20} \times \frac{18}{20} \times \frac{17}{20} \times \cdots \times \frac{11}{20} = \frac{19!}{10!20^9} \simeq 0.0655.$$

   (δ΄) Θα μείνουν ακριβώς 9 μαθητές αν ακριβώς 8 επιλέξουν διαφορετικές ώρες, και υπάρξουν 2 που επιλέξουν την ίδια. Για να υπολογίσουμε αυτή την πιθανότητα, παρατηρούμε ότι κάθε ένας από τους 10 μαθητές έχει 20 επιλογές για την ώρα που θα επιλέξει, άρα συνολικά ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 20^{10} αποτελέσματα. Θα πρέπει, λοιπόν, να υπολογίσουμε πόσα από αυτά αντιστοιχούν σε 9 κατειλημμένες ώρες. Παρατηρούμε πως έχουμε 20 επιλογές για το ποια ώρα θα διεκδικηθεί από 2 φοιτητές. Έχουμε, επίσης, $\binom{10}{2}$ επιλογές για το ζεύγος των μαθητών που θα διεκδικήσουν την ίδια ώρα. Έχουμε, τέλος, 19 επιλογές ώρας για τον 3ο μαθητή, 18 επιλογές για τον 4ο μαθητή, κοκ, και τελικά 12 επιλογές για τον 10ο μαθητή. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

   $$p_3 = \frac{20 \times \binom{10}{2} \times 19 \times 18 \times 17 \times \cdots \times 12}{20^{10}} \simeq 0.2678.$$

2. **(Βάσια)** Ο κυβερνήτης του υποβρυχίου «Χατζηπαναγής» έχει στο στόχαστρο ένα κομβόι από 2 εχθρικά μεταγωγικά, το A και το B. Έχει στη διάθεσή του 5 τορπίλες, τις οποίες, για λόγους ασφαλείας, πρέπει να εκτοξεύσει όλες, και σχεδόν ταυτόχρονα, και πριν προλάβει να διαπιστώσει αν κάποια από αυτές έχει βρει στόχο. Κάθε τορπίλη θα πετύχει και θα βυθίσει το μεταγωγικό στο οποίο θα τη στείλει ο καπετάνιος με πιθανότητα $p = \frac{1}{4}$. Ο καπετάνιος ξέρει ότι το μεταγωγικό A έχει αξία, για τον εχθρό, 4 εκατομμύρια ευρώ, ενώ το μεταγωγικό B έχει αξία 8 εκατομμύρια ευρώ.

(α΄) *(1 μονάδα)* Αν ο καπετάνιος στείλει 3 τορπίλες στο μεταγωγικό A και 2 τορπίλες στο μεταγωγικό B, πόση είναι η αναμενόμενη τιμή της ζημιάς που θα επιφέρει στον εχθρό;

(β΄) *(1 μονάδα)* Αν ο καπετάνιος θέλει να μεγιστοποιήσει τη ζημιά που θα επιφέρει στον εχθρό, πόσες τορπίλες πρέπει να στείλει στο μεταγωγικό A και πόσες στο B;

Λύση: Θα λύσουμε και τα δύο σκέλη μαζί. Έστω x, με $x = 0, 1, \dots, 5$, το πλήθος των τορπιλών που ο καπετάνιος θα αποστείλει στο μεταγωγικό A. Το μεταγωγικό A θα βυθιστεί αν δεν αστοχήσουν όλες, επομένως να βυθιστεί με πιθανότητα $\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x\right)$. Με παρόμοιο συλλογισμό, το μεταγωγικό B θα βυθιστεί με πιθανότητα $\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}\right)$. Επομένως, η αναμενόμενη τιμή του κόστους στον εχθρό θα είναι

$$E(C) = 4 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x\right) + 8 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}\right) = \begin{cases} 6.1016, & x = 0, \\ 6.4688, & x = 1, \\ 6.3750, & x = 2, \\ 5.8125, & x = 3, \\ 4.7344, & x = 4, \\ 3.0508, & x = 5. \end{cases}$$

Επομένως, αν ο κυβερνήτης στείλει 3 τορπίλες στο μεταγωγικό A, το αναμενόμενο κόστος στον εχθρό θα είναι $E(C_3) = 5.8125$, ενώ αν ο κυβερνήτης στείλει 1 τορπίλες στο μεταγωγικό A, το αναμενόμενο κόστος στον εχθρό θα είναι $E(C_1) = 6.4688$, που είναι και το μεγαλύτερο δυνατό.

3. **(Πιτόγυρα και ρετσίνες)** Μια ταβέρνα σερβίρει μόνο πιτόγυρα (για 2 ευρώ) και μπουκάλια ρετσίνας (για 4 ευρώ). Κάθε πελάτης καταναλώνει X πιτόγυρα και Y μπουκάλια ρετσίνας, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες, όπου οι X και Y είναι τυχαίες μεταβλητές με από κοινού μάζα πιθανότητας $p_{XY}(x, y)$ που περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα:

x / y	1	2	3	4
0	1/8	1/24	1/24	1/24
1	1/24	1/8	1/24	1/24
2	1/24	1/24	1/8	1/24
3	1/24	1/24	1/24	1/8

(α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η μάζα πιθανότητας της Τ.Μ. Z που περιγράφει το ποσό που πληρώνει ο κάθε πελάτης;

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της Τ.Μ. Z;

(γ΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα η συνολική είσπραξη από τους πρώτους 10.000 πελάτες να ξεπερνά τις 111.000 ευρώ;

Λύση

(α΄) Οι τιμές που λαμβάνει η Τ.Μ. Z συναρτήσει των X, Y, δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x / y	1	2	3	4
0	2	4	6	8
1	6	8	10	12
2	10	12	14	16
3	14	16	18	20

Επομένως, έχουμε ότι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της Z είναι η

$$\begin{aligned} P(Z = 2) &= \frac{1}{8}, \\ P(Z = 4) &= \frac{1}{24}, \\ P(Z = 6) &= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}, \\ P(Z = 8) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{6}, \\ P(Z = 10) &= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(Z=12) &= \frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{12},\\
P(Z=14) &= \frac{1}{8}+\frac{1}{24}=\frac{1}{6},\\
P(Z=16) &= \frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{12},\\
P(Z=18) &= \frac{1}{24},\\
P(Z=20) &= \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

(β΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= 2\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{24}+6\times\frac{1}{12}+8\times\frac{1}{6}+10\times\frac{1}{12}\\
&\quad +12\times\frac{1}{12}+14\times\frac{1}{6}+16\times\frac{1}{12}+18\times\frac{1}{24}+20\times\frac{1}{8},\\
E(Z) &= 2^2\times\frac{1}{8}+4^2\times\frac{1}{24}+6^2\times\frac{1}{12}+8^2\times\frac{1}{6}+10^2\times\frac{1}{12}=11\\
&\quad +12^2\times\frac{1}{12}+14^2\times\frac{1}{6}+16^2\times\frac{1}{12}+18^2\times\frac{1}{24}+20^2\times\frac{1}{8}=\frac{458}{3},\\
\mathrm{VAR}(Z)=\sigma^2 &= E(Z^2)-(E(Z))^2=\frac{95}{3}.
\end{aligned}
$$

(γ΄) Έστω $Z_i, i=1,\ldots,N$, όπου $N=10.000$, η είσπραξη από τον κάθε πελάτη. Κατά τα γνωστά από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα,

$$
P(\sum_{i=1}^{N} Z_i > K) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} Z_i - NE(Z)}{\sigma\sqrt{N}} > \frac{K-NE(Z)}{\sigma\sqrt{N}}\right) = 1-\Phi\left(\frac{K-NE(Z)}{\sigma\sqrt{N}}\right)
$$

$$
1-\Phi\left(\frac{111000-11\times 10000}{\sqrt{10000}\times\sqrt{95/3}}\right) = 1-\Phi(10\sqrt{3}95) = 1-\Phi(1.7770)\simeq 0.0378.
$$

4. **(Άγνωστες παράμετροι)** Έστω Τ.Μ. X με την ακόλουθη πυκνότητα πιθανότητας:

$$
f(x)=\begin{cases} Ke^{-x}, & x\in[0,A],\\ 0, & x\notin[0,A].\end{cases}
$$

όπου οι K, A είναι άγνωστες πραγματικές θετικές παράμετροι.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε την τιμή του K συναρτήσει του A.

(β΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την τιμή της μέσης τιμής της X συναρτήσει των τιμών των K και A.

(γ΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F(y)=P(Y\le y)$ της Τ.Μ. $Y=2X+1$.

Λύση:

(α΄) Το ολοκλήρωμα της $f(x)$ πρέπει να είναι μονάδα. Επομένως,

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^A Ke^{-x}dx = 1 \Leftrightarrow \left[Ke^{-x}\right]_A^0 = 1 \Leftrightarrow K-Ke^{-A}=1
$$

$$
\Leftrightarrow K[1-e^{-A}]=1 \Leftrightarrow K=\frac{1}{1-e^{-A}}.
$$

(β΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^A Kxe^{-x}\,dx = \int_0^A Kx(-e^{-x})'\,dx = \left[-Kxe^{-x}\right]_0^A + K\int_0^A e^{-x}\,dx\\
&= -KAe^{-A}+K-Ke^{-A} = K\left[1-Ae^{-A}-e^{-A}\right].
\end{aligned}
$$

(γ΄) Παρατηρούμε πως

$$P(Y \leq y) = P[2X + 1 \leq y] = P[2X \leq y - 1] = P\left[X \leq \frac{y-1}{2}\right] = \int_{-\infty}^{\frac{y-1}{2}} f(x)\, dx.$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να εξετάσουμε διαφορετικές περιπτώσεις. Αν $\frac{y-1}{2} < 0$, τότε $P(Y \leq y) = 0$. Αν $\frac{y-1}{2} > A$, τότε το ολοκλήρωμα περιλαμβάνει όλο το θετικό κομμάτι της πυκνότητας $f(x)$, επομένως $P(Y \leq y) = 1$. Τέλος, αν $0 \leq \frac{y-1}{2} < A \Leftrightarrow 1 < y < 2A + 1$, τότε

$$\int_{-\infty}^{\frac{y-1}{2}} f(x)\, dx = \int_{0}^{\frac{y-1}{2}} K e^{-x}\, dx = \left[K e^{-x}\right]_{\frac{y-1}{2}}^{0} = K - K e^{-\frac{y-1}{2}}.$$

Συγκεντρωτικά:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1, \\ K - K e^{-\frac{y-1}{2}}, & 1 \leq y \leq 2A + 1, \\ 1, & y > 2A + 1. \end{cases}$$