13/12/24 $8^{\underline{o}}$ Μαθημα

Παραδειγμα ΠΚΠ-1.

Δινεται το π.μ-γ.π

$$\max \ -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$$
$$\text{υπο} \quad 5x_1 + 2x_2 \le 10$$

i) Ν δ ο ειναι πκπ

ii) Να λυθει με συνθηκες ΚΚΤ

Λυση

i) $$\max \ -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$$
$$\text{υπο} \quad 5x_1 + 2x_2 - 10 \le 0$$

$$f(x_1,x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$$
$$g_1(x_1,x_2) = 5x_1 + 2x_2 - 10$$

$g_1(x_1,x_2)$ ειναι κυρτη ως γραμμικη

Καθε γραμμικη συν/ση ειναι κυρτη και κοιλη ταυτοχρονα

Θελουμε ν δ ο η f ειναι κοιλη

$$\nabla f(x_1,x_2) = (-6x_1 + 2x_2 - 2, \ -4x_2 + 2x_1 + 3)$$

$$H_{f(x_1,x_2)} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-H_{f(x_1,x_2)} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad |6| = 6 > 0$$
$$\det -H_{f(x_1,x_2)} = 24 - 4 = 20 > 0$$

Αρα $-H_{f(x_1,x_2)}$ ειναι θετικα ορισμενος

Αρα $H_f(x_1,x_2)$ ειναι αρνητικα ορισμενος

Αρα η $f(x_1,x_2)$ κοιλη.

Τελικα εχουμε πκπ-1.

ii) Θελω $\mu_1 \geq 0$.

Συν/ση Lagrange:

$$L(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) - \mu_1 g_1(x)$$

$$\Rightarrow L(x_1,x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2 - \mu_1(5x_1 + 2x_2 - 10)$$

KKT:

KKT_1 i) $\mu_1 \geq 0$

KKT_2 ii) $\frac{\partial L}{\partial x_1} = -6x_1 + 2x_2 - 2 - 5\mu_1 = 0$

KKT_3 $\frac{\partial L}{\partial x_2} = -4x_2 + 2x_1 + 3 - 2\mu_1 = 0$

KKT_4 iii) $5x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0$

KKT_5 iv) $\mu_1(5x_1 + 2x_2 - 10) = 0$

Παιρνουμε περιπτωσεις

1. $\mu_1 = 0$
2. $\mu_1 > 0$

1. $\mu_1 = 0$

Απο KKT_3 : $-4x_2 + 2x_1 + 3 = 0$

$$\Rightarrow 2x_1 = 4x_2 - 3$$
$$x_1 = 2x_2 - 3/2$$

KKT_2 : $-6x_1 + 2x_2 - 2 = 0$

$$-6(2x_2 - 3/2) + 2x_2 - 2 = 0$$

$$-12x_2 + 9 + 2x_2 - 2 = 0$$

$$10x_2 = 7$$
$$x_2 = 7/10$$

Αρα $x_1 = 7/5 - 3/2 = \frac{14}{10} - \frac{15}{10} = -1/10$
Ικανοποιει KKT 1,2,3,4,5.

2. $\mu_1 > 0$

Απο KKT_5 : $5x_1 + 2x_2 - 10 = 0$

$$2x_2 = -5x_1 + 10$$
$$x_2 = -5/2\, x_1 + 5$$

Απο KKT_2 : $5\mu_1 = -6x_1 + 2(-5/2\, x_1 + 5) - 2$

$$5\mu_1 = -6x_1 - 5x_1 + 10 - 2$$

$$5\mu_1 = -11x_1 + 8$$
$$\mu_1 = -11/5\, x_1 + 8/5$$

Απο KKT_3 : $-4\left(-\frac{5}{2}x_1+5\right)+2x_1+3-2\left(-\frac{11}{5}x_1+\frac{8}{5}\right)=0$

$$\Rightarrow 10x_1-20+2x_1+3+\frac{22}{5}x_1-\frac{16}{5}=0$$

$$\Rightarrow \frac{12\cdot 5x_1}{5}+\frac{22}{5}x_1-\frac{17\cdot 5}{5}-\frac{16}{5}=0$$

$$\frac{82}{5}x_1-\frac{101}{5}=0$$

$$82x_1=101$$

$$x_1=\frac{101}{82}$$

Αρα $\mu_1=\frac{8}{5}-\frac{11}{5}\cdot\frac{101}{82}$

$$\mu_1=\frac{656-1.111}{410}=\frac{-455}{410}=\frac{-91}{82}<0$$

Αδυνατο λογω KKT_1.

SOS! Οταν βρισκω μια λυση μπορω να σταματησω.

3/1/25 αναλ

Πορισμα

Εστω π.μ-γ.π της μορφης

$$\max f(\underline{x})$$
$$\text{υπο } x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots n \qquad \text{ΠΚΠ-2}$$

οπου $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοιλη

Αν υπαρχει $\underline{x}^* = (x_1^*, \dots x_n^*)$ που να ικανοποιει τις συνθηκες:

i) $x_j^* \geq 0 \quad j = 1, \dots n$

ii) $\dfrac{\partial f(\underline{x}^*)}{\partial x_j} \leq 0 \quad j = 1, \dots n$

iii) $x_j^* \dfrac{\partial f(\underline{x}^*)}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, \dots n$

τοτε το $\underline{x}^*$ ειναι βελτιστη λυση του ΠΚΠ-

Παραδειγμα ΠΚΠ-2

Δινεται το πμ-γ.π

$$\max \ \ln(1 + x_1) - x_1 - x_2$$
$$\text{υπο} \ \ x_1, x_2 \geq 0$$

1) Ν.δ.ο ειναι π.κ.π

2) Να λυθει με συνθηκες ΚΚΤ

Λυση

1) Εχω $\ln(1+x_1)$ που ειναι κοιλη

Εχω $-(x_1+x_2)$ που ειναι γραμμικη

Αρα η $f(x_1,x_2)$ ειναι κοιλη ως αθροισμα κοιλης με γραμμικη.

Αρα ειναι ΠΚΠ-2

2) i) $x_1 \geq 0$ ΚΚΤ-1

$x_2 \geq 0$ ΚΚΤ-2

ii) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{1+x_1} - 1 \leq 0$ ΚΚΤ-3

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -1 \leq 0$ ΚΚΤ-4

iii) $x_1 \cdot \left(\frac{1}{1+x_1} - 1\right) = 0$ ΚΚΤ-5

$x_2\,(-1) = 0$ ΚΚΤ-6

Περιπτωσεις: $x_1 = 0$ ή $x_1 > 0$

$x_2 = 0$ ή $x_2 > 0$

Περιπτωση 1: $x_1 = 0$ $x_2 = 0$

Ικανοποιουνται ολες οι συνθηκες.

Αρα $(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$

Περιπτωση 2: $x_1 = 0$ κ' $x_2 > 0$

Απο KKT-6 $x_2 \le 0$. Ατοπο

Περιπτωση 3: $x_1 > 0$ κ' $x_2 = 0$

Απο KKT-5: $\frac{1}{1+x_1} - 1 = 0$

$\Rightarrow 1 + x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$. Ατοπο

Περιπτωση 4: $x_1 > 0$ κ' $x_2 > 0$

Απο KKT-5: $\frac{1}{1+x_1} - 1 = 0$

Απο KKT-6: $-1 = 0$ Ατοπο.

Πορισμα

Εστω πμ-γπ της μορφης

$$\begin{aligned} \max \quad & f(\underline{x}) \\ \text{υπο} \quad & g_1(x) \le 0 \\ & \vdots \\ & g_p(x) \le 0 \\ & x_j \ge 0 \quad j = 1, \dots n \end{aligned}$$

ΠΚΠ-3

οπου $f: \mathbb{R}^n - \mathbb{R}$ κοιλη, $g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτες για $i = 1, \dots n$.

Θεωρουμε τους πολλαπλασιαστες $\mu_1, \ldots, \mu_p \geq 0$ και τη Lagrange:

$$L(\underline{x}) = f(\underline{x}) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(\underline{x})$$

Αν τα $\underline{x}^* = (x_1^*, \ldots x_n^*)$ κ' $\underline{\mu}^* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_p)$ ικανοποιουν τις συνθηκες:

i) $\mu_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots p$

ii) $\dfrac{\partial L(\underline{x}^*)}{\partial x_j} \leq 0 \quad j = 1, \ldots n$

iii) $x_j^* \dfrac{\partial L(\underline{x}^*)}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, \ldots n$

iv) $\mu_i^* g_i(\underline{x}^*) = 0 \quad i = 1, \ldots p$

v) $g_i(\underline{x}^*) \leq 0, \quad i = 1, \ldots p$

vi) $x_j^* \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n$

Παραδειγμα ΠΚΠ-3

Δινεται το πμ-γπ

$$\max \quad -x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 5x_1 + 7x_2 + 8$$
$$\text{υπο} \quad 3 - 5x_2 \geq 2x_1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1) Ν.δ.ο. ειναι πκπ

2) Να λυθει με ΚΚΤ

Λυση

1) max $-x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 5x_1 + 7x_2 + 8$

υπο $2x_1 + 5x_2 - 3 \le 0$

Η $g_1(x_1,x_2) = 2x_1 + 5x_2 - 3$ ειναι κυρτη ως γραμμικη

Θ.δ.ο $f(x_1,x_2)$ κοιλη

$\nabla f(x_1,x_2) = (-2x_1 + 2x_2 - 5, -6x_2 + 2x_1 + 7)$

$Hf(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

$-Hf(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad |2| = 2 > 0$

$\det(-Hf(x_1,x_2)) = 12 - 4 = 8 > 0$

Αρα ο $-Hf(x_1,x_2)$ ειναι θετικα ορισμενος

Αρα ο $Hf(x_1,x_2)$ ειναι αρνητικα ορισμενος

Αρα $f(x_1,x_2)$ κοιλη. Τελικα εχω πκπ

2) Θεωρω $\mu_1 \ge 0$

Lagrange: $L(x_1,x_2) = -x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 5x_1 + 7x_2 + 8 - \mu_1(2x_1 + 5x_2 - 3)$

i) $\mu_1 \ge 0$ KKT-1

ii) $\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + 2x_2 - 5 - 2\mu_1 \le 0$ KKT-2

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -6x_2 + 2x_1 + 7 - 5\mu_1 \le 0 \quad KKT\text{-}3$$

iii) $x_1 \cdot (-2x_1 + 2x_2 - 5 - 2\mu_1) = 0 \quad KKT\text{-}4$

$x_2(-6x_2 + 2x_1 + 7 - 5\mu_1) = 0 \quad KKT\text{-}5$

iv) $\mu_1 \cdot (2x_1 + 5x_2 - 3) = 0 \quad KKT\text{-}6$

v) $2x_1 + 5x_2 - 3 \le 0 \quad KKT\text{-}7$

vi) $x_1 \ge 0 \quad KKT\text{-}8$

$x_2 \ge 0 \quad KKT\text{-}9$

Περιπτωσεις:
1) $\mu_1 = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 0$
2) $\mu_1 = 0 \quad x_1 > 0 \quad x_2 = 0$
3) $\mu_1 = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 > 0$
4) $\mu_1 > 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 0$
5) $\mu_1 > 0 \quad x_1 > 0 \quad x_2 = 0$
6) $\mu_1 > 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 > 0$
7) $\mu_1 > 0 \quad x_1 > 0 \quad x_2 > 0$
8) $\mu_1 = 0 \quad x_1 > 0 \quad x_2 > 0$

Περιπτωση 1:
Απο KKT-3: $7 \le 0$ Ατοπο

Περιπτωση 3:
Απο KKT-5: $-6x_2 + \cancel{2x_1}^{0} + 7 - \cancel{5\mu_1}^{0} = 0$

$$x_2 = 7/6$$

Ομως KKT-7 δεν ικανοποιειται

Περιπτωση 2:

Απο ΚΚΤ-4: $-2x_1 + 2x_2 - 5 - 2\mu_1 = 0$

$-2x_1 - 5 = 0$

$x_1 = -5/2$ Ατοπο

Περιπτωση 4:

Απο ΚΚΤ-6: $2x_1 + 5x_2 - 3 = 0$

$-3 = 0$ Ατοπο

Περιπτωση 8:

Απο ΚΚΤ-4: $-2x_1 + 2x_2 - 5 - \cancel{2\mu_1}^{\to 0} = 0$

$x_1 = x_2 - 5/2$

Απο ΚΚΤ-5: $-6x_2 + 2x_1 + 7 - \cancel{5\mu_1}^{\to 0} = 0$

$-6x_2 + 2x_2 - 5 + 7 = 0$

$-4x_2 + 2 = 0$

$x_2 = 2/4 = 1/2$

Αρα $x_1 = -4/2$ Ατοπο

Περιπτωση 6:

Απο ΚΚΤ-6: $2\cancel{x_1}^{\to 0} + 5x_2 - 3 = 0$

$x_2 = 3/5$

Απο ΚΚΤ-5: $-6 \cdot 3/5 + 2 \cdot 0 + 7 - 5\mu_1 = 0$

$5\mu_1 = 7 - \frac{18}{5}$

$\mu_1 = \frac{7}{5} - \frac{18}{25} = \frac{17}{25}$

Ικανοποιουνται ολες οι συνθηκες ΚΚΤ

$(x_1^*, x_2^*) = (0, 3/5)$