Το πρόβλημα της μίξης των υλικών

- n τύποι προϊόντων προς παραγωγή. $j = 1, \dots, n$
- m τύποι πρώτων υλών. , $i = 1, \dots, m$
- a_{ij}: ποσότητα από την πρώτη ύλη i που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- b_i: διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης i.
- c_j: καθαρό κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- Στόχος είναι η μεγιστοποίηση του συνολικού καθαρού κέρδους από την πώληση των προϊόντων.

Μεταβλητές απόφασης:

x_j = ποσότητα προϊόντος τύπου j που θα φτιάξουμε, $j=1,\dots,n$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad , i=1,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 , \quad j=1,\dots,n$$

Σε ανεπτυγμένη μορφή

$$\max \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

υπό

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \le b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \le b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \le b_m$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$$

Το πρόβλημα της μίξης - Μοντελοποίηση

- x_j: ποσότητα προϊόντος j που θα παραχθεί.
- Το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού:

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$

Το πρόβλημα της αποτίμησης των υλικών

- n τύποι προϊόντων προς παραγωγή.
- m τύποι πρώτων υλών.
- a_{ij}: ποσότητα από την πρώτη ύλη i που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- b_i: διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης i.
- c_j: καθαρό κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- Στόχος είναι ο καθορισμός τιμών ανά μονάδα πρώτης ύλης ώστε να ελαχιστοποιείται η συνολική αξία των πρώτων υλών στην οποία είναι πρόθυμη η επιχείρηση να τις πουλήσει αντί να παραγάγει προϊόντα.

Μεταβλητές απόφασης:

y_i = τιμή ανά μονάδα πρώτης ύλης i , $i=1,\dots,m$

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

υπό

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i}_{\substack{\text{χρήματα που θα κερδίσει}\\ \text{αν πουλήσει τις πρώτες}\\ \text{ύλες με τις οποίες}\\ \text{θα έφτιαχνε μια μονάδα}\\ \text{προϊόντος } j}} \geq \underbrace{c_j}_{\substack{\text{χρήματα που θα κερδίσει η}\\ \text{εταιρεία αν φτιάξει μια μονάδα}\\ \text{προϊόντος } j \text{ και την}\\ \text{πουλήσει.}}} \quad , \quad j=1,\dots,n$$

$$y_i \geq 0 \; , \; i=1,\dots,m$$

Σε ανεπτυγμένη μορφή

$$\min \quad b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

υπό

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1$$

$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m \geq c_2$$

$$\vdots$$

$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \geq c_n$$

$$y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0 .$$

Το πρόβλημα της αποτίμησης - Μοντελοποίηση

- y_i: τιμή ανά μονάδα πρώτης ύλης i που θα πωληθεί.
- Το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\
\text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\
 & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m.
\end{array}
$$

πρόβλημα παραγωγής

max $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

υπό

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m$

$x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$

πρόβλημα επιτίμησης

min $b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$

υπό

$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1$

$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2$

$\vdots$

$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \ge c_n$

$y_1, y_2, \dots, y_m \ge 0$.

Π.Π.		Π.Ε.
συντελεστές στην α.σ.	$\longleftrightarrow$	σταθεροί όροι στους γρ. περιορ.
σταθεροί όροι στους γρ. περιορ.	$\longleftrightarrow$	συντελεστές της α.σ.
max με περ. $\le$	$\longleftrightarrow$	min με περ. $\ge$
πίνακας συντελεστών στους γρ. περιορισμούς ο A	$\longleftrightarrow$	πίνακας συντελεστών στους γρ. περιορισμούς ο ανάστροφος του A, ο A' (A^T)
n μεταβλητές απόφασης	$\longleftrightarrow$	n γραμμικοί περιορισμοί
m γρ. περιορισμοί	$\longleftrightarrow$	m μεταβλητές απόφασης

Δυϊκότητα

- Για κάθε π.γ.π.

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \dots, m \\
& x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, n.
\end{array}
$$

n μετ. αποφ.
m περ. περιορ.

ορίζεται το δυϊκό του π.γ.π.

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\
\text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \dots, n \\
& y_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m.
\end{array}
$$

m μετ. αποφ.
n περ. περιορ.

Παράδειγμα

- Εργοστάσιο κατεργασίας μεταλευμάτων παράγει δυο κράματα
  - Ορείχαλκο με τιμή 3 ευρώ ανά μονάδα
  - Μπρούντζο με τιμή 5 ευρώ ανά μονάδα.
- Για μια μονάδα κράματος απαιτούνται
  - 1 μονάδα ψευδάργυρου, 3 μονάδες χαλκού για ορείχαλκο
  - 2 μονάδες κασσίτερου, 2 μονάδες χαλκού για μπρούντζο.
- Το εργοστάσιο έχει
  - 4 μονάδες ψευδάργυρου,
  - 12 μονάδες κασσίτερου,
  - 18 μονάδες χαλκού.
- Βέλτιστο σχέδιο μίξης;
- Βέλτιστη αποτίμηση υλικών;

Θα κάνω μοντελοποίηση
για το πρόβλημα παραγωγής.
Το πρόβλημα αποτίμησης
θα είναι το δυϊκό του.

Πρόβλημα μίξης υλικών (πρόβλημα παραγωγής)

Μεταβλητές απόφασης:

x_1 : ποσότητα ορείχαλκου που θα παραχθεί

x_2 : ποσότητα μπρούντζου που θα παραχθεί

$$\max \; 3x_1 + 5x_2$$

υπό

$$1x_1 \le 4$$
$$2x_2 \le 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

2 μετ. απόφασης

3 γρ. περιορισμοί

Πρόβλημα αποτίμησης πρώτων υλών

Είναι το δυικό του προβλήματος μίξης.

$$\min \; 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

υπό

$$1y_1 + 0y_2 + 3y_3 \ge 3$$
$$0y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 5$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

2 γρ. περιορισμοί

3 μετ. απόφασης

y_1, y_2, y_3

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης

- Μεταβλητές απόφασης:
  x_1: Μονάδες ορείχαλκου που θα παραχθούν,
  x_2: Μονάδες μπρούντζου που θα παραχθούν.
- Π.γ.π.:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & & & \leq & 4 \\
 & & & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Παράδειγμα - Π.γ.π. αποτίμησης

- Μεταβλητές απόφασης:
  y_1: Τιμή ανά μονάδα ψευδάργυρου,
  y_2: Τιμή ανά μονάδα κασσιτέρου,
  y_3: Τιμή ανά μονάδα χαλκού.
- Π.γ.π.:

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & 4y_1 & + & 12y_2 & + & 18y_3 & & \\
\text{υπό} & y_1 & & & + & 3y_3 & \geq & 3 \\
 & & & 2y_2 & + & 2y_3 & \geq & 5 \\
 & & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης και αποτίμησης

- Το δυϊκό του π.γ.π.

$$
\begin{array}{lccccc}
\max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & & & \leq & 4 \\
 & & & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

είναι το

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\min & 4y_1 & + & 12y_2 & + & 18y_3 & & \\
\text{υπό} & y_1 & & & + & 3y_3 & \geq & 3 \\
 & & & 2y_2 & + & 2y_3 & \geq & 5 \\
 & & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

- Το δυϊκό προέκυψε με φυσικό τρόπο από συζυγές οικονομικό πρόβλημα.

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης - Φράγματα

- Έστω το π.γ.π. μίξης

$$\begin{array}{llcrcl}
\max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & & & \leq & 4 \\
& & & 2x_2 & \leq & 12 \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}$$

- Πώς μπορώ να πάρω φράγματα για τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής;

$3x_1 + 5x_2 \le \underbrace{40}$

άνω φράγμα
για την α.σ.

$3x_1 + 5x_2 \le \underbrace{35}$

άνω φράγμα
καλύτερο

Πώς μπορούν να προκύψουν άνω φράγματα;

Μπορούμε να κάνουμε γραμμοπράξεις μεταξύ περιορισμών.

$$
\begin{array}{lll}
(x_1 \le 4) \times 3 & \Rightarrow & 3x_1 \le 12 \\
(2x_2 \le 12) \times \frac{5}{2} & \Rightarrow & 5x_2 \le 30 \\
(3x_1 + 2x_2 \le 18) \times 0 & & \\
\hline
 & & 3x_1 + 5x_2 \le \underbrace{42}
\end{array}
$$

άνω
φράγμα

$3x_1 + 4x_2 \le \underbrace{30}$

δεν είναι άνω
φράγμα
γιατί ο συντελεστής
του x_2 είναι
μικρότερος από τον
συντελεστή στην α.σ.

$$
\begin{array}{lll}
(x_1 \le 4) \times 0 & & \\
(2x_2 \le 12) \times \frac{3}{2} & \Rightarrow & 3x_2 \le 18 \\
(3x_1 + 2x_2 \le 18) \times 1 & & 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\
\hline
 & & 3x_1 + 5x_2 \le \underbrace{36}
\end{array}
$$

άνω φράγμα

$$
\begin{aligned}
&(x_1 \le 4) \times 0 \\
&(2x_2 \le 12) \times 2 \quad \Rightarrow \quad 4x_2 \le 24 \\
&(3x_1 + 2x_2 \le 18) \times 1 \quad\quad 3x_1 + 2x_2 \le 18
\end{aligned}
$$

$$3x_1 + 6x_2 \le 42$$

είναι άνω φράγμα για την τιμή της α.σ. γιατί οι συντελεστές των μεταβλητών είναι $\ge$ από τους συντελεστές στην α.σ.

$$3x_1 + 5x_2 \le 3x_1 + 6x_2 \le 42$$

Άρα για να πάρω άνω φράγματα, πολλαπλασιάζω κάθε περιορισμό με μία μη-αρνητική σταθερά και προσθέτω. Αυτό που προκύπτει είναι άνω φράγμα αν οι συντελεστές των μεταβλητών απόφασης είναι $\ge$ από αυτούς που εμφανίζονται στην α.σ.

Γενικά,

$$
\begin{aligned}
&(x_1 \le 4) \times y_1 \quad \Rightarrow \quad 1y_1x_1 \le 4y_1 \\
&(2x_2 \le 12) \times y_2 \quad \Rightarrow \quad 2y_2x_2 \le 12y_2 \\
&(3x_1 + 2x_2 \le 18) \times y_3 \quad \Rightarrow \quad 3y_3x_1 + 2y_3x_2 \le 18y_3
\end{aligned}
$$

$$(1y_1 + 3y_3)x_1 + (2y_2 + 2y_3)x_2 \le \underbrace{4y_1 + 12y_2 + 18y_3}_{\text{άνω φράγμα}}$$

αν $1y_1 + 3y_3 \ge 3$

και $2y_2 + 2y_3 \ge 5$

Για να βρω το καλύτερο (ελάχιστο) άνω φράγμα, λύνω το

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\min & 4y_1 & + & 12y_2 & + & 18y_3 & & \\
\text{υπό} & 1y_1 & & & + & 3y_3 & \geq & 3 \\
 & & & 2y_2 & + & 2y_3 & \geq & 5 \\
 & & & y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Το αρχικό πρόβλημα ήταν το

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & & & \leq & 4 \\
 & & & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Το πρόβλημα που δίνει το καλύτερο άνω φράγμα είναι το δυϊκό του αρχικού προβλήματος.

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης - Φράγματα

- Έστω το π.γ.π. μίξης

$$
\begin{array}{llcrcl}
\max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & & & \leq & 4 \\
& & & 2x_2 & \leq & 12 \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

- Πώς μπορώ να πάρω φράγματα για τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής;
  Θεώρηση γραμμικών συνδυασμών των περιορισμών.
  Π.χ.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & (& x_1 & & & \leq & 4 &) & \times & 3 \\
+ & (& & & 2x_2 & \leq & 12 &) & \times & 5/2 \\
\hline
 & & 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 42. & & &
\end{array}
$$

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης - Φράγματα

- Π.γ.π:

$$\begin{array}{lcccccc} \max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & 2x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

- Άλλος γραμμικός συνδυασμός περιορισμών - φράγμα:

$$\begin{array}{cccccccccc} & (& x_1 & & & \leq & 4 &) & \times & 3/2 \\ + & (& & & 2x_2 & \leq & 12 &) & \times & 2 \\ + & (& 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 &) & \times & 1/2 \\ \hline & & 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 39. & & & \end{array}$$

- Καλύτερο φράγμα από το προηγούμενο.
  Μπορούμε και καλύτερα;

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης - Φράγματα

- Π.γ.π:

$$\begin{array}{lccccc} \max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & 2x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

- Γενικός γραμμικός συνδυασμός περιορισμών:

$$\begin{array}{cccccc} & (& x_1 & & & \leq & 4) \times y_1 \\ + & (& & & 2x_2 & \leq & 12) \times y_2 \\ + & (& 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18) \times y_3 \\ \hline & & (y_1 + 3y_3)x_1 & + & (2y_2 + 2y_3)x_2 & \leq & 4y_1 + 12y_2 + 18y_3. \end{array}$$

- Δίνει φράγμα για την αντικειμενική μόνο αν $3 \leq y_1 + 3y_3$, $5 \leq 2y_2 + 2y_3$ και $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης - Φράγματα

- Π.γ.π:

$$\begin{array}{llcllcl} \max & 3x_1 & + & 5x_2 & & & \\ \text{υπό} & x_1 & & & & \leq & 4 \\ & & & 2x_2 & & \leq & 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & & \leq & 18 \\ & & & x_1, x_2 & & \geq & 0. \end{array}$$

- Γενικό φράγμα - γραμμικός συνδυασμός περιορισμών:

$$4y_1 + 12y_2 + 18y_3,$$

εφόσον $3 \leq y_1 + 3y_3$, $5 \leq 2y_2 + 2y_3$ και $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

- Βέλτιστο φράγμα - γραμμικός συνδυασμών περιορισμών:

$$\begin{array}{llclclcl} \min & 4y_1 & + & 12y_2 & + & 18y_3 & & \\ \text{υπό} & y_1 & & & + & 3y_3 & \geq & 3 \\ & & & 2y_2 & + & 2y_3 & \geq & 5 \\ & & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Οικονομική ερμηνεία του δυϊκού

- Ένα π.γ.π. της μορφής

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

  μπορεί να θεωρηθεί πρόβλημα κατανομής m πόρων σε n δραστηριότητες.

- Λύση του αρχικού (πρωτεύοντος) π.γ.π:
  Βέλτιστη ένταση ανά δραστηριότητα j.
  Π.χ. Πλήθος προϊόντων τύπου j που θα παραχθούν.
- Λύση του δυϊκού π.γ.π.:
  Μοναδιαία αξία πόρου i.
  Π.χ. Μοναδιαίες αξίες υλικών i.

Φραγματική ερμηνεία του δυϊκού

- Έστω το π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

- Αναζητούμε άνω φράγματα για τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής.
- Μια ιδέα είναι να θεωρήσουμε γραμμικούς συνδυασμούς των περιορισμών.
- Πολλαπλασιάζοντας τον περιορισμό i με $y_i \geq 0$ (ώστε να μην αλλάξει φορά) και προσθέτοντας παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right)} x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i.$$

Φραγματική ερμηνεία του δυϊκού (συνέχεια)

- Για να δώσει η ανισότητα

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$$

φράγμα για την αντικειμενική συνάρτηση πρέπει οι συντελεστές των x_j στο αριστερό μέλος να είναι μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους συντελεστές των x_j στην αντικειμενική, δηλ.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Φραγματική ερμηνεία του δυϊκού (συνέχεια)

- Λύνοντας το δυϊκό π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

βρίσκουμε το καλύτερο άνω-φράγμα της αντικειμενικής του πρωτεύοντος

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

που μπορεί να προκύψει από γραμμικούς συνδυασμούς των περιορισμών του.

Συμμετρία της δυϊκότητας

Θεώρημα

Το δυϊκό του δυϊκού ενός π.γ.π. είναι το αρχικό π.γ.π.

- Το δυϊκό του π.γ.π.

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$

είναι το π.γ.π.

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\
\text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\
& y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m.
\end{array}
$$

Έστω το π.γ.π

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

υπό

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=1,\dots,m \qquad (\Pi)$$

$$x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,n$$

Το δυϊκό του είναι

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

υπό

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j=1,\dots,n \qquad (\Delta)$$

$$y_i \ge 0, \quad i=1,\dots,m$$

Θέλω ν.δ.ο το δυϊκό του δυϊκού είναι το πρωτεύον.

Πρέπει να γράψω το δυϊκό του (Δ).

Πρέπει το (Δ) να είναι σε τυπική μορφή. Άρα το φέρνουμε.

$$-\max \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i$$

m μετ. απόφασης

υπό

$$\sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i \le -c_j, \quad j=1,\dots,n \qquad (\Delta)$$

n γρ. περιορισμοί

$$y_i \ge 0, \quad i=1,2,\dots,m$$

Το δυϊκό του (Δ) είναι:

n μετ. απόφασης: $x_1, x_2, \dots, x_n$

m γρ. περιορισμοί

$$-\min \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$$

υπό

$$\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \ge -b_i, \quad i=1,\dots,m$$

$$x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,n$$

Το δυϊκό του (Δ)

$$-\min \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$$

υπό $\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \geq -b_i \quad i=1,\dots,m$

$x_j \geq 0, \; j=1,\dots,n$

Ισοδύναμα γράφεται

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

υπό $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \;, \quad i=1,\dots,m$

$x_j \geq 0 \;, \; j=1,2,\dots,n$

που είναι το (Π)

Συμμετρία της δυϊκότητας (συνέχεια)

- Το π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

γράφεται σε τυπική μορφή ως

$$\begin{array}{lll} -\max & \sum_{i=1}^{m} -b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} -a_{ij} y_i \leq -c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

του οποίου το δυϊκό είναι

$$\begin{array}{lll} -\min & \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} x_j \geq -b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

Συμμετρία της δυϊκότητας (συνέχεια)

- Το τελευταίο π.γ.π.

$$
\begin{array}{lll}
-\min & \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j & \\
\text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} x_j \geq -b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

γράφεται σε τυπική μορφή ως

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

που είναι ακριβώς το αρχικό.

Τυπική μορφή του δυϊκού

- Δοθέντος ενός π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \ge 0, & j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

η τυπική μορφή του δυϊκού του είναι

$$\begin{array}{lll} -\max & \sum_{i=1}^{m} -b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} -a_{ij} y_i \le -c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \ge 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

- Λεξικό του δυϊκού = Αρνητικός ανάστροφος του λεξικού του πρωτεύοντος.

Ασθενές Δυϊκό Θεώρημα

Θεώρημα

Η αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος σε μια εφικτή λύση του είναι μικρότερη ή ίση της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού σε μια εφικτή λύση του.

- Άμεσο από την φραγματική ερμηνεία του δυϊκού.

Ασθενές Δυϊκό Θεώρημα - Μαθ. διατύπωση

Θεώρημα

Αν $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *είναι εφικτή λύση του πρωτεύοντος και* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *είναι εφικτή λύση του δυϊκού, τότε*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

- Έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \end{aligned}$$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

υπό

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \;\; (1), \quad i=1,\dots,m \qquad (\Pi)$$

$$x_j \ge 0 \;\; (2), \quad j=1,\dots,n$$

Το δυϊκό του είναι

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

υπό

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \;\; (3), \quad j=1,\dots,n \qquad (\Delta)$$

$$y_i \ge 0 \;\; (4), \quad i=1,\dots,m$$

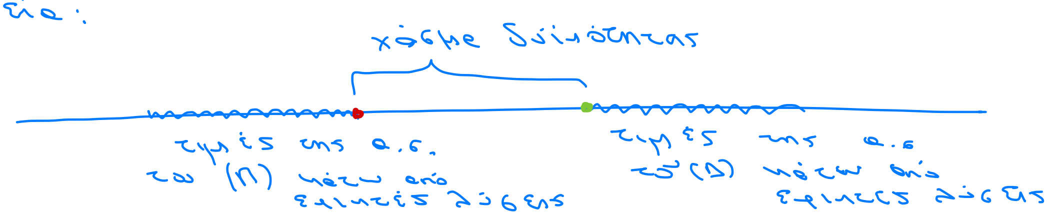
Θέλω ν.δ.ο

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Απόδειξη:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \overset{(3),(2)}{\le} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \overset{(1),(4)}{\le} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad \square$$

Ερμηνεία:



Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Έστω το πρωτεύον π.γ.π. σε τυπική μορφή

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\
\text{υπό} & & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\
 & -3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

- Το δυϊκό του σε τυπική μορφή είναι

$$
\begin{array}{lrcrcr}
-\max & & - & 3y_2 & & \\
\text{υπό} & & & 3y_2 & \leq & 3 \\
 & y_1 & - & 4y_2 & \leq & -2 \\
 & -2y_1 & - & y_2 & \leq & -1 \\
 & & & y_1, y_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\
\text{υπό} & & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\
& -3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
& & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrrrr}
\zeta & = & 0 & -3x_1 & +2x_2 & +1x_3 \\
\hline
w_1 & = & 0 & -0x_1 & +1x_2 & -2x_3 \\
w_2 & = & 3 & +3x_1 & -4x_2 & -1x_3
\end{array}
\qquad (\Pi)
$$

$$
\begin{array}{lrcrcl}
-\max & & - & 3y_2 & & \\
\text{υπό} & & & 3y_2 & \leq & 3 \\
& y_1 & - & 4y_2 & \leq & -2 \\
& -2y_1 & - & y_2 & \leq & -1 \\
& & & y_1, y_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrrr}
\zeta & = & 0 & +0y_1 & -3y_2 \\
\hline
z_1 & = & 3 & +0y_1 & -3y_2 \\
z_2 & = & -2 & -1y_1 & +4y_2 \\
z_3 & = & -1 & +2y_1 & +1y_2
\end{array}
\qquad (\Delta)
$$

- Το λεξικό του (Π) είναι αντίθετο-ανάστροφο του λεξικού του (Δ)

- Η μεταβλητή x_j του (Π) $\longleftrightarrow$ j-οστό περιορισμό του (Δ) $\longleftrightarrow$ περιθώρια μετ. z_j του (Δ)

$$x_j \longleftrightarrow z_j \quad , j = 1, \dots, n$$

- Η μεταβλητή y_i του (Δ) $\longleftrightarrow$ i-οστό περιορισμό του (Π) $\longleftrightarrow$ περιθώρια w_i του (Π)

$$y_i \longleftrightarrow w_i \quad , i = 1, \dots, m$$

Θα κάνω το εξής:

Θα λύνω το (Π) με Simplex.

Στο (Δ) θα κάνω ανάλογη οδήγηση.

Στην ανάλογη οδήγηση, όταν μια μη-βασική μεταβλητή μπαίνει στη βάση στο (Π), βγάζω την αντίστοιχη της από τη βάση στο (Δ).

Όταν μια βασική μεταβλητή βγαίνει από τη βάση στο (Π), βάζω την αντίστοιχη της στη βάση στο (Δ).

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Το αρχικό λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π. είναι

Η x_2 μπαίνει στη βάση ($2>0$)
Η w_2 βγαίνει από τη βάση.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & - & 3x_1 & \boxed{+} & \boxed{2x_2} & + & x_3 \\
\hline
w_1 & = & 0 & & & + & x_2 & - & 2x_3 \\
\boxed{w_2} & = & 3 & + & 3x_1 & - & 4x_2 & - & x_3.
\end{array}$$

z_2 $\qquad$ y_2

- Το αρχικό λεξικό του δυϊκού π.γ.π. είναι

Η z_2 βγαίνει από τη βάση.
Η y_2 μπαίνει στη βάση

επειδή έχω $-\max\ldots$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
-\xi & = & 0 & & & \boxed{-} & \boxed{3y_2} \\
\hline
z_1 & = & 3 & & & - & 3y_2 \\
\boxed{z_2} & = & -2 & - & y_1 & + & 4y_2 \\
z_3 & = & -1 & + & 2y_1 & + & y_2.
\end{array}$$

- Πίνακας δυϊκού = Αντίθετος ανάστροφος πρωτεύοντος.
- Η βασική λύση του πρωτεύοντος είναι εφικτή.
  Η βασική λύση του δυϊκού δεν είναι εφικτή.

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Το αρχικό λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \zeta & = & 0 & - & 3x_1 & + & \boxed{2x_2} & + & x_3 \\ \hline w_1 & = & 0 & & & + & x_2 & - & 2x_3 \\ \boxed{w_2} & = & 3 & + & 3x_1 & - & 4x_2 & - & x_3. \end{array}$$

- Το αρχικό λεξικό του δυϊκού π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rcrcrcr} -\xi & = & 0 & & & - & \boxed{3y_2} \\ \hline z_1 & = & 3 & & & - & 3y_2 \\ \boxed{z_2} & = & -2 & - & y_1 & + & 4y_2 \\ z_3 & = & -1 & + & 2y_1 & + & y_2. \end{array}$$

- Στο πρωτεύον η x_2 μπαίνει στη βάση, η w_2 βγαίνει.
- Εφαρμόζω την ανάλογη οδήγηση στο δυϊκό:
  Η z_2 βγαίνει, η y_2 μπαίνει στη βάση.

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Το 2ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 3/2 & - & 3/2x_1 & - & 1/2w_2 & + & \boxed{1/2x_3} \\
\hline
\boxed{w_1} & = & 3/4 & + & 3/4x_1 & - & 1/4w_2 & - & 9/4x_3 \\
x_2 & = & 3/4 & + & 3/4x_1 & - & 1/4w_2 & - & 1/4x_3.
\end{array}$$

Η x_3 μπαίνει στη βάση ($1/2>0$)
Η w_1 βγαίνει από τη βάση ($\min\{\frac{1}{3}, 3\} = \frac{1}{3}$) y_1
→ z_3
Μηδ για $x_3 = 1/3$
Μηδ για $x_3 = 3$

- Το 2ο λεξικό του δυϊκού π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rcrcrcr}
-\xi & = & -3/2 & \boxed{-} & \boxed{3/4y_1} & - & 3/4z_2 \\
\hline
z_1 & = & 3/2 & - & 3/4y_1 & - & 3/4z_2 \\
y_2 & = & 1/2 & + & 1/4y_1 & + & 1/4z_2 \\
\boxed{z_3} & = & -1/2 & + & 9/4y_1 & + & 1/4z_2.
\end{array}$$

Η z_3 βγαίνει από τη βάση
Η y_1 μπαίνει στη βάση

- Πίνακας δυϊκού = Αντίθετος ανάστροφος πρωτεύοντος
- Στο πρωτεύον: η x_3 μπαίνει στη βάση, η w_1 βγαίνει.
- Ανάλογη οδήγηση στο δυϊκό: Η z_3 βγαίνει, η y_1 μπαίνει.

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Το 3ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 5/3 & - & 4/3x_1 & - & 5/9w_2 & - & 2/9w_1 \\
\hline
x_3 & = & 1/3 & + & 1/3x_1 & - & 1/9w_2 & - & 4/9w_1 \\
x_2 & = & 2/3 & + & 2/3x_1 & - & 2/9w_2 & + & 1/9w_1.
\end{array}$$

βέλτιστη λύση (Π): $(x_1,x_2,x_3,w_1,w_2)=(0,\frac{2}{3},1/3,0,0)$, $\zeta=\frac{5}{3}$

- Το 3ο λεξικό του δυϊκού π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rcrcrcr}
-\xi & = & -5/3 & - & 1/3z_3 & - & 2/3z_2 \\
\hline
z_1 & = & 4/3 & - & 1/3z_3 & - & 2/3z_2 \\
y_2 & = & 5/9 & + & 1/9z_3 & + & 2/9z_2 \\
y_1 & = & 2/9 & + & 4/9y_1 & - & 1/9z_2.
\end{array}$$

βέλτιστη λύση (Δ): $(y_1,y_2,z_1,z_2,z_3)=(2/9,5/9,4/3,0,0)$, $-\xi=-\frac{5}{3}$

- Πίνακας δυϊκού = Αντίθετος ανάστροφος πρωτεύοντος
- Στο πρωτεύον η βασική λύση είναι και εφικτή και βέλτιστη.
- Στο δυϊκό η βασική λύση είναι και εφικτή και βέλτιστη.

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα

- Περιθώριες μεταβλητές του πρωτεύοντος σε 1-1 αντιστοιχία με τις αρχικές μεταβλητές του δυϊκού. $w_i \leftrightarrow y_i$
- Αρχικές μεταβλητές του πρωτεύοντος σε 1-1 αντιστοιχία με τις περιθώριες μεταβλητές του δυϊκού. $x_j \leftrightarrow z_j$
- Ο πίνακας του αρχικού λεξικού του πρωτεύοντος είναι ο αντίθετος ανάστροφος του αρχικού λεξικού του δυϊκού.
- Οδήγηση στο πρωτεύον → Αντίστ. οδήγηση στο δυϊκό. Τότε ο πίνακας κάθε λεξικού του πρωτεύοντος είναι ο αντίθετος ανάστροφος του αντίστ. λεξικού του δυϊκού.

Μέθοδος Simplex, δυϊκότητα, βέλτιστες β.ε.λ.

- Το τελικό λεξικό της Simplex του πρωτεύοντος δίνει βέλτιστη β.ε.λ. και για το πρωτεύον και για το δυϊκό.
- Εφικτότητα βασικής λύσης του δυϊκού:
  Η βασική λύση του πρωτεύοντος είναι βέλτιστη $\Rightarrow$
  Συντελεστές αντικειμενικής πρωτεύοντος $\leq 0 \Rightarrow$
  Σταθεροί όροι περιορισμών δυϊκού $\geq 0 \Rightarrow$
  Η βασική λύση του δυϊκού είναι εφικτή.
- Βελτιστότητα βασικής λύσης του δυϊκού:
  Η βασική λύση του πρωτεύοντος είναι εφικτή $\Rightarrow$
  Σταθεροί όροι περιορισμών πρωτεύοντος $\geq 0 \Rightarrow$
  Συντελεστές αντικειμενικής δυϊκού $\leq 0 \Rightarrow$
  Η βασική λύση του δυϊκού είναι βέλτιστη.

Μέθοδος Simplex, δυϊκότητας, βέλτιστες β.ε.λ.

- Το τελικό λεξικό της Simplex δίνει βέλτιστη β.ε.λ. και για το πρωτεύον και για το δυϊκό.
- Η βέλτιστη λύση του δυϊκού βρίσκεται διαβάζοντας του συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του βέλτιστου λεξικού του πρωτεύοντος.
- Οι τιμές των βασικών μεταβλητών του δυϊκού στη βέλτιστη λύση είναι οι αντίθετοι των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης του βέλτιστου λεξικού του πρωτεύοντος.
- Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η ίδια και για το πρωτεύον και για το δυϊκό.
- Όλα βασίζονται στο ότι σε κάθε βήμα οι πίνακες των λεξικών είναι αντίθετοι ανάστροφοι.