Επιχειρησιακή Έρευνα
Ενότητα 3
Η μέθοδος Simplex

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

Τυπική μορφή π.γ.π.

μετ. απόφασης: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

- Είναι:

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\max & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n & & \\
\text{υπό} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
 & & & & & \vdots & & & & \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.}
\end{array}
$$

- Μεγιστοποίηση της αντικειμενικής,
- Όλοι οι περιορισμοί τύπου $\leq$,
- Όλες οι μεταβλητές ≥ 0.

Τροπή π.γ.π. σε τυπική μορφή I

- Αν πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης τότε αντί για
$$\min \zeta = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
θέτουμε

min f(x) = - max -f(x)

$$-\max -\zeta = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n.$$

- Αν κάποιος περιορισμός είναι τύπου
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b$$
τότε πολλαπλασιάζουμε με -1, οπότε αντικαθιστούμε με
$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \leq -b$$

Τροπή π.γ.π. σε τυπική μορφή II

- Αν κάποιος περιορισμός είναι τύπου

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n \le b \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \ge b \end{cases}$$

τότε τον αντικαθιστούμε με δυο περιορισμούς

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \le b$$

και

$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \le -b.$$

Τροπή π.γ.π. σε τυπική μορφή III

- Αν κάποια μεταβλητή είναι τύπου

$$x_j \leq 0$$

  τότε την αντικαθιστούμε με την αντίθετή της, δηλαδή θέτουμε $x_j = -x_j'$ και έχουμε

$$x_j' \geq 0.$$

- Αν κάποια μεταβλητή είναι τύπου

$$x_j \in \mathbb{R} \text{ (χωρίς περιορισμό)}$$

  τότε την αντικαθιστούμε με τη διαφορά δυο μη αρνητικών μεταβλητών, δηλαδή θέτουμε $x_j = x_j' - x_j''$ και έχουμε

$$x_j', x_j'' \geq 0.$$

Παράδειγμα

- Να τεθεί σε τυπική μορφή το π.γ.π.

$$\begin{array}{llllllll} \min & x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{υπό} & x_1 & - & 3x_2 & & & \leq & 10 \\ & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 3 \\ & x_1 & & & - & x_3 & = & 2 \\ & \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \in \mathbb{R}.} \end{array}$$

$$
\begin{array}{llrrrrcr}
\text{min} & x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{υπό} & x_1 & - & 3x_2 & & & \leq & 10 \\
 & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 3 \\
 & x_1 & & & - & x_3 & = & 2 \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \in \mathbb{R}.}
\end{array}
$$

$x_2 = -x_2'$

$x_2' \geq 0$

$\Longleftrightarrow$

$x_3 = x_3' - x_3''$

$x_3', x_3'' \geq 0$

$$
\begin{array}{llrrrrcr}
\text{min} & x_1 & + 2x_2' & + 4x_3' & - 4x_3'' & & \\
\text{υπό} & x_1 & + 3x_2' & & & \leq & 10 \\
 & x_1 & + x_2' & - 2x_3' & + 2x_3'' & \geq & 3 \\
 & x_1 & & - x_3' & + x_3'' & = & 2 \\
 & \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2', x_3', x_3'' \geq 0}
\end{array}
$$

$\Longleftrightarrow$

$$
\begin{array}{llrrrrcr}
-\text{max} & -x_1 & - 2x_2' & - 4x_3' & + 4x_3'' & & \\
\text{υπό} & x_1 & + 3x_2' & & & \leq & 10 \\
 & -x_1 & - x_2' & + 2x_3' & - 2x_3'' & \leq & -3 \\
 & x_1 & & - x_3' & + x_3'' & \leq & 2 \\
 & -x_1 & & + x_3' & - x_3'' & \leq & -2 \\
 & \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2', x_3', x_3'' \geq 0}
\end{array}
$$

Παράδειγμα

- Να τεθεί σε τυπική μορφή το π.γ.π.

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\min & x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{υπό} & x_1 & - & 3x_2 & & & \leq & 10 \\
& x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 3 \\
& x_1 & & & - & x_3 & = & 2 \\
& \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \in \mathbb{R}.}
\end{array}$$

- Θέτουμε $x_2 = -x_2'$ και $x_3 = x_3' - x_3''$ με $x_2', x_3', x_3'' \geq 0$. Έχουμε:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & x_1 & + & 2x_2' & + & 4x_3' & - & 4x_3'' & & \\
\text{υπό} & x_1 & + & 3x_2' & & & & & \leq & 10 \\
& x_1 & + & x_2' & - & 2x_3' & + & 2x_3'' & \geq & 3 \\
& x_1 & & & - & x_3' & + & x_3'' & = & 2 \\
& \multicolumn{9}{l}{x_1 x_2', x_3', x_3'' \geq 0.}
\end{array}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Έχουμε:

$$
\begin{array}{llcccccccc}
\min & x_1 & + & 2x_2' & + & 4x_3' & - & 4x_3'' & & \\
\text{υπό} & x_1 & + & 3x_2' & & & & & \leq & 10 \\
& x_1 & + & x_2' & - & 2x_3' & + & 2x_3'' & \geq & 3 \\
& x_1 & & & - & x_3' & + & x_3'' & = & 2 \\
& \multicolumn{9}{l}{x_1 x_2', x_3', x_3'' \geq 0.}
\end{array}
$$

- Πολλαπλασιάζουμε την αντικειμενική και τον 2ο περιορισμό με -1 και αντικαθιστούμε τον 3ο περιορισμό με δυο νέους περιορισμούς:

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Από

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & x_1 & + & 2x_2' & + & 4x_3' & - & 4x_3'' & & \\
\text{υπό} & x_1 & + & 3x_2' & & & & & \leq & 10 \\
 & x_1 & + & x_2' & - & 2x_3' & + & 2x_3'' & \geq & 3 \\
 & x_1 & & & - & x_3' & + & x_3'' & = & 2 \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_1 x_2', x_3', x_3'' \geq 0}
\end{array}
$$

- γίνεται

$$
\begin{array}{lrrcrcrcrcr}
-\max & - & x_1 & - & 2x_2' & - & 4x_3' & + & 4x_3'' & & \\
\text{υπό} & & x_1 & + & 3x_2' & & & & & \leq & 10 \\
 & - & x_1 & - & x_2' & + & 2x_3' & - & 2x_3'' & \leq & -3 \\
 & & x_1 & & & - & x_3' & + & x_3'' & \leq & 2 \\
 & - & x_1 & & & + & x_3' & - & x_3'' & \leq & -2 \\
 & \multicolumn{10}{l}{x_1 x_2', x_3', x_3'' \geq 0.}
\end{array}
$$

Από την τυπική μορφή στη μορφή Simplex

- Για να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος επίλυσης Simplex τρέπουμε τους περιορισμούς σε εξισωτικούς προσθέτοντας περιθώριες μεταβλητές:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$
$$\downarrow$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + w_i = b_i$$
$$w_i \geq 0.$$

- Κατόπιν λύνουμε ως προς τις περιθώριες τους νέους περιορισμούς:

$$w_i = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n.$$

- Το προκύπτον σχήμα αναφέρεται ως λεξικό.

Παράδειγμα

- Να τεθεί το π.γ.π. σε μορφή λεξικού Simplex:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 5x_1 & - & 4x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 24 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0. & & & & \end{array}$$

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 5x_1 & - & 4x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\
& 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 24 \\
& -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\
& \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0.}
\end{array}
$$

$\iff$

$$
\begin{array}{ll}
\max & 5x_1 - 4x_2 \\
\text{υπό} & x_1 - x_2 + w_1 = 6 \\
& 3x_1 - 2x_2 + w_2 = 24 \\
& -2x_1 + 3x_2 + w_3 = 9 \\
& x_1, x_2, w_1, w_2, w_3 \geq 0
\end{array}
$$

$\iff$

$$
\begin{array}{ll}
\max & 5x_1 - 4x_2 \\
\text{υπό} & w_1 = 6 - x_1 + x_2 \\
& w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2 \\
& w_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2 \\
& x_1, x_2, w_1, w_2, w_3 \geq 0
\end{array}
$$

$\iff$

$$
\begin{array}{l}
\zeta = 0 + 5x_1 - 4x_2 \\
\hline
w_1 = 6 - x_1 + x_2 \\
w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2 \\
w_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2
\end{array}
$$

Λεξικό

Παράδειγμα

- Να τεθεί το π.γ.π. σε μορφή λεξικού Simplex:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 5x_1 & - & 4x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 24 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0. & & & & \end{array}$$

- Έχουμε το λεξικό:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \text{υπό} & w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ & w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ & w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \\ & x_1, x_2, w_1, w_2, w_3 \geq 0. & & & & & & \end{array}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Το λεξικό

$$
\begin{array}{llrrrrrrr}
\max & \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
\text{υπό} & w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
& w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
& w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \\
& \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, w_1, w_2, w_3 \geq 0.}
\end{array}
$$

το γράφουμε συνήθως σε απλοποιημένη μορφή, παραλείποντας το max και τους περιορισμούς μη-αρνητικότητας των μεταβλητών:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
\end{array}
$$

Λεξικό και ορισμοί I

- Έστω ένα λεξικό, π.χ. το

μη-εξαρτημένες
μη-βασικές

εξαρτημένες,
βασικές

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline
w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
\end{array}$$

- Η ονομασία "λεξικό" παραπέμπει στο ότι μεταφράζει τις μεταβλητές στα αριστερά μέλη με όρους των μεταβλητών στα δεξιά μέλη.
- Το γράμμα ζ χρησιμοποιείται για την αντικειμενική συνάρτηση.
- Οι εξαρτημένες μεταβλητές, στα αριστερά, λέγονται βασικές μεταβλητές. Εδώ είναι οι w_1, w_2, w_3 (που ταυτίζονται με τις περιθώριες).

Λεξικό και ορισμοί II

- Έστω πάλι το λεξικό

$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) =$
$(0, 0, 6, 24, 9)$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
\end{array}
$$

$(1, 1, 6, 23, 8)$

- Οι ανεξάρτητες μεταβλητές, στα δεξιά, λέγονται μη-βασικές μεταβλητές. Εδώ είναι οι x_1, x_2 (που ταυτίζονται με τις αρχικές μεταβλητές).
- Θέτοντας τις μη-βασικές μεταβλητές ίσες με 0 παίρνουμε μια λύση του συστήματος των περιορισμών που λέγεται βασική λύση. Εδώ $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$ με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $\zeta = 0$.

Λεξικό και ορισμοί III - Λύσεις Ι

- Έστω πάλι το λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
\end{array}
$$

$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3)$

$(0, -1, 5, 22, 12)$

$x_2 = -1 < 0$
δεν είναι
εφικτή λύση

- Λύση = Διάνυσμα που ικανοποιεί τους περιορισμούς που εμφανίζονται στο λεξικό.
  Π.χ. εδώ $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (1, 1, 6, 23, 8)$ με $\zeta = 1$.
- Εφικτή λύση = Λύση που ικανοποιεί και τους "κρυφούς" περιορισμούς της μη-αρνητικότητας των μεταβλητών.
  Π.χ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (1, 1, 6, 23, 8)$ εφικτή λύση.
  Όμως $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (-1, 0, 7, 27, 7)$ λύση, όχι εφικτή.

Λεξικό και ορισμοί IV - Λύσεις II

- Έστω πάλι το λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
\end{array}
$$

- Βασική λύση = Λύση που οι μη-βασ. μεταβλητές είναι 0. Π.χ. εδώ $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$ με $\zeta = 0$. Μπορεί μια λύση να είναι βασική αλλά όχι εφικτή.
- Βασική εφικτή λύση (β.ε.λ.) = Βασική λύση που είναι και εφικτή.
- Βέλτιστη λύση = Εφικτή λύση που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

Η ιδέα της μεθόδου Simplex

- Αρχίζουμε από κάποιο λεξικό που μας δίνει β.ε.λ.
- Εξετάζουμε αν η νέα β.ε.λ. είναι βέλτιστη λύση. Αν ναι σταματάμε, αλλιώς ...
- Μετασχηματίζουμε το λεξικό αλλάζοντας τις βασικές μεταβλητές ώστε να πάρουμε νέα β.ε.λ. που βελτιώνει την αντικειμενική συνάρτηση.

Γιατί λειτουργεί η Simplex;

- Η ιδέα της Simplex λειτουργεί γιατί όπως θα δούμε αργότερα, αν ένα π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση τότε έχει αναγκαστικά και βέλτιστη β.ε.λ.
- Οι δυνατές β.ε.λ. είναι πεπερασμένες το πλήθος και άρα αν πηγαίνουμε από β.ε.λ. σε β.ε.λ., βελτιώνοντας την αντικειμενική συνάρτηση θα φθάσουμε σε βέλτιστη λύση σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Βασικά τεχνικά σημεία της Simplex

- Κριτήριο αλλαγής βασικών μεταβλητών για την βελτίωση της αντικειμενικής συνάρτησης από λεξικό σε ισοδύναμο λεξικό.
- Μετασχηματισμός λεξικού σε ισοδύναμο λεξικό, όταν αλλάζουν οι βασικές μεταβλητές.

Προχωρημένα τεχνικά σημεία της Simplex

- Τι γίνεται όταν έχουμε μη-φραγμένη αντικειμενική συνάρτηση (οπότε δεν υπάρχει βέλτιστη λύση) ;
- Τι γίνεται όταν δεν έχουμε αρχική β.ε.λ. ;
- Τι γίνεται αν κολλήσει η Simplex και κάνει κύκλους μεταξύ κάποιων β.ε.λ. πριν φθάσει σε βέλτιστη β.ε.λ. ;

Παράδειγμα Simplex - Έναρξη

- Να λυθεί το π.γ.π. :

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & 5x_1 & - & 4x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\
 & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 24 \\
 & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\
 & x_1, x_2 \geq 0. & & & &
\end{array}$$

Παράδειγμα Simplex - Έναρξη

- Να λυθεί το π.γ.π. :

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 5x_1 & - & 4x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 24 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0. & & & & \end{array}$$

- Έχουμε το αρχικό λεξικό:

$$\begin{array}{ccrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

με βασική λύση $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$.
Είναι και εφικτή (β.ε.λ.).

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
\end{array}
$$

μηδενίζεται όταν $x_1 = 6$

μηδενίζεται για $x_1 = 8$

β.ε.λ.

$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$

με $\zeta = 0$

Η x_1 έχει θετικό συντελεστή στην α.σ.

Θέλω να δώσω μεγαλύτερη τιμή στη x_1.

Πόσο μπορεί να μεγαλώσει η τιμή της x_1;

Καθώς η x_1 $\nearrow$ η w_1 $\searrow$

» » $\nearrow$ η w_2 $\searrow$

» » $\nearrow$ η w_3 $\nearrow$

Μπορεί να μεγαλώσει μέχρι να μηδενιστεί η πρώτη από τις w_1 και w_2, δηλαδή μέχρι $x_1 = 6$.

Θα πάω σε επόμενο λεξικό και

η x_1 θα γίνει βασική (επειδή $+5 > 0$)

η w_1 θα γίνει μη-βασική. (επειδή $\min\{6, 8\} = 6$)

Παράδειγμα Simplex- 1η επανάληψη

- Παρατηρούμε το αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

  (αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$).
- Αν η x_1 αυξηθεί η ζ αυξάνει.
- Καθώς η x_1 αυξάνεται οι w_1, w_2 μειώνονται.
- Καθώς η x_1 αυξάνεται η w_3 αυξάνεται.
- Πόσο μπορεί να αυξηθεί η x_1;
  Μέχρι κάποια από τις w_1, w_2 να γίνει 0.
  Η w_1 γίνεται 0 για $x_1 = 6/1$.
  Η w_2 γίνεται 0 για $x_1 = 24/3 = 8$.
  Άρα πρώτα θα γίνει 0 η w_1.

Παράδειγμα Simplex - 1η επανάληψη (συνέχεια)

- Επομένως στο αρχικό λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & \boxed{5x_1} & - & 4x_2 \\
\hline
\boxed{w_1} & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
\end{array}
$$

- η x_1 γίνεται βασική (αυξάνεται μέχρι $x_1 = 6$),
- η w_1 γίνεται μη-βασική (μειώνεται μέχρι $w_1 = 0$).
- Μετασχηματίζουμε το λεξικό "περνώντας" την x_1 στο αριστερό μέλος, στη θέση της w_1 και εκφράζοντας τις w_2, w_3 συναρτήσει των νέων μη-βασικών μεταβλητών w_1, x_2 (διαδικασία οδήγησης).
- Ο συντελεστής στην τομή της εισερχόμενης και της εξερχόμενης μεταβλητής (εδώ το -1) λέγεται οδηγός.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & \boxed{5x_1} & - & 4x_2 \\
\hline
\boxed{w_1} & = & 6 & - & 1x_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_4
\end{array}
$$

Η x_1 θα μπει στη βάση
Η w_1 θα βγει από τη βάση.

$1^{ος}$ τρόπος: Επίλυση της γραμμής του οδηγού ως προς τη μεταβλητή που γίνεται βασική και αντικατάσταση.

Γ_2: $x_1 = 6 - w_1 + x_2$

Γ_1: $\zeta = 0 + 5x_1 - 4x_2 \Rightarrow \zeta = 0 + 5(6 - w_1 + x_2) - 4x_2 \Rightarrow$

$\zeta = 30 - 5w_1 + 1x_2$

Γ_3: $w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow w_2 = 24 - 3(6 - w_1 + x_2) + 2x_2 \Rightarrow$

$w_2 = 6 + 3w_1 - 1x_2$

Γ_4: $w_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2$

$w_3 = 9 + 2(6 - w_1 + x_2) - 3x_2$

$\Rightarrow w_3 = 21 - 2w_1 - 1x_2$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & 1x_2 \\
\hline
x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & 1x_2 \\
w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & 1x_2
\end{array}
$$

β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$, $\zeta = 30$

Παράδειγμα Simplex - 1η επανάληψη (συνέχεια)

- Θεωρούμε το αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & \boxed{5x_1} & - & 4x_2 \\ \hline \boxed{w_1} & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

- Απαλείφουμε την μεταβλητή x_1 που μπαίνει στη βάση από την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς, εκτός του περιορισμού που αφορά τη μεταβλητή w_1 που βγαίνει από τη βάση, εκτελώντας γραμμοπράξεις.
- Για την αντικειμενική συνάρτηση ζ έχουμε

$$\zeta + 5 \times w_1 = 0 + 5 \times 6 + (-4 + 5 \times 1)x_2.$$

- Ομοίως για τις w_2, w_3.
- Τέλος μετακινούμε τη μεταβλητή w_1 που βγαίνει από τη βάση στο δεξιό μέλος.

Παράδειγμα Simplex - 1η επανάληψη (συνέχεια)

- Το αρχικό λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
\end{array}
$$

(αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$)

- γίνεται

$$
\begin{array}{rcrcrl}
\zeta & = & 30 & - & 5w_1 & \boxed{+\,1x_2} \\
\hline
x_1 & = & 6 & - & w_1 & +\ x_2 \\
\boxed{w_2} & = & 6 & + & 3w_1 & -\ x_2 \quad \text{μηδ για } x_2 = 6 \\
w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & -\ x_2 \quad \text{μηδ. για } x_2 = 21
\end{array}
$$

(αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$).

Παράδειγμα Simplex - 2η επανάληψη

- Το δεύτερο λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\
\hline
x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\
w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2
\end{array}
$$

(αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$) είναι βέλτιστο;

- Όχι, γιατί υπάρχει θετικός συντελεστής μη-βασικής μεταβλητής στην ζ, ο συντελεστής της x_2.
- Καθώς η x_2 αυξάνεται οι w_2, w_3 μειώνονται.
- Η x_2 μπορεί να αυξηθεί μέχρι $w_2 = 0$ ή $w_3 = 0$.
  Η w_2 γίνεται 0 για $x_2 = 6/1$.
  Η w_3 γίνεται 0 για $x_2 = 21/1 = 21$.
  Άρα πρώτα θα γίνει 0 η w_2.

Παράδειγμα Simplex - 2η επανάληψη (συνέχεια)

- Επομένως στο δεύτερο λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & \boxed{x_2} \\
\hline
x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\
\boxed{w_2} & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\
w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2
\end{array}
$$

- η x_2 γίνεται βασική (αυξάνεται μέχρι $x_2 = 6$),
- η w_2 γίνεται μη-βασική (μειώνεται μέχρι $w_2 = 0$).
- Μετασχηματίζουμε το λεξικό "περνώντας" την x_2 στο αριστερό μέλος, στη θέση της w_2 και εκφράζοντας τις x_1, w_3 συναρτήσει των νέων μη-βασικών μεταβλητών w_1, w_2 (διαδικασία οδήγησης).
- Ο οδηγός στην τομή της στήλης της x_2 και της γραμμής της w_2 είναι -1.

$$
\begin{array}{rcrcrcr l}
\zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 & \Gamma_1 \\
\hline
x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 & \Gamma_2 \\
w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & 1\,x_2 & \Gamma_3 \\
w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2 & \Gamma_4
\end{array}
$$

Η x_2 μπαίνει στη βάση

Η w_2 βγαίνει από τη βάση

2ος τρόπος: Γραμμοπράξεις με τη γραμμή του οδηγού.

$\Gamma_1' = \Gamma_1 + \Gamma_3$

$\Gamma_2' = \Gamma_2 + \Gamma_3$

$\Gamma_3' = \Gamma_3$

$\Gamma_4' = \Gamma_4 + (-1)\Gamma_3 = \Gamma_4 - \Gamma_3$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 36 & - & 2w_1 & - & 1w_2 \\
\hline
x_1 & = & 12 & + & 2w_1 & - & 1w_2 \\
x_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & 1w_2 \\
w_3 & = & 15 & - & 5w_1 & + & 1w_2
\end{array}
$$

Β.Ε.Λ.

$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (12, 6, 0, 0, 15)$

με $\zeta = 36$

Η λύση είναι βέλτιστη.

Παράδειγμα Simplex - 2η επανάληψη (συνέχεια)

- Για το δεύτερο λεξικό έχουμε

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\
\hline
x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\
w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2
\end{array}
$$

- Απαλείφουμε την μεταβλητή x_2 που μπαίνει στη βάση από την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς, εκτός του περιορισμού που αφορά τη μεταβλητή w_2 που βγαίνει από τη βάση, εκτελώντας γραμμοπράξεις.
- Τέλος μετακινούμε τη μεταβλητή w_2 που βγαίνει από τη βάση στο δεξιό μέλος.

Παράδειγμα Simplex - 2η επανάληψη (συνέχεια)

- Το δεύτερο λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\
\hline
x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\
w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2
\end{array}
$$

(αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$)

- γίνεται

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 36 & - & 2w_1 & - & w_2 \\
\hline
x_1 & = & 12 & + & 2w_1 & - & w_2 \\
x_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & w_2 \\
w_3 & = & 15 & - & 5w_1 & + & w_2
\end{array}
$$

(αντ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (12, 6, 0, 0, 15)$).

Παράδειγμα Simplex - 3η επαλάληψη

- Το τρίτο λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 36 & - & 2w_1 & - & w_2 \\
\hline
x_1 & = & 12 & + & 2w_1 & - & w_2 \\
x_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & w_2 \\
w_3 & = & 15 & - & 5w_1 & + & w_2
\end{array}
$$

  (αντ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (12, 6, 0, 0, 15)$) είναι βέλτιστο;
- Ναι, γιατί όλοι οι συντελεστές μη-βασικών μεταβλητών στην ζ είναι μη-θετικοί.
- Επομένως το 36 είναι ένα άνω φράγμα για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Αλλά το 36 "πιάνεται" για την $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (12, 6, 0, 0, 15)$, που αποτελεί επομένως βέλτιστη λύση.

Σύνοψη της βασικής Simplex

- Ξεκινάμε με λεξικό που αντιστοιχεί σε β.ε.λ.
- Αν όλοι οι συντελεστές των μη-βασικών μεταβλητών στην ζ είναι μη-θετικοί έχουμε βρει τη βέλτιστη λύση.
- Αν υπάρχουν μη-βασικές μεταβλητές των οποίων οι συντελεστές στην ζ είναι θετικοί, διαλέγουμε μία για να μπει στη βάση.
- Από τις βασικές μεταβλητές που μειώνονται καθώς η επιλεχθείσα μη-βασική μεταβλητή αυξάνεται διαλέγουμε την πρώτη που θα μηδενιστεί για να βγει από τη βάση.
- Μετασχηματίζουμε το λεξικό ώστε η αντικειμενική συνάρτηση και οι βασικές μεταβλητές να εκφράζονται συναρτήσει των νέων μη-βασικών μεταβλητών.
- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη νέα β.ε.λ. θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από την προηγούμενη β.ε.λ.

Πιθανά προβλήματα

- Απουσία αρχικής β.ε.λ.
- Πολλές επιλογές για εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή.
- Απουσία επιλογής για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή.
- Πολλές επιλογές για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή.
- Η αντικειμενική συνάρτηση δεν βελτιώνεται στο επόμενο λεξικό.